

Počátky počtu pravděpodobnosti

II. část: Christian Huygens: „De ratiociniis in ludo aleæ“. Text a překlad

In: Karel Mačák (author): Počátky počtu pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Prometheus, 1997.
pp. 41–65.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401659>

Terms of use:

© Mačák, Karel

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

II/2

CHRISTIAN HUYGENS:

O výpočtech v hazardní hře

(De ratiociniis in ludo aleæ)

Text a překlad

CHRISTIANUS HUGENIUS
Clarissimo Viro, D. FRANCISCO SCHOTENIO
S.D.

Cum in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quam latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeo tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchræ subtilissimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis visum iri confido, quam quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquanto plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinèere, adeo ut a primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematis pulchrè nobis convenire sæpenumero expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, omissa tamen analysi, cum quod prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quod relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

CHRISTIAN HUYGENS
pozdravuje přeslavného muže,
PANA FRANCISCA SCHOOTENA.

Protože vím, přeslavný muži, že jsi ve vydání nejušlechtlejších podob svého ducha, které máš nyní v rukou, mezi jiným mířil k tomu, abys ukázal rozličností věcí, jejichž pojednávání jsi započal, jak široko se rozprostírá božská věda analýza, snadno chápu, že tvému předsevzetí může prokázat mnohé služby také to, co jsme sepsali o výpočtech náhody; oč méně se totiž jevílo možné postihnout rozumovými pojmy to, co je nahodilé, jakož i nejisté, tím podivuhodnější bude shledána věda, které dokonce i toto podléhá. Protože tedy na tvé přání jsem se pustil do prvního výkladu těchto věcí a ty je shledáváš hodnými toho, aby vyšly společně s tvými nejjemnějšími objevy, nejenom že ti v tom nebudou odporovat, ale domnívám se dokonce, že je mi ku prospěchu dostat se do rukou lidí právě tímto způsobem. Byť bych se jinak mohl jevit jako člověk věnující se věci lehké a nevážné, přece nebude považováno za naprosto neužitečné a bez jakékoli hodnoty to, co jsi přijal do své práce a s velkým úsilím přeložil z naší národní řeči do latiny. Nicméně nepochybují, že začal-li by někdo hlouběji zkoumat to, co vykládáme, okamžitě by shledal, že se nejedná - jak se zdá - o zábavu, ale o výklad bohatých a nejjemnějších zásadních úvah. A věřím, že problémy, které jsou takto předkládány, nebudou shledány o nic méně hlubokými než ony obsažené v Diofantových knihách, ale budou poskytovat mnohem více požitku, protože nejsou omezeny jako ony na pouhé číselné úvahy. Aby mi někdo nepřičkl nezaslouženou slávu prvního objevu této věci, je třeba vědět, že tento počet byl již před časem probírán mezi nejpřednějšími francouzskými geometry. Ale oni, zvyklí cvičit se navzájem těmi nejobtížnějšími otázkami, drželi své metody v tajnosti, takže jsem byl nucen rozvíjet tuto látku od prvopočátků. Pročež stále ještě nevím, zda používají principu shodného s mým, avšak při řešení problémů nám (můj princip) dobře vyhovuje, jak jsem přechoasto vyzkoušel. Shledáš, že mnohé z těchto problémů jsem připojil na konci díla, avšak s vynechanými řešeními, jak proto, že by vyžadovalo příliš mnoho práce, kdybych chtěl všechna jasně vyložit, tak proto, že se mi jevílo vhodné nechat něco k procvičení našim čtenářům, budou-li jací. Buď zdrav!

V Haagu
27. dubna 1657.

DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEÆ.

Etsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, plurésve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihique optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

PROPOSITIO I.

Si a vel b expectem, quorum utrumvis æquè facilitè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solùm demonstrandam, verùm etiam primitùs eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x , ac ut victor victo traditurus sit a . Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a , si lusum perdam scilicet; aut $2x - a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a .

O VÝPOČTECH V HAZARDNÍ HŘE.

I když výsledky her řízených pouze losem bývají nejisté, přece v nich lze vždy přesně stanovit, o kolik je kdo blíže k vítězství než k porážce. Kdyby se například někdo sázel, že hodí šestku prvním hodem jednou kostkou, pak je sice nejisté, zda vyhraje, ale samotnou věcí je dáno, kolikrát je pravděpodobnější, že prohraje než že vyhraje, a lze to vypočítat. Rovněž kdybych s někým hrál za podmínky, že vítězství spočívá ve třech (vyhraných) hrách, a já bych už jednu vyhrál, stále ještě je nejisté, který z nás dvou se stane vítězem třetí. Avšak zcela spolehlivým výpočtem lze vystihnout, jak má být oceněno mé očekávání proti jeho očekávání, a z toho také určit, kolikrát větší část toho, co je vsazeno, by měla být přiřknuta mně než mému protivníkovi, kdybychom se dohodli nechat (hru) nedokončenou, nebo za jakou cenu by bylo spravedlivé prodat mé místo a mou sázku, kdyby si někdo přál vystřídat mě. Také odtud mohou vzniknout nesčetné otázky (týkající se her) mezi dvěma, třemi nebo více hráči. A protože tento výpočet není nijak běžný a jeho použití je často prospěšné, krátce zde popíšu, jakého výpočtu či postupu má být použito, a pak ještě vyložím, co se výhradně kostek týče.

Všude však budu používat tohoto základu ¹ : je samozřejmé, že v hazardní hře je třeba něčí šanci nebo očekávání zisku ocenit tak vysoko, že s tímto oceněním by mohl při hře za stejných podmínek dospět znovu k podobné ² šanci nebo očekávání. Kdyby někdo například bez mého vědomí ukrýval v jedné ruce tři a ve druhé ruce sedm zlatých a nechal by na mé volbě, ze které ruky bych chtěl zlaté, pravím, že by to pro mě znamenalo právě tolik, jako kdyby mi dal pět zlatých. Neboť mám-li pět zlatých, mohu znovu dojít k tomu, že dosáhnu stejného očekávání na získání tří nebo sedmi zlatých, a to při stejných podmínkách hry.

TVRZENÍ I.

Jestliže bych očekával a nebo b , které bych obě mohl získat stejně snadno, pak je třeba říci, že mé očekávání má hodnotu $\frac{a+b}{2}$.

Aby toto pravidlo bylo nejen dokázáno, ale také od základů odvozeno, označím x to, co má stejnou hodnotu, jako mé očekávání; má být možné, mám-li x a hraji-li za stejných podmínek, že dosáhnu zase podobného očekávání. Předpokládejme tedy hru, ve které s někým hraji za podmínky, že každý vsadí x a že vítěz má poraženému odevzdat a . Tato hra je spravedlivá a je zřejmé, že za tohoto stavu mám stejnou šanci na získání a , totiž když hru prohraji, nebo $2x - a$, když vyhraji: vždyť potom dostanu $2x$, totiž to, co bylo vloženo, a dru-

¹Smysl následujícího ne zcela jasného odstavce se stane jasnějším v posledním odstavci tvrzení I.

²V originálu je „*ad similem* ...“, ale fakticky je míněno „*ke stejné* ...“; tato formulace se bude v dalším textu ještě několikrát opakovat.

Quòd si autem $2x - a$ tantundem valeret atque b , æqua mihi sors obtingeret ad a quàm ad b . Pono itaque $2x - a = b$, & fit $x = \frac{a+b}{2}$, pro valore mea expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus a . Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a , si perdam, aut ad obtinendum b , si vincam; tum enim obtineo $a + b$, id nempe quod depositum est, alterique inde concedo a .

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lusus omnino justus, & patet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam, aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque nostrum trium deponat x , & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b , & ego ipsi traditurus sim b , si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c , aut ego ipsi sim daturus c , si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione sortem habebō ad obtinendum b , si nimirum primus vincat, aut c , si secundus vincat, aut etiam $3x - b - c$ si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b , & alteri c . Quòd si $3x - b - c$ æquale fuerit ipsi a , eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a , quæ ad b , aut ad c . Pono itaque $3x - b - c = a$, & fit $x = \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a , b , c , aut d æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

PROPOSITIO III.

*Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, sit p, numerus autem casuum quibus mihi eveniet b sit q, sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+qb}{p+q}$.*³

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu.

³V originálu je na tomto místě zřejmá tisková chyba, protože zlomek je zapsán jako $\frac{pa+pq}{p+q}$.

hému z toho musím vyplatit a .

Kdyby ale $2x - a$ mělo stejnou hodnotu jako b , měl bych stejnou šanci na (získání) a jako na (získání) b . Položím tedy $2x - a = b$ a bude $x = \frac{a+b}{2}$ pro hodnotu mého očekávání. Což lze snadno dokázat. Vždyť mám-li $\frac{a+b}{2}$, mohu hrát s někým, kdo také chce vsadit $\frac{a+b}{2}$, za podmínky, že vítěz poraženému má odevzdat a . Za této situace budu mít podobné očekávání získat a , když prohrají, nebo získat b , když vyhraji; vždyť potom dostávám $a + b$, totiž to, co bylo vsazeno, a druhému ponechám a .

V číslech. Jestliže bych měl stejnou šanci na (získání) 3 nebo 7, pak mé očekávání má podle tohoto tvrzení hodnotu 5; a je jisté, že mám-li 5, mohu znovu dospět k témuž očekávání. Jestliže bych totiž s někým hrál a vsadil 5, a on by podobně vsadil 5 za podmínky, že vítěz má druhému dát 3, pak tato hra bude zcela spravedlivá a je zřejmé, že mám stejnou šanci na získání 3, když prohrají, nebo 7, když vyhraji: protože tehdy dostanu 10, z čehož druhému dám 3.

TVRZENÍ II.

Kdybych očekával a , b nebo c , z nichž každé bych mohl získat stejně snadno, pak je třeba ocenit mé očekávání $\frac{a+b+c}{3}$.

Aby to bylo zjištěno, předpokládejme, jako v předchozím případě, že hodnota mého očekávání je x . Má tedy být možné, mám-li x , že ve spravedlivé hře dosáhnu téhož očekávání. Předpokládejme hru, ve které hraji se dvěma dalšími za podmínky, že každý z nás tří vsadí x a že se s jedním dohodnu, že mi dá b , když vyhraje, a já mu odevzdám b , když vyhraji. S druhým se však dohodnu, že když on vyhraje, odevzdá mi c , nebo já mu odevzdám c , když vyhraji. Tato hra je zřejmě spravedlivá. Za tohoto stavu budu mít stejnou šanci na získání b , když totiž vyhraje první, nebo c , když vyhraje druhý, nebo také $3x - b - c$, když vyhraji já; pak totiž obdržím $3x$, které jsou vsazeny, z nichž jednomu odevzdám b a druhému c . Protože kdyby bylo $3x - b - c$ rovno onomu a , měl bych stejné očekávání získat a jako b nebo c . Položím tedy $3x - b - c = a$ a bude $x = \frac{a+b+c}{3}$ pro hodnotu mého očekávání. Stejným způsobem se zjistí, že mám-li stejnou šanci na získání a , b , c nebo d , bude mít (mé očekávání) hodnotu $\frac{a+b+c+d}{4}$. A tak dále.

TVRZENÍ III.

Jestliže by počet případů, v nichž mi připadne a , byl roven p , ale počet případů, v nichž mi připadne b , byl roven q , pak za předpokladu, že všechny případy jsou stejně možné, mé očekávání bude mít hodnotu $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Aby toto pravidlo bylo nalezeno, předpokládejme opět, že hodnota mého očekávání je x : má tedy být možné, mám-li x , že ve spravedlivé hře dosáhnu stejně jako v předchozím případě téhož očekávání.

Ad hoc autem tot collusores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p + q$ efficiant, quorum deponat quisque x , ita ut depositum sit $px + qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q , sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b , aut ego contra ipsi idem b , si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p - 1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a , & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationis habere ad b , & $p - 1$ expectationes ad a , & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px + qx - bq - ap + a$, tunc enim obtineo $px + qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p - 1$ lusorum, quæ simul conficiunt $bq + pa - a$. Si itaque $qx + px - bq - ap + a$ ⁴ æquale esset ipsi a , haberem p expectationes ad a , (quandoquidem jam $p - 1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b , & sic ad priorem meam expectationem rursus pervenissem. Quocirca porrò $px + qx - bq - ap + a = a$, & fit $x = \frac{ap + bq}{p + q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusum justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi reliquatur 13.

PROPOSITIO IV.

Ut igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est ut a facillioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de qua certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò considerare oportet lusum, qui utrobique deficiunt. Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depositum est lucretur is, qui priùs vigesies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò

⁴V originálu je na tomto místě zřejmá tisková chyba, protože je zde psáno $qx + bx - bq - ap + a$.

K tomu předpokládám tolik hráčů, aby se mnou tvořili počet rovný právě $p + q$, z nichž každý vsadí x , takže bude vsazeno $px + qx$, a všichni mají stejné podmínky k vítězství. Pak s tolika z těchto hráčů, kolik odpovídá číslu q , jednotlivě uzavřu dohodu, že ten z nich, který vyhraje, mi dá b , a já mu naopak dám b , když vyhraji. Podobně se s ostatními hráči, jejichž počet je $p - 1$, jednotlivě dohodnu na podmínce, že ten z nich, který vyhraje, mi dá a , a já mu dám právě tolik (tj. a), když vyhraji. A zřejmě je tato hra za této podmínky spravedlivá, neboť nikdo netrpí bezprávím. Pak zřejmě mohu q -krát očekávat b , $(p - 1)$ -krát očekávat a a jednou očekávat (když sám vyhraji) $px + qx - bq - ap + a$, neboť tehdy obdržím $px + qx$, které bylo vsazeno, z čehož jsem povinen předat b každému z q hráčů a a každému z $p - 1$ hráčů, což celkem dá $bq + pa - a$. Kdyby tedy $qx + px - bq - ap + a$ bylo rovno a , mohl bych p -krát očekávat a (protože $p - 1$ očekávání na ně jsem už měl) a q -krát očekávat b , a tak bych se mohl dostat zpět ke svému dřívějšímu očekávání. Pročež dále $px + qx - bq - ap + a = a$ a bude $x = \frac{ap + bq}{p + q}$ pro hodnotu mého očekávání, tak jak bylo na začátku předpokládáno.

Číselný příklad. Kdybych mohl třikrát očekávat 13 a dvakrát očekávat 8, měl bych podle tohoto pravidla právě 11. A snadno lze ukázat, že měl-li bych 11, mohl bych opět dospět ke stejnému očekávání. Hraji-li totiž proti čtyřem jiným a každý z nás pěti vloží 11, se dvěma z nich jednotlivě uzavřu dohodu, že ten z nich, který vyhraje, mi dá 8, nebo já jemu 8, když vyhraji. Podobně se dvěma zbývajícími, že každý z nich mi dá 13, když vyhraje, nebo já jemu právě tolik, když vyhraji. Což je zajisté spravedlivá hra. A zřejmě přitom mohu dvakrát očekávat 8, totiž když vyhraje jeden z těch, kteří mi slíbili 8, a třikrát očekávat 13, totiž když vyhraje jeden ze zbývajících dvou, kteří mi mají odevzdat 13, nebo když já sám hru vyhraji: když totiž vyhraji hru, získám, co je vsazeno, to jest 55, z čehož každému ze dvou musím odevzdat 13 a každému ze dvou zbývajících 8, takže i mně zbude 13.

TVRZENÍ IV.

Abychom tedy přistoupili k otázce na začátku ohlášené, totiž o rozdělení mezi různé spoluhráče, jsou-li jejich šance nestejně, je třeba, abychom začali od snadnějších.

Předpokládejme tedy, že s někým hraji za takové podmínky, že to, co je vsazeno, získává ten, kdo první třikrát vyhraje, a já jsem už dvakrát vyhrál, zatímco druhý jen jednou. Chci vědět, kolik by mi připadlo, kdybychom nechtěli ve hře pokračovat, ale chtěli bychom spravedlivě rozdělit peníze, o které hraje.

Nejprve je třeba posoudit hry, které oběma stranám chybějí. Je totiž jisté, že kdybychom se například dohodli, že vsazenou částku získává ten, kdo první vyhraje dvacetkrát, a já bych vyhrál devatenáctkrát, zatímco druhý osmnáct-

meliorem fore eo casu sortem meam quantò hîc melior est, ubi à tribus lusibus binos consequutus sum, ille verrò unam duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo lusus sed ipsi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerum impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur a . Quod si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque sors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifestum autem est me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipsum per I^{mam} Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est, $\frac{3}{4}a$, habèrem; & relinquitur alteri meo collusori $\frac{1}{4}a$, quæ ipsius portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde semper tria contra unum deponere eum posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquam alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

*Ponamus unum mihi deficere ludum & collusori meo tres lusus.
Oportet hîc facere distributionem.*

Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego vel ipse primum vinceret lusum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est, a ; quòd si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi duo lusus & mihi unus; ac proinde in eodem statu essemus, qui in præcedenti Propositione positus fuit, mihi que obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum est, per I^{mam} Propositionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ collusori meo; ita ut mea sors ad sortem illius se habeat, sic ut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requisitus est præcedens, ita rursus hicce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere & collusori meo 4^{or} lusus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ istius quod depositum est, & ipsi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo tres lusus.

Fiet itaque primo lusu; vel ut mihi unus lusus deficiat & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique nostrum adhuc duo lusus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem sic utrique æqua sors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua sit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per I^{mam} Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

krát, pak moje šance bude o tolik lepší než jeho, o kolik je lepší, když jsem získal dvě hry ze tří, zatímco on jen jednu: v obou případech mně totiž chybí jen jedna hra, ale jemu dvě.

Pak ke zjištění toho, jaká část každému přísluší, je třeba věnovat pozornost tomu, co by se stalo, kdybychom ve hře pokračovali. Je totiž jisté, že kdybych vyhrál první hru, splnil bych předepsaný počet a získal bych vše, co je vloženo, což označíme a . Kdyby však vyhrál první hru druhý, pak by se vyrovnaly šance obou (protože oběma by ještě chybělo po jedné hře), a tak by každému připadlo $\frac{a}{2}$. Je však zřejmé, že v první hře mám stejnou šanci na výhru nebo prohru, takže nyní mohu očekávat stejně a nebo $\frac{a}{2}$: což podle prvního tvrzení je právě tolik, jako kdybych měl polovinu obou šancí, to jest $\frac{3}{4}a$, a mému spoluhráči bude zbývat $\frac{1}{4}a$, kterýžto podíl bylo možné spočítat hned na začátku stejným způsobem. A odtud je zřejmé, že kdo by chtěl převzít mou hru, musí mi za to dát $\frac{3}{4}a$; stejně tak vždy může vsadit tři proti jedné ten, kdo by se sázel, že vyhraje jednu hru dříve, než druhý vyhraje dvě.

TVRZENÍ V.

*Předpokládejme, že mně chybí jedna hra a mému spoluhráči tři hry.
Má se zde provést rozdělení.*

Podívejme se opět, v jakém bychom byli stavu, kdybych já nebo on vyhrál první hru. Kdybych já vyhrál, obdržel bych vsazené, to jest a ; kdyby však on vyhrál první hru, chyběly by mu dvě hry a mně jedna, takže bychom byli v tomtéž stavu, jaký nastal v předešlém tvrzení, a mně by tedy připadlo $\frac{3}{4}a$, jak tam bylo dokázáno. Tedy stejně snadno mi může připadnout buď a nebo $\frac{3}{4}a$, což je podle prvního tvrzení tolik, jako $\frac{7}{8}a$. A mému spoluhráči zbude $\frac{1}{8}a$, takže poměr mé šance k jeho šanci je 7 ku 1.

Avšak stejně, jak podle tohoto výpočtu bylo nalezeno předešlé, tak může posloužit i k dalšímu: když totiž předpokládáme, že mně chybí jedna hra a mému spoluhráči čtyři hry. A týmž způsobem se zjistí, že mně přísluší $\frac{15}{16}$ toho, co bylo vsazeno, a jemu $\frac{1}{16}$.

TVRZENÍ VI.

Předpokládejme, že mně chybějí dvě hry a mému spoluhráči tři hry.

Bude tedy provedena první hra; buď mi pak chybí jedna hra a jemu tři (a podle předešlého tvrzení mi připadne $\frac{7}{8}a$), nebo pak každému z nás chybějí dvě hry a mně tedy bude příslušet $\frac{1}{2}a$, protože oba budeme mít stejnou šanci. Pro mě je však stejně snadné první hru vyhrát nebo prohrát, takže mám stejnou naději na získání $\frac{7}{8}a$ nebo $\frac{1}{2}a$, což pro mě má hodnotu $\frac{11}{16}a$ podle prvního tvrzení. A přísluší mi 11 dílů toho, co je vsazeno, a mému spoluhráči 5 dílů.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi sors obtingat ad $\frac{15}{16}a$ aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per I^{mam} Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4^{tam} Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quàm $\frac{13}{16}a$.

PROPOSITIO VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a . Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberet $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad a , una ad 0, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facillè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2^{dam} Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

PROPOSITIO IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusu deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A , B , & C , & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus. Invenire oportet, quid ipsi B , ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q .

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A , vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur 0. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8^{vam} Propositionem.

TVRZENÍ VII.

Předpokládejme, že mně chybí dvě hry a mému spoluhráči čtyři.

Stane se tedy, že vyhrají-li první hru, měl bych vyhrát ještě jednu hru a druhý čtyři; nebo, když ji prohrají, dvě a on tři. Měl bych tedy stejnou šanci na (získání) $\frac{15}{16}a$ nebo $\frac{11}{16}a$, což má hodnotu $\frac{13}{16}a$ podle prvního tvrzení. Odtud je zřejmé, že lepší šanci má ten, kterému chybějí k vítězství dvě hry, zatímco druhému čtyři, než ten, komu chybí jedna hra, zatímco druhému dvě. V tomto druhém případě (tedy v případě 1 ku 2) je totiž můj podíl podle čtvrtého tvrzení $\frac{3}{4}a$, což je méně než $\frac{13}{16}a$.

TVRZENÍ VIII.

Nyní však předpokládejme, že jsou tři hráči, z nichž prvnímu a druhému chybí po jedné hře, zatímco třetímu dvě hry.

Aby tedy byl zjištěn podíl prvního, je třeba opět věnovat pozornost tomu, co by mu příslušelo, kdyby buď on nebo někdo ze zbývajících dvou vyhrál první hru. Kdyby on vyhrál, měl by, co bylo vsazeno, to jest a . Kdyby vyhrál druhý, první by neměl nic, protože druhý by tím ukončil hru. Kdyby však vyhrál třetí, pak každému ze tří by stále chyběla jedna hra, a proto jak prvnímu, tak zbývajícím dvěma by příslušela $\frac{1}{3}a$. První tedy bude moci jednou očekávat a , jednou 0 a jednou $\frac{1}{3}a$ (protože každý ze tří může v první hře stejně snadno dosáhnout vítězství), což podle druhého tvrzení má pro něho hodnotu $\frac{4}{9}a$. Podobně druhý bude mít $\frac{4}{9}a$, a třetímu zbývá $\frac{1}{9}a$. Jeho podíl bylo také možno stanovit zvlášť a odtud stanovit podíly ostatních.

TVRZENÍ IX.

Abychom mohli vypočítat podíl každého hráče při libovolně mnoha hráčích, z nichž některému chybí více a jinému méně her, je třeba uvážít, co náleží hráči, jehož podíl má být stanoven, když on sám nebo nějaký jiný hráč vyhraje následující hru. Sečtou-li se takto získané části dohromady a dělí-li se tento součet počtem hráčů, obdrží se hledaný podíl dotyčného hráče.

Předpokládejme, že jsou tři hráči A , B a C , a hráči A chybí jedna hra, hráči B dvě hry a hráči C také dvě hry. Má být zjištěno, kolik přísluší hráči B z toho, co bylo vloženo a co je označeno q .

Nejprve je třeba vyšetřit, kolik by příslušelo hráči B , kdyby první následující hru vyhrál buď on, nebo hráč A , nebo hráč C .

Kdyby A vyhrál, ukončil by (tím) hru a v důsledku toho by hráči B příslušela 0. Kdyby B vyhrál, chyběla by mu stále ještě jedna hra a hráči A také jedna hra, ale hráči C dvě hry. Pročež by hráči B v tomto případě příslušely $\frac{4}{9}q$ dle osmého tvrzení.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8^{vam} . Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, 0 , $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3 , numerum collusorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsita pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2^{da} Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum 0 , $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2^{dam} Propositionem tantundem ac $\frac{0+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$, id est, $\frac{5}{27}q$. Et certum est, hunc divisorem 3 esse numerum collusorum.

Ut autem inveniatur, quid cuiquam debeatur in quolibet casu, videlicet si vel ipse vel aliquis reliquorum primum sequentem ludum vincat: oportet simpliciores casus primò investigare, & horum medio sequentes. Nam sicut hic ultimus casus solvi non potuit priusquam ille octavæ Propositionis calculo subductus esset, in quo deficientes lusus erant $1, 1, 2$, ita etiam cujusque pars supputari nequit in tali casu, ubi deficientes lusus sunt $1, 2, 3$, quin primùm calculo subductus sit casus deficientium lusuum $1, 2, 2$, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo lusus deficientes sunt $1, 1, 3$; qui similiter per 8^{vam} Propositionem supputari potuisset. Atque hoc quidem pacto consequenter supputare licet casus omnes, qui in sequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 collusoribus.

Lusus, qui ipsis deficient.	1, 1, 2	1, 2, 2	1, 1, 3	1, 2, 3	1, 1, 4
Eorum partes.	4, 4, 1	17, 5, 5	13, 13, 1	19, 6, 2	40, 40, 1
	9	27	27	27	81

Lusus, qui ipsis deficient.	1, 1, 5	1, 2, 4	1, 2, 5	1, 3, 3
Eorum partes.	121, 121, 1	178, 58, 7	542, 179, 8	65, 8, 8
	243	243	729	81

Lusus, qui ipsis deficient.	1, 3, 4	1, 3, 5	2, 2, 3	2, 2, 4
Eorum partes.	616, 82, 31	629, 87, 13	34, 34, 13	338, 338, 53
	729	729	81	729

Lusus, qui ipsis deficient.	2, 2, 5	2, 3, 3	2, 3, 4	2, 3, 5
Eorum partes.	353, 353, 23	133, 55, 55	451, 195, 83	1433, 635, 119
	729	243	729	2187

Konečně kdyby C vyhrál první následující hru, pak by hráčům A i C chybělo po jedné hře, ale hráči B dvě hry, a v důsledku toho by hráči B příslušela $\frac{1}{9}q$ dle téhož osmého tvrzení. Nyní však je třeba shrnout do jednoho součtu to, co v těchto třech případech přísluší hráči B , totiž $0, \frac{4}{9}q, \frac{1}{9}q$, čehož součet je $\frac{5}{9}q$. Je-li to děleno počtem hráčů 3, dostaneme $\frac{5}{27}q$, což je hledaný podíl hráče B . Důkaz toho je zřejmý z druhého tvrzení. Protože totiž B má stejnou šanci na získání $0, \frac{4}{9}q$, nebo $\frac{1}{9}q$, má podle druhého tvrzení právě tolik jako $\frac{0 + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q}{3}$, to jest $\frac{5}{27}q$. Zřejmě dělitel 3 je počet spoluhráčů.

Aby však bylo zjištěno, kolik přísluší komukoli v kterémkoli případě, když buď sám nebo někdo ze zbývajících vyhraje první následující hru, je třeba nejprve vyšetřovat jednodušší případy, jejich prostřednictvím pak další. Neboť tak jako zde nemohl být vyřešen poslední případ, dokud nebyl proveden výpočet v osmém tvrzení, kde počet chybějících her byl 1, 1, 2, tak také není možné vypočítat podíl každého hráče v takovém případě, kdy počet chybějících her je 1, 2, 3, než že je dříve vypočítán případ s počty chybějících her 1, 2, 2, což jsme už učinili, a kromě toho případ, ve kterém počty chybějících her jsou 1, 1, 3, což by bylo možné vypočítat podobně podle osmého tvrzení. A dále lze ovšem stejným způsobem vypočítat všechny případy shrnuté v následující tabulce a nekonečně mnoho jiných.

Tabulka pro 3 spoluhráče

Hry, které jim chybí.	1, 1, 2	1, 2, 2	1, 1, 3	1, 2, 3	1, 1, 4
Jejich podíly.	4, 4, 1	17, 5, 5	13, 13, 1	19, 6, 2	40, 40, 1
	9	27	27	27	81

Hry, které jim chybí.	1, 1, 5	1, 2, 4	1, 2, 5	1, 3, 3
Jejich podíly.	121, 121, 1	178, 58, 7	542, 179, 8	65, 8, 8
	243	243	729	81

Hry, které jim chybí.	1, 3, 4	1, 3, 5	2, 2, 3	2, 2, 4
Jejich podíly.	616, 82, 31	629, 87, 13	34, 34, 13	338, 338, 53
	729	729	81	729

Hry, které jim chybí.	2, 2, 5	2, 3, 3	2, 3, 4	2, 3, 5
Jejich podíly.	353, 353, 23	133, 55, 55	451, 195, 83	1433, 635, 119
	729	243	729	2187

De tesseris ¹

Quod ad tesseras attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt: videlicet, quotâ vice unâ tesserâ senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos senarios duabus tesseris, aut tres senarios tribus tesseris jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones. Ad quas solvendas advertendum est.

Primò unius tesseræ sex esse jactus diversos, quorum quivis æquè facillè eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam.

Porrò duarum tesseractarum 36 esse diversos jactus, quorum similiter quivis æquè facillè obtingere potest. Nam ratione cujusque jactus unius tesseræ potest unus sex jactuum alterius tesseræ simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactus.

Item trium tesseractarum esse 216 jactus diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesseractarum potest unus sex jactuum, qui in 3^{tia} sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactus.

Eodem modo patet, quatuor tesseractarum jactus esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulteriùs jactus quotlibet tesseractarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesseræ sexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum tesseractarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verrò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseræ vocemus *A* & *B*, patet, ad 3 puncta jacienda in *A* unum & in *B* duo, vel in *B* unum & in *A* duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in *A* quinque & in *B* sex, vel in *A* sex & in *B* quinque puncta patère posse. Quatuor punctorum tres sunt jactus, videlicet, ipsius *A* 1 & *B* 3 puncta; vel ipsius *A* 3 & *B* 1 punctum; vel ipsius *A* 2 & *B* 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4^{or} sunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5^{que} sunt jactus.

Septem punctorum 6 sunt jactus.

In tribus tesseris reperiuntur

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ vel } 18 \\ 4 \text{ vel } 17 \\ 5 \text{ vel } 16 \\ 6 \text{ vel } 15 \\ 7 \text{ vel } 14 \\ 8 \text{ vel } 13 \\ 9 \text{ vel } 12 \\ 10 \text{ vel } 11 \end{array} \right\} \text{ punctorum } \left. \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 15 \\ 21 \\ 25 \\ 27 \end{array} \right\} \text{ jactus.}$$

¹Tento titulek v Huygensovu textu není; do Huygensova textu byl zařazen Bernoullim ([7], str. 20 latinského textu). Dle našeho názoru přispívá k přehlednosti a logickému členění pojednání a proto jsme se rozhodli zařadit ho i do našeho textu.

O hře v kostky

Pokud se kostek týče, lze o nich klást tyto otázky: totiž, kolikrát je třeba zkoušet jednou kostkou hodit šestku nebo nějaký jiný počet bodů. Podobně kolikrát je třeba zkoušet dvěma kostkami hodit dvě šestky nebo třemi kostkami tři šestky. A mnohé podobné otázky, k jejichž řešení je třeba přistoupit.

Nejprve jednou kostkou je šest různých hodů, z nichž každý nastane stejně snadno. Předpokládám totiž, že kostka má tvar dokonalé krychle.

Dále dvěma kostkami je 36 různých hodů, z nichž podobně každý může nastat stejně snadno. Neboť ke každému z hodů jednou kostkou se může připojit jeden ze šesti hodů druhou kostkou. A šestkrát 6 dává 36 hodů.

Podobně třemi kostkami je 216 různých hodů. Neboť ke každému z 36 hodů dvěma kostkami se může připojit jeden ze šesti hodů, které jsou na třetí kostce. A šestkrát 36 činí 216 hodů.

Stejným způsobem je zřejmé, že počet různých hodů čtyřmi kostkami je šestkrát 216, to jest 1296; a takto lze dále spočítat hody při libovolném počtu kostek, bereme-li stále pro každou přidanou kostku šestkrát předešlý výsledek.

Dále je třeba poznamenat, že při dvou kostkách je právě jeden hod, který dá 2 nebo 12 bodů, naproti tomu ale dva hody, které dají 3 nebo 11 bodů. Když totiž kostky nazveme A a B , je zřejmé, že k tomu, aby padly 3 body, může se objevit na A jeden a na B dva body, nebo na B jeden a na A dva body. Podobně k padnutí 11 bodů se může objevit na A pět a na B šest bodů, nebo na A šest a na B pět bodů. Pro čtyři body jsou tři hody, totiž ten, při kterém je na A jeden a na B tři body, nebo ten, při kterém jsou na A tři a na B jeden bod, nebo ten, při kterém jsou na A dva a na B dva body.

Pro deset bodů jsou podobně tři hody.

Pro pět nebo devět bodů jsou čtyři hody. Pro šest nebo osm bodů je pět hodů.

Pro sedm bodů je šest hodů.

Při třech kostkách se objeví

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ nebo } 18 \\ 4 \text{ nebo } 17 \\ 5 \text{ nebo } 16 \\ 6 \text{ nebo } 15 \\ 7 \text{ nebo } 14 \\ 8 \text{ nebo } 13 \\ 9 \text{ nebo } 12 \\ 10 \text{ nebo } 11 \end{array} \right\} \text{ bodů při } \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 15 \\ 21 \\ 25 \\ 27 \end{array} \right\} \text{ hodech.}$$

PROPOSITIO X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tesserâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantùm unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur a . Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum a , sed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2^{dam} Propositionem ² tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, sors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet a . Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a ; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2^{dam} Propositionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti lusori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeo ut sors utriusque sive æstimationis expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd sors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{4651}{7776}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{31031}{46656}a$, & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inueniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut duabus tesseris 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos senarios jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, id est, ad obtinendum a ; & 35 esse casus, quibus perdat sive nihil habeat, quoniam 36 sunt jactus. Itaque habet, per 2^{dam} Propositionem, $\frac{1}{36}a$.

²V originálu je zřejmá tisková chyba, protože popsanou situaci řeší ve skutečnosti *Propositio III*. Tato chyba se ještě několikrát opakuje a v překladu je opravována bez dalších poznámek.

TVRZENÍ X.

*Zjistit, kolika hody se lze odvážit jednou kostkou hodit šest bodů.*³

Jestliže by se někdo vsadil, že prvním hodem hodí šestku, pak zřejmě je jeden případ, kdy vyhrává a dostává to, co je vloženo jako základ; naproti tomu je pět případů, kdy prohrává a nedostává nic. Je tedy 5 hodů proti němu a jen jeden pro něho. Označme a to, co je vsazeno. Může tedy jednou očekávat a , ale pětkrát 0, což má podle třetího tvrzení hodnotu $\frac{1}{6}a$. A zůstává $\frac{5}{6}a$ pro toho, kdo mu tuto příležitost nabídl. Může tedy vsadit jen 1 proti 5, kdo by chtěl uspět napoprvé.

Jestliže by se někdo vsadil, že hodí dvěma hody jednou šestku⁴, jeho šance se vypočítá následujícím způsobem. Když hodí prvním hodem šestku, obdrží a . Při jiném výsledku mu zůstává jeden hod, který má podle předešlého hodnotu $\frac{1}{6}a$. Avšak je jen jeden případ, ve kterém prvním hodem hodí 6, a pět případů, které dopadnou jinak. Je tedy od počátku jeden případ, který mu dá a , a pět, které dají $\frac{1}{6}a$, což má podle třetího tvrzení hodnotu $\frac{11}{36}a$. A tak protihráči případně zbývajících $\frac{25}{36}a$, takže šance obou čili hodnoty jejich očekávání jsou v poměru 11 ku 25, to jest méně než 1 ku 2.

Odtud se stejným způsobem výpočtu vyvozuje, že šance toho, kdo se vsadí, že třemi hody hodí jednou šestku, bude $\frac{91}{216}a$, tedy že by mohl vsadit 91 proti 125, tj. trochu méně než 3 ku 4.

Kdo se pokusí o totéž čtyřmi hody, má šanci $\frac{671}{1296}a$; mohl by tedy vsadit 671 proti 625, tj. trochu více než 1 ku 1.

Kdo se pokusí o totéž pěti hody, má šanci $\frac{4651}{7776}a$ a může vsadit 4651 proti 3125, tj. trochu méně než 3 ku 2.

Kdo se pokusí o totéž šesti hody, má šanci $\frac{31031}{46656}a$ a může vsadit 31031 proti 15625, tj. trochu méně než 2 ku 1.

A tak lze stejným způsobem vyšetřit libovolný počet hodů. Může se ale postupovat stručněji, jak bude ukázáno v následujícím tvrzení; bez toho by jinak byl výpočet mnohem rozvláčnější.

TVRZENÍ XI.

Zjistit, kolika hody se lze odvážit dvěma kostkami hodit 12 bodů.

Kdyby se někdo sázel, že hodí prvním hodem dvě šestky, pak zřejmě je jeden případ, kdy by vyhrál, to jest získal by a , a 35 případů, kdy by prohrál čili nedostal by nic, což je 36 hodů. Podle třetího tvrzení má tedy $\frac{1}{36}a$.

³Toto ne zcela jasné zadání je vysvětleno v posledním odstavci tvrzení XI, kde je řečeno, že „... jde hlavně o stanovení počtu hodů, při kterém se začínají vyrovnávat šance toho, kdo se pokouší, s šancemi toho, kdo vyzývá.“ Z textu tvrzení X a XI je zřejmé, že je zde studována úloha, při které je hráči A (z jehož hlediska je úloha řešena) nabídnuta hráčem B (vyzývatelem) sázka týkající se toho, kolikátým hodem hráč A hodí šestku, případně dvěma kostkami dvě šestky; hráč A se může rozhodnout (odvážit) sázku přijmout.

⁴Přesně řečeno: aspoň jednou šestku; tato poznámka platí v celém tvrzení X a její analogie i v tvrzení XI a XII.

Qui duabus vicibus idem suscipit, si primâ vice duos senarios jaciât, obtinebit a ; si verò primâ vice diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, id quod ipsi, per illud quod jam dictum est, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos senarios jaciât, unus tantum est casus, sed 35 casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a , & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2^{dam} Propositionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis sit ei sors aut pars, qui idem suscipit quaternis jactibus, prætereundo casum eum, cùm quis illud ternis jactibus suscipit.

Etenim, qui 4^{or} vicibus duos senarios jacere contendit, si illud 1^{ma} aut 2^{da} vice faciat, obtinet a ; sin minùs, restant ipsi duo jactus, qui per illud quod superiùs dictum est, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem rationem habet etiam 71 casus, ut ex duobus primis jactibus semel duos senarios jaciât, contra 1225 casus, quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio 71 casus, qui ipsi dent a , & 1225 casus, qui dent ipsi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipsi per 2^{dam} Propositionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod ostendit eorum sortes esse ad se invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus semel duos senarios jacere certat. Ac inde rursus expectatio ejus, qui idem suscipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui istud 8 vicibus suscipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in se recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis sors incipiat, inter eum qui id suscipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immensum excrescerent, posteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus suscipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiozem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

PROPOSITIO XII.

Invenire quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciât.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu quispiam unâ tesserâ suscipere possit, ut bis senarium jaciât. Quòd si quis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante ostensa sunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem valere dictum est ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opus est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciât. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciât, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ seu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciântur, idque cum lucro.

Kdo se pokusí o totéž dvěma hody, obdrží a , když prvním hodem hodí dvě šestky; když to napoprvé dopadne jinak, zůstává mu jeden hod, který pro něj má hodnotu $\frac{1}{36}a$, jak už bylo řečeno.

Avšak je jen jeden případ, kdy v prvním hodu padnou dvě šestky, ale 35 případů, které dopadnou jinak. Tedy od počátku je jeden případ, který mu dá a , a 35, které mu dají $\frac{1}{36}a$, což má podle třetího tvrzení hodnotu $\frac{71}{1296}a$. Protihráči zůstane $\frac{1225}{1296}a$.

Z toho lze zjistit, jaká je jeho šance nebo podíl, když se pokusí o totéž čtyřmi hody, přičemž lze vynechat případ se třemi hody.

Vždyť přece kdo se pokouší hodit dvě šestky čtyřmi hody, získá a , když to učiní prvním nebo druhým hodem; jestliže však ne, zůstávají mu dva hody, které podle toho, co bylo řečeno výše, mají hodnotu $\frac{71}{1296}a$. Ale podle téhož výpočtu je 71 případů, kdy ve dvou prvních hodech jednou padnou dvě šestky, proti 1225 případům, které dopadnou jinak. Je tedy od začátku 71 případů, které mu dají a , a 1225 případů, které mu dají $\frac{71}{1296}a$, což má pro něj podle třetího tvrzení hodnotu $\frac{178991}{1679616}a$, a protihráči zůstane $\frac{1500625}{1679616}a$. To dokazuje, že jejich šance jsou ve vzájemném poměru 178991 ku 1500625.

Z toho se dále stejným výpočtem zjistí očekávání toho, kdo se pokouší osmi hody jednou hodit dvě šestky. A z toho zase dále očekávání toho, kdo se o to pokusí šestnácti hody. A dále z tohoto očekávání a z očekávání onoho, kdo se o to pokouší osmi hody, se zjistí očekávání toho, kdo se o to pokouší 24 hody. Protože jde hlavně o stanovení počtu hodů, při kterém se začínají vyrovnávat šance toho, kdo se odvažuje ⁵, s šancemi toho, kdo (sázku) nabízí, je možné při tomto postupu vynechat několik posledních číslic u čísel, která by jinak nadměrně vzrůstala. A tak zjišťuji, že tomu, kdo se pokusil (hodit dvě šestky) čtyřadvaceti hody, se stále něco nedostává; lepší podmínky mu začínají teprve tehdy, když se pokusí (hodit dvě šestky) pětadvaceti hody.

TVRZENÍ XII.

Zjistit, kolika kostkami by se někdo mohl odvážit hodit prvním hodem dvě šestky.

To je pak ovšem totéž, jako chtěl-li by někdo vědět, kolika hody jednou kostkou by se mohl pokusit hodit dvakrát šestku. Kdyby se o to někdo pokoušel dvěma hody, připadla by mu podle toho, co bylo dříve ukázáno, $\frac{1}{36}a$. Kdyby toho někdo chtěl dosáhnout třemi hody a kdyby jeho první hod nebyla šestka, měl by ještě dva hody, z nichž oba by mu musely dát šestky, o čemž už bylo řečeno, že to má hodnotu $\frac{1}{36}a$. Když však naopak v prvním hodu padne šestka, stačí, aby ze dvou (zbývajících) hodů padla jen jedna šestka, což by mělo podle desátého tvrzení hodnotu $\frac{11}{36}a$. Je však jisté, že má jen jednu příležitost, kdy prvním hodem hodí šestku, a pět příležitostí, které dopadnou opačně. Má tak od počátku jednu příležitost k získání $\frac{11}{36}a$ a pět příležitostí k získání $\frac{1}{36}a$, což má podle třetího tvrzení hodnotu $\frac{16}{216}a$ čili $\frac{2}{27}a$. Přidává-li se tímto způsobem postupně jeden hod navíc, zjistí se, že buď deseti hody jednou kostkou nebo

⁵Tj. kdo se odvažuje přijmout sázku.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si vero quidquam aliud accadat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeat.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm si id non obtingat, habebō 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2^{dam} Propositionem, tantundem est ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

PROPOSITIO XIV.

Si ergo & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille vero quam primum senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: invenire rationem meæ ad ipsius sortem.

Ponatur, sortem meam valere x , & id quod depositum est vocari a ; eritque sors alterius = $a - x$. Et patet, quodcumque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse = x . At quodcumque meæ vices sunt ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y . Jam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lusque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habebō, priusquam jactis, 5 casus ad obtinendum 0, & 31 casus ad obtinendum y id quod per 3^{tiam} Propositionem valet $\frac{31y}{36}$. Posuimus autem casum meum à principio esse = x . Quocirca erit $\frac{31y}{36} = x$, adeoque $y = \frac{36x}{31}$. Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere y . Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a , quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x id quod per 3^{tiam} Propositionem valet $\frac{6a+30x}{36}$. Hoc autem cum sit = y , erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} = y$, $\frac{30x+6a}{36} = \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x = \frac{31a}{61}$, valor meæ sortis. Et per consequens collusoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio sortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

prvním hodem deseti kostkami je možno se pokusit, aby padly dvě šestky, a to se získkem.

TVRZENÍ XIII.

Zjistit, jaký podíl každému z nás přísluší, jestliže bych hrál s někým jen na jeden hod dvěma kostkami za podmínky, že vyhraji, padne-li sedm bodů, a naopak vyhraje on, padne-li deset bodů; jestliže by však nastalo něco jiného, pak to, co je usazeno, rozdělíme rovným dílem.

Protože z 36 hodů, které jsou možné na dvou kostkách, 7 bodů se vyskytuje při šesti hodech a 10 bodů při třech hodech, zbývá dále 27 hodů, kdy je hra nerozhodná; kdyby se to stalo, připadlo by každému z nás $\frac{1}{2}a$. Jestliže by se to však nestalo, bude 6 případů, kdy vyhraji, tj. budu mít a , a 3 případy, kdy nastane opak a nebudu mít nic, což je podle třetího tvrzení totéž, jako bych v takovém případě měl $\frac{2}{3}a$. Mám tedy od začátku 27 příležitostí k (získání) $\frac{1}{2}a$ a 9 příležitostí k (získání) $\frac{2}{3}a$, což je podle třetího tvrzení totéž jako $\frac{13}{24}a$. A souperi zůstává $\frac{11}{24}a$.

TVRZENÍ XIV.

Zjistit poměr našich šancí, jestliže bychom já a někdo jiný střídavě házeli dvěma kostkami za podmínky, že já vyhraji, jakmile hodím sedm bodů, naproti tomu on vyhraje, jakmile hodí šest bodů, přičemž mu přenechám první hod.

Předpokládejme, že moje šance má hodnotu x a to, co je vloženo, označme a ; šance druhého tedy bude rovna $a - x$. A je zřejmé, že kdykoli se hody vrátí k němu, musí být moje šance zase rovna x . Kdykoli však mám házet já, musí moje šance být oceněna více. Označme tedy její hodnotu y . Dále pak, protože mezi 36 hody dvěma kostkami se vyskytuje pět, které mému spoluhráči dají šest bodů a umožní mu vítězství, a 31 hodů, které dopadnou jinak, tj. přesunou házení kostkami ke mně, budu mít dříve, než hodil, 5 příležitostí k získání 0 a 31 příležitostí k získání y , což podle třetího tvrzení má hodnotu $\frac{31y}{36}$. Předpokládali jsme ale na začátku, že moje šance je rovna x , protože $\frac{31y}{36} = x$, takže $y = \frac{36x}{31}$. Dále bylo předpokládáno, že moje šance má hodnotu y , když budu házet. Když však budu házet, mám 6 příležitostí k získání a , ježto právě při šesti hodech padne 7 bodů, které mě učiní vítězem, a 30 příležitostí, které vracejí hody mému spoluhráči a mě přenechávají x , což má dle třetího tvrzení hodnotu $\frac{6a+30x}{36}$. Protože to však je rovno y , nalezneme jako dříve $\frac{36x}{31} = y$, $\frac{30x+6a}{36} = \frac{36x}{31}$. Z toho se najde hodnota mé šance $x = \frac{31a}{61}$. A v důsledku toho bude hodnota šance mého spoluhráče $\frac{30a}{61}$; takže poměr mé a jeho šance je 31 ku 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

PROBLEMA I.

A & B unà ludunt duabus tesseris, hâc conditione, ut A vincat, si senarium jaciât, at B si septenarium jaciât. A primò unum jactum instituet; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276.

PROBLEMA II.

Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

PROBLEMA III.

A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

PROBLEMA IV.

Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

PROBLEMA V.

A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

F I N I S

Na závěr připojme následující úlohy.

ÚLOHA I.

A a B hrají se dvěma kostkami tak, že A vyhraje, když hodí šest bodů, a B vyhraje, když hodí sedm bodů. A začíná hru jedním hodem, pak hází B dvakrát za sebou, pak má A dva hody a tak dále, dokud jeden z nich nevyhraje. Jaký je poměr šance A ku šanci B ?

Odpověď: 10355 : 12276.

ÚLOHA II.

Tři hráči A , B a C mají dvanáct kamenů, z nichž čtyři jsou bílé a osm je černých, a hrají spolu tak, že zvítězí ten z nich, který jako první naslepo vytáhne bílý kámen; jako první táhne A , pak B , poté C , pak zase A a tak dále stále střídavě. Jaký bude poměr jejich šancí?

ÚLOHA III.

A se sází s B , že ze čtyřiceti hracích karet, po deseti každého druhu, vytáhne čtyři karty tak, že z každého druhu bude jedna. Je nalezen poměr šance A k šanci B 1000 : 8139.

ÚLOHA IV.

Hráči A a B mají opět dvanáct kamenů, čtyři bílé a osm černých, a hráč A se sází s B , že naslepo vytáhne sedm kamenů, mezi nimiž budou tři bílé. Jaký je poměr šance hráče A k šanci hráče B ?

ÚLOHA V.

A a B mají po dvanácti mincích a hrají třemi kostkami tak, že padne-li jedenáct bodů, A dá B jednu minci, padne-li ale čtrnáct bodů, B dá A jednu minci. Hru vyhrává ten hráč, který jako první získá všechny mince. Je nalezen poměr šance hráče A k šanci hráče B 244 140 625 : 282 429 536 481.

K O N E C