Fourteenth book

In: Martina Bečvářová (author): Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady. (English). Praha: Prometheus, 2002. pp. 246–257.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401825

Kniha čtrnáctá.

A o tělesech čtvrtá.

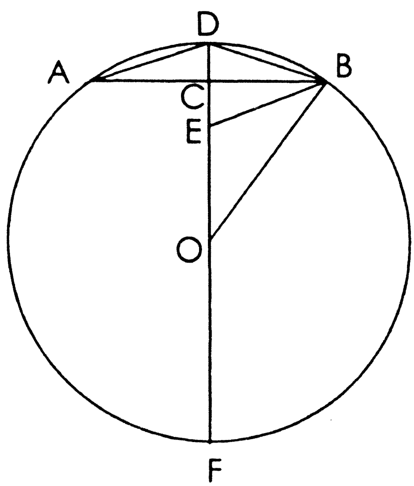
Někteří mají sice za to, že též tuto knihu napsal Euklid, jiní však, jsouce pravdě bližší, nazvali ji:

Hypsikla Alexandrinského[2] „o pěti tělesech" kniha prvá.

Basilides Tyrský, Protarcha, když do Alexandrie přišel, a otci našemu za společníka ve vědách mathematických odporučen byl, během času mnoho a dlouho s ním se cvičil. Rozváživše oba, co Apollonius byl napsal o porovnání dvaceti- a dvanáctistěnu v touž kouli vepsaných, v jakém poměru totiž obě tělesa ta k sobě jsou, nabyli přesvědčení, že Apollonius vzájemnosť tu dobře nevyložil. Za tou příčinou opravu toho, jak otec můj říkával, pro pamět sepsali. Já pak uhodil jsem později na jinou knihu od Apollonia sepsanou, která obsahovala téže věci výklad správný; z provedení úlohy této měl jsem zajisté potěšení nemalé. Co Apollonius o tom sepsal, každému známo, poněvadž to přichází z ruky do ruky, a čím jsme my k tomu přičinili největší - jak dodati dlužno - pilností i při světle, tobě tímto věnovat jsme se odhodlali, abys u své vzácné vědomosti o všech mathematických vědách, zejmena však měřictví, moudře posoudil, co říci jsme hodlali. Pro přátelství, jaké jsi k otci choval, jakož i pro náklonnosť jakou jsi nás oblažoval, pojednání to laskavě přijmiž. Už na čase, abychom položili konec uvodu a přikročili k věci.

Věta 1.

Spustíme-li ze středu kruhu kolmici na stranu vepsaného pětiúhelníku stejnostranného, jest tato polovice součtu strany stejnostranného šestiúhelníku a desetiúhelníku vepsaného v týž kruh. (Obr. 467.).



Obr. 467.

[2] Hypsikles žil 200 let později nežli Euklid. Úvod následující jest nepochybně od téhož.

V daný kruh, jehož střed budiž O, vnesme stranu stejnostranného pětiúhelníku o stejných úhlech AB, spusťme OC $\perp$ AB a prodlužme tuto do D; tvrdí se: OC rovná se polovici součtu strany šesti- a desetiúhelníka v týž kruh vepsaného.

Veďme OB, BD, odměřme CE = CD a spojme BE.

Poněvadž se celý obvod kruhu rovná 5 obl. ADB, a DBF jest obvodu polovice, pak obl. BD jest polovice obl. ADB, jest půl obvodu DBF = 5 obl. BD, čili obl. BF = 4 obl. BD. A má se

obl. BF : obl. BD = $\measuredangle$ BOF : $\measuredangle$ BOD (VI. 33.), a proto

$\measuredangle$ BOF = 4 $\measuredangle$ BOD.

Vnější $\measuredangle$ BOF = 2 $\measuredangle$ BDF (III.20), pročež $\measuredangle$ BDF = 2 $\measuredangle$ BOE. Avšak $\measuredangle$ BDC = $\measuredangle$ BEC, tedy $\measuredangle$ BEC = 2 $\measuredangle$ BOC, z čehož jde, že OE = BE (I.6.32.), a BD = BE, pročež BD = EO. Poněvadž se (dle sestroj.) CE = CD, jest

OC = CD + BD, přidáme-li k oběma stranám OC, bude

2 OC = OD + BD, a proto

OC = 1/2(OD + BD).

OD jest strana šestiúhelníku, BD strana desetiúhelníku v týž kruh vepsaného, tedy atd. j. b. t.

Důsledek.

Ukázáno už, že přímka vedená ze středu kruhu kolmo na stranu stejnostranného trojúhelníku v kruh vepsaného, rovná se polovici poloměru (XIII.12.).

Věta 2.

Týž kruh zaujímá pětiúhelník dvanáctistěnu a trojúhelník dvacetistěnu, která tělesa vepsána jsou v touže kouli.

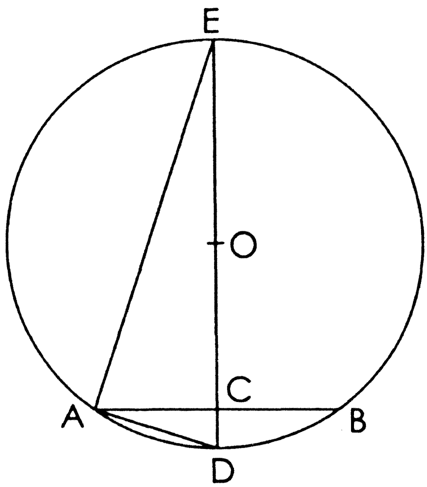
To bylo sepsáno od Aristaea v knize „o porovnání pěti těles“[3], a od Apollonia v druhém vydání knihy „o porovnání dvanáctistěnu s dvacetistěnem“: neboť jako se má povrch dvanáctistěnu k povrchu dvacetistěnu, má se týž dvanáctistěn k témuž dvacetistěnu, poněvadž kolmice vedená ze středu koule na pětiúhelník dvanáctistěnu jest totožná s kolmicí vedenou na trojúhelník dvacetistěnu. Prvé však nežli ukážeme, že týž kruh objímá i pětiúhelník dvanáctistěnu i trojúhelník dvacetistěnu v touže kouli vepsaných, předesíláme tolik:

---

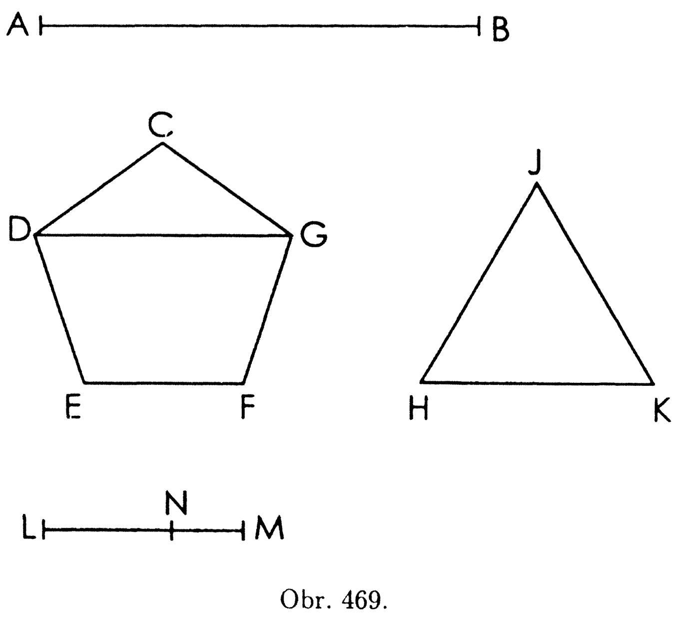
[3] Aristaea pět knih τόπων ςερεῶν uvádí Pappus v předmluvě knihy VII.

Přívětí.

Vepíše-li se v kruh stejnostranný pětiúhelník, rovná se čtverec jeho strany spolu se čtvercem přímky, která dvě strany pětiúhelníku podpíná, pětinásobnému čtverci poloměru kruhu.[4] (Obr. 468.)



Obr. 468.



Obr. 469.

[4] Poloměr = το̃ ἀπό της ἐκτο̃ κέντρο̆ κύκλο̆.

V daném kruhu budiž strana pětiúhelníku $\underline{AB}$, střed $\underline{O}$ a $\underline{OC} \perp \underline{AB}$, která na obě strany byvše prodloužena sbíhá se s kruhem v bodech $\underline{D}$, $\underline{E}$; spojme $\underline{A}$ s $\underline{E}$; tvrdí se: $\underline{AB}^2 + \underline{AE}^2 = 5\ \underline{OD}^2$.

Veďme $\underline{AD}$, která jest strana desetiúhelníku.

Poněvadž se $\underline{DE} = 2\ \underline{DB}$, jest $\underline{DE}^2 = 4\ \underline{DO}^2$ (VI.20.důsl.),

$$\underline{DE}^2 = \underline{AD}^2 + \underline{AE}^2, \text{ tedy}$$

$$\underline{AD}^2 + \underline{AE}^2 = 4\ \underline{DO}^2, \text{ nebo}$$

$$\underline{AD}^2 + \underline{AE}^2 + \underline{DO}^2 = 5\ \underline{DO}^2.$$

Avšak $\underline{AD}^2 + \underline{DO}^2 = \underline{AB}^2$ (XIII.10.), pročež

$$\underline{AE}^2 + \underline{AB}^2 = 5\ \underline{DO}^2 \text{ j. b. t.}$$

Na základě toho ukázati lze, že <u>týž kruh objímá pětiúhelník dvanácti- a trojúhelník dvacetistěnu v touž kouli vepsaných</u> (Obr. 469.).

Budiž dána koule a její průměr $\underline{AB}$; vepišme do ní dvanácti- a dvacetistěn, a budiž dvanáctistěnu pětiúhelník $\underline{CDEFG}$ a dvacetistěnu trojúhelník $\underline{HJK}$; tvrdí se: týž kruh obsahuje pětiúhelník $\underline{CDEFG}$ a trojúhelník $\underline{HJK}$. Veďme $\underline{DG}$ a tato jest strana krychle (XIII.8.17.). Vysaďme přímku $\underline{LM}$, tak aby $\underline{AB}^2 = 5\ \underline{LM}^2$; avšak čtverec průměru koule rovná se též pětinásobnému poloměru kruhu, který opsati lze kolem pěti hran (pětiúhelníku) dvacetistěnu. Sečeme-li $\underline{LM}$ v poměru vnějším a středním, jest větší část $\underline{LN}$ strana desetiúhelníku (VI.30.). A poněvadž

$$\underline{AB}^2 = 5\ \underline{LM}^2 = 3\ \underline{DG}^2 \text{ (XIII.5.9.),}$$

má se $\quad 3\ \underline{DG}^2 : 5\ \underline{LM}^2 = 3\ \underline{CG}^2 : 5\ \underline{LN}^2$ (XIII.8. XIV.7.),

z čehož jde, že se $\quad 3\ \underline{CG}^2 = 5\ \underline{LN}^2$.

Avšak $\quad 5\ \underline{JK}^2 = 5\ \underline{LM}^2 + 5\ \underline{LN}^2$ (IX.5. XIII.10.), nebo

$$5\ \underline{JK}^2 = 3\ \underline{DG}^2 + 3\ \underline{CG}^2.$$

V předcházejícím přívětí ukázáno, že $\underline{DG}^2 + \underline{CG}^2 =$ pětinásobnému čtverci poloměru kruhu, v němž jest pětiúhelník $\underline{CDEFG}$ vepsán, a proto se

$$3\ \underline{DG}^2 + 3\ \underline{CG}^2 = 15 \text{ čtvercům téhož poloměru čili}$$

$$5\ \underline{JK}^2 = 15 \text{ čtvercům téhož poloměru.}$$

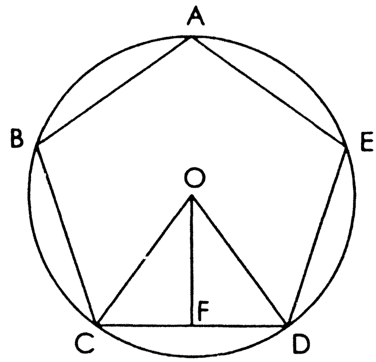
A známo též (XIII.12.), že se $\underline{JK}^2 = 3$ čtvercům poloměru kruhu opsaného kolem $\triangle$ku $\underline{HJK}$, tedy $\quad 5\ \underline{JK}^2 = 15$ čtvercům tohoto poloměru.

Porovnáním dostaneme, že se

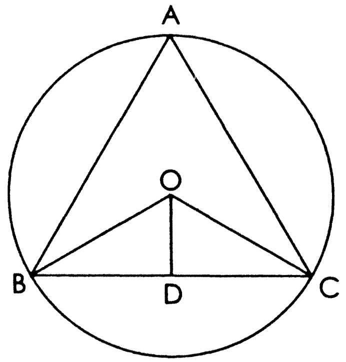
15 čtverců poloměru kruhu, který opisuje $\underline{CDEFG} = 15$ čtvercům poloměru kruhu, který opisuje $\triangle\ \underline{HJK}$, z čehož jde, že se onen poloměr rovná tomuto, čili průměr že se rovná průměru. A proto obsahuje týž kruh dvanáctistěnu pětiúhelník a dvacetistěnu trojúhelník, jsou-li obě tělesa tu v touže kouli vepsána j. b. t.

Věta 3.

Opíšeme-li kruh kolem pětiúhelníku stejnostranného a o stejných úhlech, a spustíme-li na jeho stranu ze středu kolmici, rovná se třicet obdélníků sestrojených z této kolmice a ze strany pětiúhelníků povrchu dvanáctistěnu. (Obr. 470.).



Obr. 470.



Obr. 471.

Budiž ABCDE pětiúhelník stejnostranný o stejných úhlech, střed kruhu kolem něho opsaného budiž O, a OF $\perp$ CD; tvrdí se: třicet obdélníků z CD, OF rovná se povrchu dvanáctistěnu.

Veďme OC, OD. Poněvadž obd. z CD, OF = 2 $\triangle$ COD, rovná se pět takových obdélníků deseti trojúhelníkům; deset těchto trojúhelníků rovná se dvěma pětiúhelníkům a proto 60 trojúhelníků nebo 30 obdélníků z CD, OF = 12 pětiúhelníkům čili povrchu dvanáctistěnu j. b. t.

Podobně se ukáže totéž o povrchu dvacetistěnu z trojúhelníku ABC, jemuž opsán jest kruh se středem O. Vedeme-li OD $\perp$ BC, pak OB, OC; tvrdí se: třicet obdélníků z BC, OC = povrchu dvacetistěnu (Obr. 471.).
Neboť obd. z BC, OC rovná se dvěma $\triangle\triangle$ OBC, a ze tří takových trojúhelníků skládá se $\triangle$ ABC,

pročež 3 obd. z BC, OC = 6 $\triangle$ OBC = 2 $\triangle$ ABC, nebo
30 obd. z BC, OC = 20 $\triangle$ ABC, které omezují dvacetistěn j. b. t.

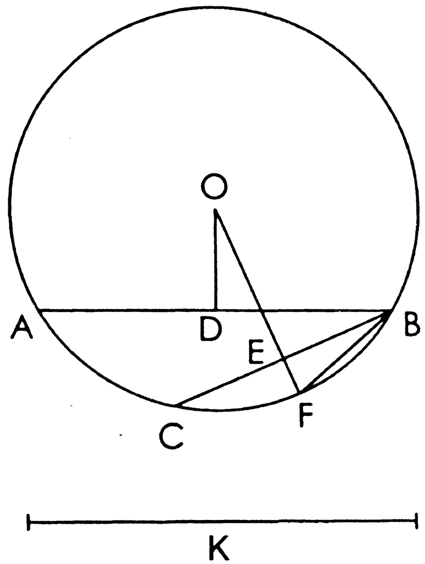
Má se tedy povrch dvanáctistěnu k povrchu dvacetistěnu jako obd. z CD, OF k obdélníku z BC, OD.

Důsledek.

Z toho patrno, že se má povrch dvanáctistěnu k povrchu dvacetistěnu, jako obdélník ze strany pětiúhelníku a z kolmice spuštěné ze středu kruhu jemu opsaného k obdélníku ze strany trojúhelníku a z kolmice z téhož středu na ni spuštěné; předpokládá se, že dvanácti- a dvacetistěn v touž kouli byl vepsán.

Věta 4.

Na základě toho se ukazuje, že se má povrch dvanáctistěnu k povrchu dvacetistěnu jako hrana krychle k hraně dvacetistěnu. (Obr. 472.).



Obr. 472.

V daný kruh jehož střed jest O vepišme pětiúhelník dvanácti- a trojúhelník dvacetistěnu; strana stejnostranného Δku budiž AB a pětiúhelníku BC; ze středu O veďme OD $\perp$ AB a OE $\perp$ BC; protahněme OE do bodu F, spojme B, F, a vysaďme hranu krychle K; tvrdí se: povrch dvanáctistěnu má se k povrchu dvacetistěnu jako K : AB.

Rozdělíme-li totiž OF + BF v poměru vnějším a středním, bude větší částí přímka OF (XIII.9.), a pak-li OF + BF půlíme, bude polovice OE (XIV.1.); a polovice poloměru OF jest OD (XIV.1. důsl.), pročež rozdělíme-li OE v poměru vnějším a středním, bude větší částí OD. Avšak rozdělíme-li hranu krychle K v poměru vnějším a středním, bude její větší část rovnati se BC (XIII.17.), tedy

K : BC = OE : OD (XIV.7.), z čehož

obd. z K, OD = obd. z BC, OE.

A poněvadž se má K : AB = obd. z K, OD : obd. z AB, OD (VI.1.) a

obd. z K, OD = obd. z BC, OE,

má se též K : AB = obd. z BC, OE : obd. z AB, OD (VI.16.), t. j.

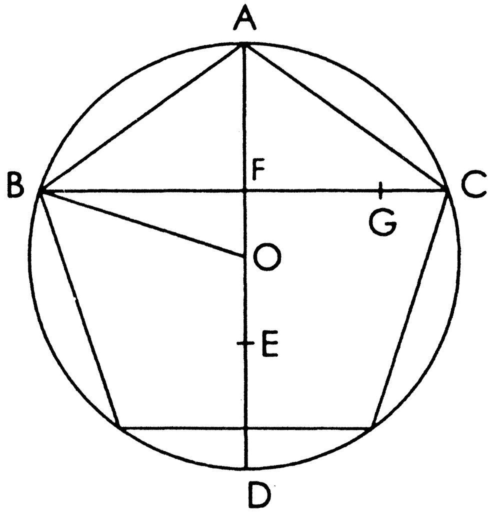
hrana krychle k hraně dvanáctistěnu má se jako povrch dvanáctistěnu k povrchu dvacetistěnu (XIV.3.důsl.) j. b. t.

Jinak.

Že se má povrch dvanáctistěnu k povrchu dvacetistěnu jako hrana krychle k hraně dvacetistěnu dokáže se na základě následujícího:

Přívětí.

Budiž dán kruh a v něm strany vepsaného pětiúhelníku AB, AC; veďme BC, a z bodu A průměr AD; polovice poloměru OD budiž OE, a CF nechť se rovná 3 CG; tvrdí se: obdélník z AE, BG = pětiúhelníku.



Obr. 473.

Veďme BO. Poněvadž se AO = 2 OE, jest AE = 1/2 OE, a dle sestrojení se FC = 3 CG, tedy FG = 2 CG, pročež FC = 1 1/2 CG, z čehož

AE : AO = CF : FG, nebo

obd. z AE, FG = obd. z AO, CF; a CF = BF, pročež

obd. z AE, FG = obd. z AO, BF.

Avšak obd. z AO, BF = 2 △ ABO, tedy obd. z AE, FG = 2 △ ABO, nebo

5 obd. z AE, FG = 10 △ ABO,

a jelikož 10 △ ABO = 2 pětiúhelníkům, jest

5 obd. z AE, FG = 2 pětiúhelníkům.

Jest však FG = 2 CG, tedy

5 obd. z AE, FG =10 obd. z AE, CG = 2 pětiúhelníkům, čili

5 obd. z AE, CG = pětiúhelníku.

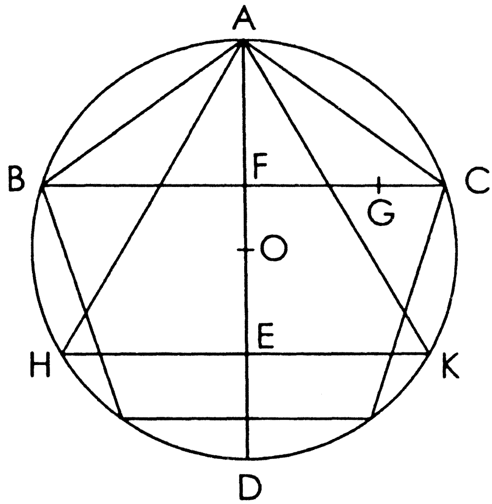
Poněvadž ale $\underline{BF} = \underline{CF} = 3\,\underline{CG}$ a

$\underline{FG} = 2\,\underline{CG}$, bude

$\underline{BF} + \underline{FG} = \underline{BG} = 5\,\underline{CG}$, a proto obd. z $\underline{AE}$, $\underline{BG}$ = 5 obd. z $\underline{AE}$, $\underline{CG}$

= pětiúhelníku j. b. t.

Toto předpokládajíce, vepišme v daný kruh pětiúhelník dvanáctistěnu a trojúhelník dvacetistěnu, která tělesa vepsána jsou v touže kouli (Obr. 474.).



Obr. 474.

Budtež $\underline{AB}$, $\underline{AC}$ strany pětiúhelníku, spojme $\underline{B}$ s $\underline{C}$, veďme průměr $\underline{AD}$, udělejme $\underline{CF} = 3\,\underline{CG}$, a poloměr $\underline{OD}$ půlme v bodu $\underline{E}$. Vedeme-li tímto bodem $\underline{HK} \perp \underline{AD}$, jest $\underline{HK}$ strana trojúhelníku $\underline{AHK}$ v týž kruh vepsaného (XIV.1.důsl.). Poněvadž se obd. z $\underline{AE}$, $\underline{BG}$ = pětiúhelníku (přívětí předcházející), a obd. z $\underline{AE}$, $\underline{HE} = \triangle\,\underline{AHK}$,

má se obd. z $\underline{AE}$, $\underline{BG}$: obd. z $\underline{AE}$, $\underline{HE}$ = pětiúhelník : trojúhelníku.

Avšak má se obd. z $\underline{AE}$, $\underline{BG}$: obd. z $\underline{AE}$, $\underline{HE}$ = $\underline{BG} : \underline{HE}$ (VI.1.), z čehož porovnáním

$\underline{BG} : \underline{HE}$ = pětiúhelník : trojúhelníku, nebo

$12\,\underline{BG} : 20\,\underline{HE}$ = 12 pětiúh. : 20 trojúh. čili

= povrch dvanácti- : povrchu dvacetistěnu.

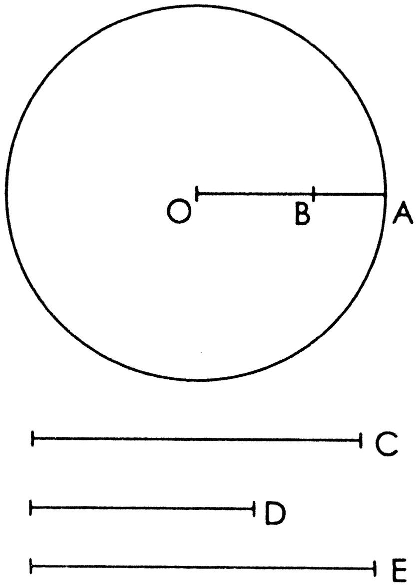
Poněvadž se $\underline{BG} = 5\,\underline{CG}$, a $\underline{BC} = 6\,\underline{CG}$, jest $12\,\underline{BG} = 10\,\underline{BC}$, a poněvadž se $\underline{HK} = 2\,\underline{HE}$, jest $20\,\underline{HE} = 10\,\underline{HK}$, dosazením pak dostaneme

$10\,\underline{BC} : 10\,\underline{HK}$ čili $\underline{BC} : \underline{HK}$ = povrch dvanácti- : povrchu dvacetistěnu.

$\underline{BC}$ jest hrana krychle a $\underline{HK}$ hrana dvacetistěnu (XIII.8.17.), pročež má se povrch dvanácti- k povrchu dvacetistěnu jako hrana krychle k hraně dvacetistěnu j. b. t.

Věta 5.

Rozdělíme-li dovolnou přímku v poměru vnějším a středním, má se přímka, jejíž čtverec se rovná součtu čtverce celé oné přímky a čtverce části její větší k přímce, jejíž čtverec se rovná součtu čtverce téže celé přímky a čtverce části její menší, jako se má hrana krychle k hraně dvacetistěnu (Obr. 475.).



Obr. 475.

Budiž dán kruh dovolného průměru, a v něm budiž vepsán pětiúhelník dvanáctistěnu, trojúhelník dvacetistěnu, a obě tato tělesa nechť jsou vepsána v touže kouli; střed kruhu budiž O, poloměr AO, a tento rozdělme v bodu B v poměru vnějším a středním, OB nechť jest část větší, a pak jest táž zajisté strana desetiúhelníku v týž kruh vepsaného (XIII.5.9.). Budiž C hrana dvaceti-, D dvanáctistěnu a E hrana krychle; jest tedy C strana stejnostranného trojúhelníku, D strana stejnostranného pětiúhelníku v týž kruh vepsaného, a D jest větší nežli větší část přímky E rozdělené v poměru vnějším a středním (XIII.18.17.důsl.).

Je-li však C strana stejnostranného trojúhelníku jest její čtverec roven trojnásobnému čtverci poloměru AO (XIII.12.), tedy $\underline{C}^2 = 3\,\underline{AO}^2$, a též

$$(\underline{AO} + \underline{AB})^2 = 3\,\underline{BO}^2 \text{ (XIII.4.), tedy}$$

$$\underline{C}^2 : (\underline{AO} + \underline{AB})^2 = \underline{AO}^2 : \underline{BO}^2, \text{ avšak}$$

$$\underline{AO}^2 : \underline{BO}^2 = \underline{E}^2 : \underline{D}^2 \text{ (XIV.7.), porovnáním}$$

$$\underline{C}^2 : (\underline{AO} + \underline{AB})^2 = \underline{E}^2 : \underline{D}^2, \text{ nebo výměnou}$$

$$\underline{E}^2 : \underline{C}^2 = \underline{D}^2 : (\underline{AO} + \underline{AB})^2.$$

Čtverec strany pětiúhelníku rovná se však součtu čtverců poloměru a strany desetiúhelníku, pročež $\underline{D}^2 = \underline{AO}^2 + \underline{BO}^2$, což dosazeno dá

$$\underline{E}^2 : \underline{C}^2 = (\underline{AO}^2 + \underline{BO}^2) : (\underline{AO} + \underline{AB})^2.$$

Avšak má se vůbec $(\underline{AO}^2 + \underline{BO}^2) : (\underline{AO} + \underline{AB})^2$ jako součet čtverce dovolné přímky sečené v poměru vnějším a středním a čtverce části její větší k součtu čtverce téže celé přímky a čtverce části její menší (XIV.7.), a proto

$\underline{E}^2 : \underline{C}^2 =$ čtverec dovolné přímky sečené v poměru vnějším a středním + čtverec části její větší k čtverci téže celé přímky + čtv. části její menší. $\underline{E}$ jest hrana krychle, $\underline{C}$ hrana dvacetistěnu a proto atd. j. b. t.

Věta 6.

Nechť se dovodí, že se má hrana krychle k hraně dvacetistěnu jako dvanáctistěn k dvacetistěnu.

Poněvadž kruhy sobě rovné zaujímají pětiúhelník dvanáctistěnu a trojúhelník dvacetistěnu, jsou-li obě tělesa v touže kouli vepsána, a v této stejné kruhy vůbec stejně jsou daleko od jejího středu, jelikož kolmice spuštěné z tohoto na ony jsou si rovny (XIV.2.): budou tedy i ony kolmice sobě rovny, které ze středu koule spustíme do středu sobě rovných kruhů, z nichž v jednom vepsán jest pětiúhelník dvanácti- a v druhém trojúhelník dvacetistěnu. A rovněž i jehlany vepsané v touže kouli, z nichž jeden má za půdici pětiúhelník onoho dvanácti- a druhý trojúhelník dvacetistěnu budou míti stejné výšky. Jehlany o stejných výškách mají se však k sobě jako jejich půdice (XII.5.6.), pročež v téže kouli má se

onen pětiúhelník : trojúhelníku = jehlan s půdicí pětiúhelníkem : jehlanu s půdicí trojúhelníkem, mají-li společný vrchol ve středu koule. A proto se má též 12 pětiúhelníků : 20 trojúhelníkům = 12 jehlanů s půdicemi pětiúhelníky : 20 jehlanům s půdicemi trojúhelníky. Avšak 12 pětiúhelníků rovná se povrchu dvanáctistěnu a 20 trojúhelníků povrchu dvacetistěnu, a proto se má

povrch dvanácti- : povrchu dvacetistěnu = 12 jehlanů majících za půdice pětiúhelníky : 20 jehlanům majících za půdice trojúhelníky.

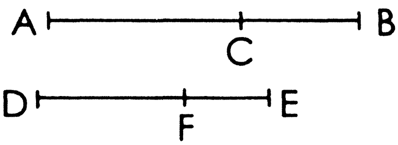
Dvanáct jehlanů majících společný vrchol v středu koule a za půdice pětiúhelníky pravidelné a sobě rovné tvoří dvanáctistěn, a dvacet jehlanů majících týž společný vrchol a za půdice pravidelné a sobě rovné trojúhelníky tvoří dvacetistěn, pročež má se

povrch dvanácti- : povrchu dvacetistěnu = dvanácti- : dvacetistěnu.

Avšak povrch dvanácti- : povrchu dvacetistěnu = hrana krychle k hraně dvacetistěnu (XIV.4.), tedy atd. j. b. t.

Věta 7.

Rozdělíme-li dvě přímky v poměru vnějším a středním mají se přímky ty k sobě jako jejich částí. (Obr. 476.).



Obr. 476.

Rozdělme $\underline{AB}$ v bodu $\underline{C}$, a $\underline{DE}$ v bodu $\underline{F}$ v poměru vnějším a středním, větší částʼ první budiž $\underline{AC}$, a druhé $\underline{DF}$; tvrdí se:

$$\underline{AB} : \underline{AC} = \underline{DE} : \underline{DF}.$$

Neboť obd. z $\underline{AB}$, $\underline{BC} = \underline{AC}^2$ a

$$\text{obd. z } \underline{DE}, \underline{EF} = \underline{DF}^2 \text{ (VI.17.), tedy}$$

$$\text{obd. z } \underline{AB}, \underline{BC} : \underline{AC}^2 = \text{obd. z } \underline{DE}, \underline{EF} : \underline{DF}^2, \text{ nebo (V.15.)}$$

$$4 \text{ obd. z } \underline{AB}, \underline{BC} : \underline{AC}^2 = 4 \text{ obd. z } \underline{DE}, \underline{EF} : \underline{DF}^2,$$ součet 1. a 2. členu k 2. atd

$$(4 \text{ obd. z } \underline{AB}, \underline{BC} + \underline{AC}^2) : \underline{AC}^2 = (4 \text{ obd. z } \underline{DE}, \underline{EF} + \underline{DF}^2) : \underline{DF}^2, \text{ z čehož}$$

$$(\underline{AB} + \underline{BC})^2 : \underline{AC}^2 = (\underline{DE} + \underline{EF})^2 : \underline{DF}^2 \text{ (II.8.), nebo pouhé}$$ přímky

$$(\underline{AB} + \underline{BC}) : \underline{AC} = (\underline{DE} + \underline{EF}) : \underline{DF} \text{ (VI.22.), součtem}$$

$$(\underline{AB} + \underline{BC} + \underline{AC}) : \underline{AC} = (\underline{DE} + \underline{EF} + \underline{DF}) : \underline{DF} \text{ čili}$$

$$2\,\underline{AB} : \underline{AC} = 2\,\underline{DE} : \underline{DF}, \text{ z čehož též}$$

$$\underline{AB} : \underline{AC} = \underline{DE} : \underline{DF} \text{ j. b. t.}$$

Důsledek.

Dosud tedy vůbec bylo ukázáno: seče-li se kterákoli přímka v poměru vnějším a středním, má se čtverec celé přímky a části větší k čtverci celé přímky a části menší jako hrana krychle k hraně dvacetistěnu (XIV.5.); strana krychle má se k hraně dvacetistěnu jako povrch dvanáctistěnu k povrchu dvacetistěnu, jsou-li obě tělesa v touž kouli vepsána (XIV.5.); dále pak: povrch dvanáctistěnu má se k povrchu dvacetistěnu, jako dvanáctistěn k dvacetistěnu, pak-li pětiúhelník onoho a trojúhelník tohoto v týž kruh vepsány byly (XIV.6.). Z toho jde: dvanáctistěn má se k dvacetistěnu v touž kouli vepsanému jako se má čtverec celé přímky a části větší k čtverci celé přímky a části menší, je-li přímka ta rozdělena v poměru vnějším a středním. A poněvadž se má dvanáctistěn k dvacetistěnu jako povrch onoho k povrchu tohoto, čili jako hrana krychle k hraně dvacetistěnu, avšak hrana krychle má se k hraně dvacetistěnu jako čtverec celé přímky a její části větší k čtverci téže přímky a části menší, je-li celá přímka rozdělena v poměru vnějším a středním: proto má se dvanáctistěn k dvacetistěnu v touže kouli vepsanému, jako se má čtverec celé přímky a části větší k čtverci téže přímky a části menší, je-li přímka ta rozdělena v poměru vnějším a středním.[5]

[5] Soudí se vůbec, že důsledek tento, ačkoli se nalézá ve všech rukopisech řeckých, se vynechati může. Pařížské vydání z r. 1598 nemá ani věty V., VI. a VII.