Počátky systémů CAD/CAGD

Karolína Nevrlá

1. Vznik systémů CAD/CAGD

Pojem CAD (=Computer Aided Design) – návrh pomocí počítače – zahrnuje užitečné prostředky hojně používané kostruktéry nejrůznějších oborů. Systémy CAD dnes umožňují například přesné rýsování technických výkresů nebo třeba třírozměrné modelování.

Po nástupu počítačů v 50. létech 20. století a jejich rozšíření do všech odvětví průmyslu vznikla otázka, jak nejvhodněji modelovat geometrické objekty – křivky, plochy a tělesa. Zda by bylo vhodnější objekty definovat pomocí matematického předpisu, nebo množinou bodů, které by byly zpracovány matematickýcm aparátem zabudovaným v grafickém softwaru. V každém případě byla zřejmá snaha umět dopředu odhadnout tvar výsledné křivky apod. Byly vymyšleny tzv. free–form křivky a plochy, ty nejznámější vznikaly na půdě velkých firem vyrábějících auta, lodě, resp. letadla.

Teorie matematických modelů křivek a ploch se začala vyčleňovat a v 70. létech 20. století vznikla nová disciplína CAGD (=Computer Aided Geometric Design). Zkratka CAGD byla vymyšlena R. Barnhillem a R. Riesenfeldem, a sice v roce 1974, když výše jmenovaní společně organizovali konferenci na toto téma na univerzitě v Utahu. Tato konference stmelila vědce z USA a Evropy a může být považována za základní událost tehdy nově vznikající vědní disiplíny.

Současným trendem je reprezentace NURBS (=nonuniform rational B-splines), která umožňuje vytvářet všechny objekty pomocí metod aproximace.

1.1. Počátky

Nejranější užití křivek v průmyslu můžeme vysledovat už ve starověku při stavbě námořních lodí. Pravděpodobně první zmínka o klasickém splinu – dřevěné šabloně používané ke kreslení hladkých křivek – je z roku 1752.

V roce 1944 napsal R. Limming, který během druhé světové války pracoval pro *NAA – North American Aviation*, knihu *Practical analytical geometry with applications to aircraft*. V jeho knize byly klasické konstrukce poprvé kombinovány s výpočty. Limming pochopil, že daleko efektivnější je definovat tvary křivek (tehdy hlavně kuželoseček) pomocí čísel než pomocí jejich nákresů, proto přeložil klasické konstrukce do numerických algoritmů. Jeho práce ovlivnila v 50. létech mnoho amerických letadlových společností.

1.2. Vývoj

Stěžejním obdobím jsou padesátá léta 20. století, což je doba prvních počítačů. Kolem roku 1955 do průmyslové výroby začaly nastupovat první NC (= numerical controlled) stroje. První počítače byly schopné vygenerovat numerické instrukce, podle kterých NC stroje pracovaly. V *IITRI (= Illinois Institute of Technology Institute for Research)* byl k tomuto účelu vytvořen programovací jazyk APT (= Automatic Programming for Tooling).

Všechny důležité informace byly do té doby uchovávány ve formě náčrtů, a nebylo jasné, jak je předat počítači, který řídil příslušný NC–stroj. Pokusem, který se neosvědčil, bylo naměřit z výkresů souřadnice některých (mnoha) bodů při zvoleném souřadném systému a jimi pak proložit křivku např. pomocí tehdy známé Lagrangeovy interpolace[1].

Ve Francii přišli de Casteljau a Bézier s myšlenkou opustit ruční kreslení výkresů a následnou otázku přenesení informací do paměti počítače a křivky definovali analyticky, pomocí matematického vyjádření. (Více se dozvíte v dalších kapitolách.) V USA podobnou techniku zaváděli J. Ferguson, pracující ve firmě *Boeing*, a S. Coons v *MIT (= Massachusetts Institute of Technology)* v Bostonu. Firma *General Motors* vyvinula svůj první CAD/CAM systém DAC-I (= Design Augmented by Computer), a ten využíval křivek a ploch definovaných C. D. Boorem a W. Gordonem. Ve Velké Británii pracoval A. R. Forrest po vzoru S. Coonse. Jeho disertační práce je věnována klasifikaci kuželoseček z pohledu počítačové geometrie, racionálních kuželoseček a zobecnění Coonsových ploch. Dále M. Sabin, ten pracoval pro letadlovou společnost *British Aircraft Corporation* a podílel se na vývoji systému Numerical Master Geometry. Objevil mnoho algoritmů, které byly později znovuobjeveny.

[1]Připomeňme, že se jedná o interpolaci polynomem $\sum_{i=0}^{n} b_i L_{i,n}(t)$, kde $L_{i,n}(t)$ jsou Lagrangeovy polynomy definované jako podíl $\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(t-t_j)/\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(t_i-t_j)$ a b_i jsou řídící body křivky, vysvětlené dále v textu.

Všechny tyto zájmy spadají do 60. let 20. století, ale vznikaly izolovaně až do 70. let téhož století, kdy vyvrcholily ve vytvoření nové disciplíny CAGD. Právě v té době byla pořádána již zmíněná konference v Utahu. První kniha o CAGDu vyšla roku 1979, jedná se o dílo *Computational Geometry for Design and Manufacture* autorů I. Fauxe a M. Pratta.V roce 1984 R. Barnhill a W. Boehm založili časopis s názvem *CAGD*.

Připomeňme ale, že v této době byly výstupními zařízeními počítačů hlavně NC-stroje a dále kreslící pulty – plottery, ještě ne obrazovky, jak bychom se mohli mylně domnívat. Ty přišly na řadu později. První plottery byly velikosti biliárového stolu a jejich rozšíření demonstruje i fakt, že zkratka CAD byla tehdy často vysvětlována jako "Computer Aided Drafting" (slovo "drafting" (= kreslení, črtání) místo "design" (=návrh)).

První interaktivní grafický systém Sketchpad byl sestaven I. Sutherlandem v *MIT* v roce 1963.

Po roce 1970 byl výzkum a vývoj systémů CAD orientován dvěma směry,

1. rozvinout teorii křivek a ploch,

2. vytvořit softwary adaptovatelné na speciální potřeby různých oborů.

Prvnímu bodu jsou věnovány následující kapitoly. Co se týče druhého bodu, dnes skutečně existuje nepřeberné množství grafických softwarů, od těch nejrozšířenějších, jako je AutoCAD, v automobilovém průmyslu používaný systém CATIA, dále Solid Edge, Unigraphics a mnohé jiné, až po jejich nadstavby věnované konkrétním odvětvím, např. obuvnímu nebo oděvnímu průmyslu.

2. Free-form křivky

Fundamentálním problémem počítačové grafiky je otázka, jak množinou bodů (říkáme jim řídící body) proložit vhodnou křivku. Vhodnou křivkou zde rozumějme křivku spojitou až do druhé derivace. Při hledání matematického vyjádření takových křivek se přišlo na to, že nejvhodnější ke spolupráci s počítačem je parametrické vyjádření pomocí polynomů. V mnoha grafických softwarech lze řídící body zadat prostým kliknutím myši, při opětném uchopení řídícího bodu jej lze přesunout a tak snadno měnit tvar výsledné křivky.

Pro křivky počítačové grafiky se ustálil pojem free–form křivky. Dělíme je do dvou základních skupin.

První z nich tvoří interpolační křivky, které porocházejí řídícími body. Není však vhodné provádět interpolaci pomocí jediné křivky. Musíme si uvědomit, že v praxi je počet řídících bodů značně veliký, a protože, jak víme, $n+1$ řídících bodů určuje polynom n-tého stupně, pracovali bychom s polynomy vysokých stupňů, které mají řadu nepříjemných vlastností. Jmenujme alespoň oscilaci a fakt, že při uvedené interpolaci změna jednoho řídícího bodu vyvolá změnu celého řešení. V praxi je proto nejvíce rozšířena metoda interpolace po částech, jednotlivé oblouky pak tvoří křivky maximálně pátého stupně a je požadovaná spojitost oblouků až do druhé derivace. Takovým křivkám říkáme spline křivky (krátce spliny).

Zaměřme se nyní na ty nejběžnější, což jsou kubické spliny. Nechť je dáno $n+1$ bodů a nechť ve zvoleném souřadnicovém systému mají body souřadnice $[x_0, y_0], [x_1, y_1], \cdots, [x_n, y_n]$. Kubická spline funkce $y = f(x)$ na intervalu $< x_0, x_n >$ je definovaná následovně,

1. Na intervalu $< x_i, x_{i+1} >$ je $f(x) = f_i(x)$ pro $i = 0, 1, \cdots, n-1$, kde $f_i(x)$ je polynom třetího stupně.

2. $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n$.

3. Funkce $f(x), f'(x), f''(x)$ jsou spojité na intervalu $< x_0, x_n >$.

Podmínkami 1.–3. ale není kubický spline určen jednoznačně. Rozepíšeme-li polynom $f_i(x)$ ve tvaru $f_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$, je vidět, že kubická spline funkce je určena $4n$ koeficienty. Souřadnice řídících bodů představují $n+1$ podmínek. Z podmínky 3. plyne $3(n-1)$ podmínek, což je celkem $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ podmínek pro $4n$ koeficientů kubické funkce, z čehož snadno vyvodíme, že k jednoznačnému určení kubického splinu nám chybí dvě podmínky, kterým říkáme okrajové podmínky.

Konkrétním příkladem kubického splinu jsou křivky složené z oblouků Fergusonových[2] kubik. Fergusonova kubika, daná dvěma krajními body A, B a tečnými vektory $\vec{a}, \vec{b}$ v nich, má parametrické vyjádření

$$P(t) = AF_0(t) + BF_1(t) + \vec{a}F_2(t) + \vec{b}F_3(t), t \in < 0, 1 >,$$

kde

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, F_1(t) = -2t^3 + 3t^2, F_2(t) = t^3 - 2t^2 + t, F_3(t) = t^3 - t^2.$$

[2] James Ferguson pracoval pro firmu Boeing, USA, zmínka o něm je uvedena v kapitole 1.2.

Polynomy $F_i(t)$ pro $i = 0,1,2,3$ nazýváme Fergusonovy polynomy a získáme je splněním daných podmínek, tj.

$$P(0) = A, P(1) = B, P'(0) = \vec{a}, P'(1) = \vec{b}$$

a $F_i(t) = a_it^3 + b_it^2 + c_it + d_i (i = 0,1,2,3)$. Řešíme 16 lineárních rovnic pro 16 neznámých.

Fergusonova kubika s krajními body o souřadnicích $[0,0], [3,0]$ a tečnými vektory v nich $(8,8), (0,-1)$ má parametrické vyjádření $P(t) = [2t^3 - 7t^2 + 8t, 7t^3 - 15t^2 + 8t]$ a je nakreslena na obrázku 1, který – stejně jako většina obrázků tohoto článku – byl vytvořen pomocí matematického softwaru Maple V/5 [6].

Obrázek 1: Fergusonova kubika

Druhým typem free–form křivek jsou tzv. aproximační křivky, které nemusejí procházet řídícími body, ale sledují tvar jimi určené lomené čáry, které říkáme řídící polygon.

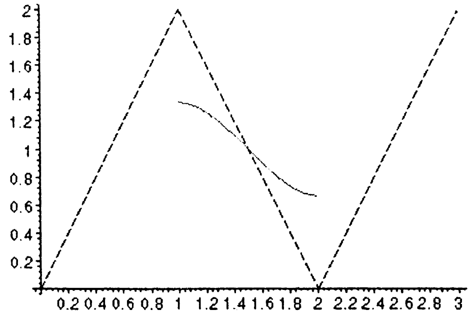
Nejpoužívanější z nich jsou Bézierovy křivky, kterým je věnována následující kapitola.

Dále jmenujme například Coonsovy[3] kubiky, které jsou definovány následovně $P(t) = 1/6\sum_{i=0}^{3} C_i(t)b_i$, kde $t \in< 0,1 >$, b_i jsou řídící body a $C_i(t)$ Coonsovy polynomy: $C_0(t) = (1-t)^3$, $C_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4$, $C_2(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$, $C_3(t) = t^3$. Na obrázku 2 je nakreslena Coonsova kubika $P(t) = [t + 1, 4/3t^3 - 2t^2 + 4/3]$ daná řídícími body o souřadnicích $[0,0], [1,2], [2,0], [3,2]$.

3. Bézierovy křivky

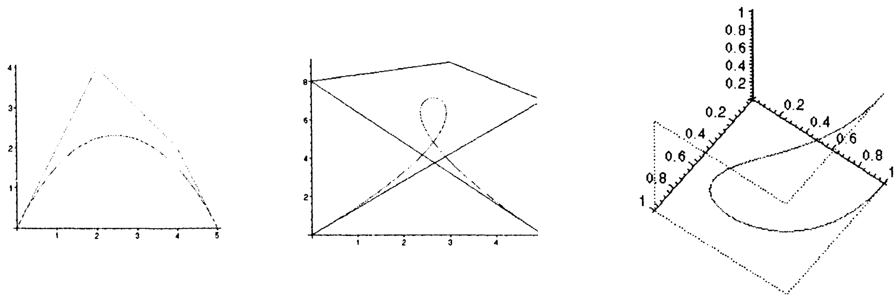
Mezi nejdůležitější křivky používané v počítačové grafice patří Bézierovy křivky. Jejich popularita je dána množstvím matematických vlastností,

[3]Steve Coons pracoval na *MIT* v Bostonu, USA, je zmíněn v kapitole 1.2.



Obrázek 2: Coonsova kubika

které umožňují snadnou manipulaci s nimi i jejich snadnou analýzu. Na obr. 3 jsou zobrazeny dvě rovinné křivky a jedna prostorová spolu se svými řídícími polygony.



Obrázek 3: Příklady Bézierových křivek

3.1. Definice a vlastnosti křivek

Definice:

Nechť je dáno $n+1$ řídících bodů $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$. Potom Bézierova křivka stupně n je dána parametrickým vyjádřením

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(t),\ t \in < 0, 1 >,$$

kde

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i, & pro\ 0 \leq i \leq n \\ 0, & pro\ i < 0 \vee i > n. \end{cases}$$

jsou Bernsteinovy polynomy.

Na obrázku 3 jsme viděli příklady Bézierových křivek. Například první křivka zleva je určena řídícími body o souřadnicích $[0,0]$, $[2,4]$, $[4,2]$, $[5,0]$ a má parametrické vyjádření $B(t) = [-3t^2+t^3-3t+5, -6t^3+6t]$, kde $t \in< 0,1 >$.

Jmenujme alespoň některé vlastnosti Bernsteinových polynomů, plynoucí z vlastností kombinačních čísel, vyskytujících se ve vyjádření: Součet Bernsteinových polynomů stupně n je roven 1. Bernsteinovy polynomy jsou na intervalu $< 0,1 >$ nezáporné a symetrické podle přímky $t = 1/2$. $B_{i,n}(t)$ lze vyjádřit pomocí $B_{i,n-1}(t)$. Z definice a uvedených vlastností polynomů pak plynou vlastnosti Bézierových křivek, jako například $B(0) = b_0$, $B(1) = b_1$, $B'(0) = n(b_1 - b_0)$, $B'(1) = n(b_n - b_{n-1})$. Každý bod křivky leží uvnitř konvexního obalu jejích řídících bodů. Křivka je invariantní vůči afinním transformacím atd.

3.2. O obou objevitelích

Původ Bézierových křivek spadá do období 1958-60, kdy je nezávisle na sobě objevili dva Francouzi, a to Pierre Bézier ve firmě Renault a Paul de Casteljau ve firmě Citröen.
Pierre Etienne Bézier, Francouz, jehož jméno křivky nesou, se narodil 1. září 1910 v Paříži.

V letech 1927 - 1930 studoval na *Ecole des Arts et Métiers* a stal se strojním inženýrem. Jeden rok (1930 - 1931) studoval na *Ecole Supérieure d'Electricité*. V roce 1977 (ve svých šedesáti sedmi letech) sepsal disertaci na téma *Essai de définition numérique des courbes et surfaces experimentales* a byl mu na *Université de Paris* udělen titul doktor přírodních věd.

V období 1933 - 1975 byl zaměstnancem firmy Renault, a to v nejrůznějších pozicích. Začínal jako seřizovač nástrojů na obráběcích strojích, pak povýšil na projektanta. Zajímal se o využití matematiky k přesnějšímu projektování a výrobě součástek, přičemž věřil, že k vykreslování ploch je potřeba znát jejich matematickou reprezentaci. S jeho jménem je spojen systém UNISURF, který je založený právě na Bézierových křivkách a plochách. Svou činnost u firmy končil jako asistent produkčního manažera.

Navíc byl v letech 1968 - 1979 profesorem výrobního inženýrství na *Conservatoire National des Arts et Métiers*. Byl členem *Société Francaise des Mécaniciens*, prezidentem *Ingénieurs Civils de France* a *Société des Ingénieurs des Arts et Metiers*, čestným členem *Collège International des Recherche sur la Productivité* a *American Society of Mechanical Engineers*. Uvedli jsme však pouze některá členství.

Vedl *Club Pierre de Jumièges*, což byla skupina lidí vymýšlejících matematické triky, často geometrické, které bývaly publikovány v rubrice *maths et Bluettes* časopisu *Arts et Métiers Magazine*. Ve stejném časopise byly uveřejňovány i Bézierovy humoristické články.

25. listopadu 1999 zemřel v Paříži.

Paul de Faget de Casteljau se narodil 19. listopadu roku 1930 v Besançon ve Francii. Prošel několika katolickými školami, poté studoval na *Lycée Victor Hugo*, kde získal titul bakalář s výjimečnými výsledky, což mu umožnilo studovat matematiku a fyziku na *Ecole Normale Supérieure*.

Po studiích podstoupil základní vojenskou službu, a sice ve válce v Alžírsku. Po návratu do Francie roku 1958 byl přijat do firmy Citroën na místo fyzika. Již během prvního roku rozvinul s tamější odbornou skupinou důležité myšlenky, které měly značný vliv na rozvoj modelování automobilových karoserií.

První teoretické výsledky byly zdokumentovány pařížským patentním úřadem (*INPI=Institut National de la Propriété Industrielle*), a zůstaly neznámé. Až v polovině sedmdesátých let dvacátého století Wolfgang Boehm, profesor z technické univerzity v Braunschweigu, uvedl výsledky ve známost a algoritmus, pomocí kterého lze nalézt body ležící na Bézierově křivce, od té doby nese jméno de Cateljaua. Jeho objev byl natolik průkopnický, že dnes existuje stěží nějaká kniha o CAGD, kde by jeho výsledky nebyly uvedeny a dále rozvíjeny.

V roce 1985 vyšla jeho první kniha *Formes à Pôles*. Výsledky z oblasti algebry s aplikacemi v robotice byly publikovány o dva roky pozdeji v knize *Quaternions,* za kterou autor obdržel cenu Prix Seymour Cray France. Knihu o CAGD s názvem *Le Lissage,* ve které se de Casteljau zabývá hladkými plochami, vydal roku 1990.

V roce 1992 odešel do důchodu.

6. prosince 1997 mu byl na Fakultě přírodních věd Univerzity v Bernu udělen čestný titul Doctor Philosophiae Honoris Causa za základní vědecké objevy učiněné v oblasti geometrického modelování.

3.3. Fylogeneze křivek

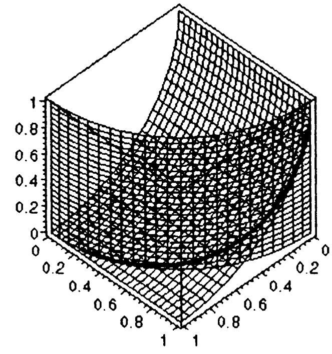
Na problematiku se podíváme ze dvou úhlů pohledu, pohledů obou vynálezců Bézierových křivek. Nejdříve si uvedeme Bézierův polynomiální přístup. Potom se podíváme, jak jinak uvažoval De Casteljau. Zdá se, že skutečným otcem křivek je De Casteljau, a Bézier to uznává (mj. v *P. Bézier. Petite histoire d'une idée bizarre (2). Bulletin de la Section d'Histoire des Usines Renault 1982,* jak je uvedeno v [8]). De Casteljau publikoval svou práci již v roce 1959, ovšem pouze jako technickou zprávu, která zůstala tajemstvím firmy *Citroën* a byla těžko dosažitelná. V roce 1975 získal kopii technické zprávy W. Boehm a uvedl tento algoritmus ve známost. Ačkoliv přišel Bézier se svými výsledky o něco později, ty jeho byly známy dříve.

3.3.1. Bézierův přístup

Z Bézierova životopisu je zřejmé, že nebyl teoretickým vědcem, ale všechno, co vymýšlel, využíval při své práci v automobilovém průmyslu. Opusťme tedy dvojdimenzionální prostor a směle vstupme do prostoru reálného světa. V počátcích se prostorová křivka konstruovala složením úseček, oblouků kružnic, případně parabol (Aitkin) nebo byla definována dvěma rovinnými křivkami jako jejími průměty. Zásadní posun ale přinesl nápad, křivku definovat jako kombinaci bázových funkcí $f_i(t)$, potom obecně $\vec{P(t)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a_i} f_i(t)$, pro třídimenzionální prostor je $n = 3$. Jak postupoval Bézier? Uvažoval dvě čtvrtválcové plochy vepsané do jednotkové krychle a prostorovou křivku P jako průsečnici těchto ploch (viz obr. 4). Vektory $\vec{a_i}$ byly orientované úsečky příslušných hran krychle – záleželo tedy na umístění vektorů, tak se pomalu blížíme k řídícímu polygonu, jak bylo uvedeno výše. Bázové funkce byly průměty křivky P do stěn krychle.

Bézier ale brzy pochopil, že pro práci s počítačem je vhodnější reprezentovat křivku pomocí polynomů. Z původní úvahy mu vyšly dvě okrajové podmínky (hovořili jsme o nich v kapitole 2) pro bázové funkce, a sice

1. Pro $\forall t \in <0, 1>$: $f_{0,n}(t) = 1$.
2. Pro $\forall i = 1, 2, \cdots, n$:
   a) $f_{i,n}(0) = 0, f_{i,n}(1) = 1$,
   b) pro $j = 1, 2, \cdots, i-1$: $\frac{d^j f_{i,n}}{dt^j}(0) = 0$,



Obrázek 4: Původní Bézierova bázová křivka

c) pro $j = 1, 2, \cdots, n - i : \frac{d^j f_{i,n}}{dt^j}(1) = 0$.

Pak už byl jen krok ke zvolení vhodných polynomiálních funkcí. Bézier vybral následující funkce,

$$f_{i,n}(t) = \frac{(-t)^i}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}\left(\frac{(1-t)^n - 1}{t}\right)}{dt^{i-1}},$$

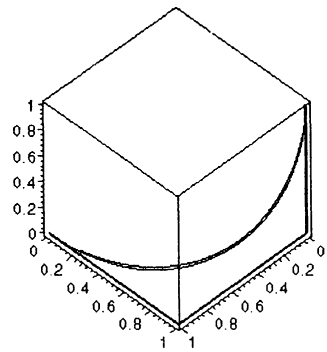
po úpravě

$$f_{i,n}(t) = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{j} \binom{j-1}{i-1} t^j.$$

Asi nás napadne otázka, proč zvolil bázové funkce právě tímto způsobem. Je jistě zajímavé, že – jak ukazuje obrázek 5 – nově definovaná křivka vepsaná do jednotkové krychle vhodně aproximuje původní Bézierovu bázovou křivku ležící na válcových plochách.

Později byl Bézier upozorněn svým spolupracovníkem Claudem Riauxem na to, že ve výpočtu reprezentace křivky počítá s každým krajním bodem orientovaných úseček dvakrát, proto ho napadlo vyjádřit křivku pomocí rozdílu bázových funkcí, a tak se do jeho vyjádření dostaly Bernsteinovy polynomy. Matematicky vyjádřeno, získáme následující rovnosti (O je označení počátku příslušného souřadného systému),

$$\begin{aligned} \vec{P(t)} &= (b_0 - O) f_{0,n}(t) + (b_1 - b_0) f_{1,n}(t) + (b_2 - b_1) f_{2,n}(t) + \cdots \\ &\cdots + (b_n - b_{n-1} f_{n,n}(t) = \\ &= -O f_{0,n}(t) + b_0 (f_{0,n}(t) - f_{1,n}(t)) + b_1 (f_{1,n}(t) - f_{2,n}(t)) + \cdots + b_n f_{n,n}(t). \end{aligned}$$



Obrázek 5: Průsečnice dvou čtvrtválcových ploch vs. Bézierova křivka

Uvědomíme-li si, že platí $f_{n,0}(t) = 1$, a odečteme-li od rovnosti b_n-násobek funkce identicky rovné nule ($f_{n+1,n}(t) \equiv 0$), získáme po úpravě

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i(f_{i,n}(t) - f_{i+1,n}(t)) = \sum_{i=0}^{n} b_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(t),$$

což je dnešní běžná forma vyjádření Bézierových křivek.

Pravděpodobně ve stejnou dobu dospěl ke stejné úpravě nezávisle na Bézierovi i R. Forrest.

3.3.2. Přístup de Casteljaua

De Casteljau k problému přistoupil geometricky. Jeho algoritmus je metoda, pomocí které nalezneme bod na Bézierově křivce $P(t)$ odpovídající konkrétní hodnotě parametru t. Názorně ukazuje vztah mezi geometrií a algebrou.
Podívejme se na zmíněný algoritmus očima Béziera (využijme definici křivek zahrnující Bernsteinovy polynomy)[4].

Věta – De Casteljau–algoritmus: Nechť jsou dány řídící body $b_0, b_1, \cdots, b_n$ Bézierovy křivky $P(t)$.
Potom

$$b_i^r(t) = (1-t)b_i^{r-1} + t\, b_{i+1}^{r-1} \qquad \begin{cases} r = 1, \cdots, n \\ i = 0, \cdots, n-r \end{cases} \qquad a \qquad b_i^0 = b_i.$$

[4]Je třeba dodat, že oba matematici došli k oběma vyjádřením (algebraickému i geometrickému).

Body získané během výpočtu pomocí uvedeného algoritmu je zvykem zapisovat do trojúhelníkového schematu. Například pro $n = 3$ dostaneme následující schema

$$
\begin{array}{llll}
b_0 & & & \\
b_1 & b_0^1 & & \\
b_2 & b_1^1 & b_0^2 & \\
b_3 & b_2^1 & b_1^2 & b_0^3 \,.
\end{array}
$$

Důkaz plyne z vlastnosti Bernsteinových polynomů, že $B_{i,n}(t) = (1 - t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$, pro $i = 0, \ldots, n$, kde $B_{-1,n-1}(t) = 0$ a $B_{n,n-1}(t) = 0$.
Potom

$$
\begin{aligned}
P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i((1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)) = \\
= \sum_{i=0}^{n} b_i(1-t)B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n} b_i t B_{i-1,n-1}(t).
\end{aligned}
$$

Protože $B_{-1,n-1}(t) = 0$ a $B_{n,n-1}(t) = 0$, pokračujeme s úpravami následovně

$$
P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(1-t)B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i t B_{i-1,n-1}(t).
$$

Dále změníme sčítací index druhé sumy z i na $i + 1$. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(1-t)B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} t B_{i,n-1}(t) = \\
= \sum_{i=0}^{n-1} (b_i(1-t) + b_{i+1}t)B_{i,n-1}(t).
\end{aligned}
$$

Dosazením vztahu $b_i^1 = b_i(1-t) + b_{i+1}t = b_i^0(1-t) + b_{i+1}^0 t$ pro $i = 0, \cdots, n-1$ získáme

$$
P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^1 B_{i,n-1}(t),
$$

tato rovnice popisuje Bézierovu křivku stupně $n-1$ s řídícími body $b_0^1, \cdots, b_{n-1}^1$.
Analogicky dospějeme k rovnosti

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^2 B_{i,n-2}(t),$$

kde $b_i^2 = b_i^1(1-t) + b_{i+1}^1 t$ pro $i = 0, \cdots, n-2$.
Obecně

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-j} b_i^j B_{i,n-j}(t),$$

kde $b_i^j = b_i^{j-1}(1-t) + b_{i+1}^{j-1} t$ pro $i = 0, \cdots, n-j$.
Pro $j = n$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{0} b_i^n B_{i,n-n}(t) = b_0^n.$$

Tím je věta dokázána.

Podívejme se na následující příklad.
Příklad: Pomocí de Casteljau-algoritmu spočítáme bod Bézierovy křivky

$B(t)$ pro hodnotu parametru $t = 1/2$. Řídící body jsou $b_0 = [0,0], b_1 = [3,3], b_2 = [6,4], b_3 = [8,2], b_3 = [10,0]$. Souřadnice řídících bodů zapíšeme do prvního sloupce trojúhelníkového schematu, a to do sloupečku, další sloupce schematu doplňujeme podle definice algoritmu. Dostaneme

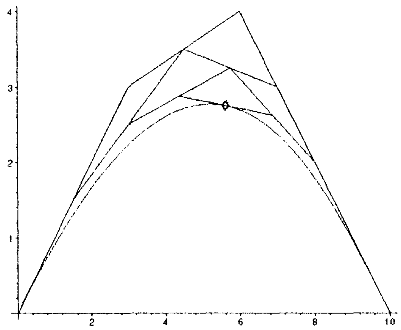
$$\begin{array}{ccccc}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & & & \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} & & & \\
\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} & & \\
\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{23}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{35}{8} \\ \frac{23}{8} \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{55}{8} \\ \frac{21}{8} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{45}{8} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}
\end{array}.$$

Řešením je bod, jehož souřadnice vidíme v posledním sloupci schematu, tj. $\left[\frac{45}{8}, \frac{11}{4}\right]$.

Výsledek zkontrolujeme dosazením parametru $t = \frac{1}{2}$ do parametrického vyjádření Bézierovy křivky. Z definice plyne parametrické vyjádření

$$P(t) = [12(1-t)^3t + 36(1-t)^2t^2 + 32(1-t)t^3 + 10t^4,$$
$$12(1-t)^3t+24(1-t)^2t^2+8(1-t)t^3] = [2t^4-4t^3+12t, 4t^4-4t^3-12t^2+12t],$$

proto $P(\frac{1}{2}) = \left[\frac{45}{8}, \frac{11}{4}\right]$, získali jsme stejný výsledek jako pomocí algoritmu.

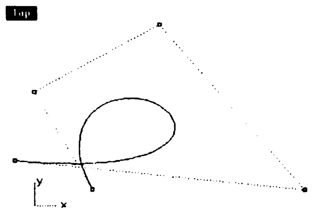


Obrázek 6: De Casteljau-algoritmus

Podívejme se, jak snadno lze algoritmus reprezentovat geometricky. Strany řídícího polygonu rozdělíme v poměru $(1 - t_0) : t_0$, kde t_0 je pevně zvolená hodnota parametru t, v našem případě $t_0 = \frac{1}{2}$. Vzniklé body spojíme novým polygonem s $n - 1$ stranami. Strany nového polygonu opět rozdělíme v poměru $(1 - t_0) : t_0$ a získáme další polygon.
Po n krocích získáme bod Bézierovy křivky $P(t_0)$. Po $n - 1$ krocích získáme polygon se dvěma vrcholy, které určují tečnu Bézierovy křivky v bodě $P(t_0)$.
Uvedený postup je znázorněn na obrázku 6.
Protože je de Casteljau-algoritmus založen na dělení úsečky v daném poměru, je - stejně jako křivky samotné - invariantní vůči afinním transformacím, jak jž bylo uvedeno.

3.4. Ukázka konkrétního softwaru

Geometrický software Rhinoceros ([9]), který je vhodným nástrojem k modelování prostorových objektů, ale umožňuje i jejich geometrickou analýzu (např. analýza křivosti, spojitosti), kreslí Bézierovy křivky příkazem *Curve/Free-form/Control Points*. Ukázku provedení příkazu vidíme na obrázku 7, kde je zobrazena křivka i její řídící polygon.



Obrázek 7: Bézierova křivka nakreslená pomocí softwaru Rhinoceros

Literatura

[1] H. P. Bieri, H. Prautzsch. *Preface of Special Issue CAGD.* CAGD 16, p. 579-581. Elsevier, 1999.

[2] P. Bézier. *First steps of CAD.* Computer-Aided Design 21, p. 259-261. Elsevier, 1989.

[3] *Computer-Aided Design, Commemorative issue honoring Pierre Bézier on his 80th birthday.* Elsevier, 1990.

[4] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design.* Fourth Edition. Academic Press, 1997.

[5] G. Farin. *Handbook of CAGD* (Ch. 1: A History of Curves and Surfaces in CAGD). North-Holland, 2002.

[6] A. Heck. *Introduction to Maple.* 2nd Edition. Springer Verlag, 1996.

[7] M. Kargerová, E. Kopincová, P. Mertl, K. Nevrlá. *Geometrie a grafika pro CAD.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 2003.

[8] Ch. Rabut. *On Pierre Bézier's life and motivations.* Computer-Aided Design 34, p. 493-510. Elsevier, 2002.

[9] *Rhinoceros, NURBS Modelling for Windows*, User's Guide, 1993.

[10] D. F. Rogers. *Pierre Etienne Bézier (1910-1999), in memoriam.* Computer-Aided Design 34, p. 489-491. Elsevier, 2002.

[11] J. Žára a kol. *Počítačová grafika - principy a algoritmy.* Grada, 1992.

Zájemcům o historii CAD/CAGD doporučuji [2], [4], [5]. Životopisné údaje Béziera a jeho výsledky naleznete v [3], [8], [10]. O životě a práci De Casteljaua pojednává [1]. Teorie free-form křivek a jiné otázky počítačové geometrie a grafiky jsou zpracovány v [4], [7], [11].

Karolína Nevrlá
MFF UK Praha
e-mail: Karolina.Nevrla@seznam.cz