Karel Mačák

Poznámky k formování kombinatoriky v 16. a 17. století

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 16. a 17. století. Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997. (Czech). Praha: Prometheus, 1999. pp. 236–257.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401580

Christopher Clavius (1538 – 1612)

POZNÁMKY K FORMOVÁNÍ KOMBINATORIKY V 16. A 17. STOLETÍ

KAREL MAČÁK

0. Úvod

I když je zvykem psát odborné práce v gramaticky neutrální formě, tento úvod (jehož zvláštní postavení je naznačeno už pořadovou číslicí 0) bude napsán v 1. osobě jednotného čísla.

V r. 1995 jsem na známém matematicko-historickém semináři v Jevíčku přednesl příspěvek o historii teorie pravděpodobnosti v 17. a 18. století a tento příspěvek, doplněný překlady historických textů, vyšel díky JČMF a podpoře grantových agentur v r. 1997 jako samostatný svazek edice *Dějiny matematiky.* Když jsem na tomtéž semináři v r. 1997 mluvil o historii kombinatoriky, doufal jsem, že bude možné vydat i tento příspěvek (doplněný opět překlady historických textů) v knižní podobě, ale z různých důvodů se to prozatím nepodařilo. Předložený článek proto představuje jisté kompromisní řešení spočívající v tom, že je zde publikováno základní schéma připravované rozsáhlejší práce; z toho plyne jeho poněkud heslovitý charakter. Protože však literatury o historii kombinatoriky je málo a není vždy snadno dostupná, doufám, že i toto zpracování tématu bude aspoň pro někoho zajímavé.

1. Formulace problému

Pod pojmem *kombinatorika* budeme v tomto příspěvku rozumět tu část matematiky, která je obsahem obvyklých středoškolských kurzů kombinatoriky, tj. nauku o variacích, kombinacích a permutacích bez opakování i s opakováním prvků a s tím související studium kombinačních čísel a Pascalova trojúhelníku. Jsme si přitom vědomi toho, že dnešní náplň kombinatoriky je mnohem širší (viz např. [1]), ale tento příspěvek je věnován 16. a 17. století a z tohoto hlediska je náš přístup zcela oprávněný; o některých aspektech vývoje kombinatoriky přesahujících tento rámec je zmínka ve čtvrté části příspěvku.

Za počátek kombinatoriky v dnešním pojetí považují někteří autoři Pascalův spis *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku* (např. [1], str. 2167), jiní (např. [2], str. 44 – 46) uvádějí v této souvislosti spíše Leibnizův spis *Ars combinatoria*; podle našeho názoru rozhodujícím předělem je kniha Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi.*[1] Všechny tyto tyto spisy představují završení dlouhého vývoje,

[1]Pascalův spis vyšel poprvé v r. 1665, ale byl napsán (aspoň zčásti) již v r. 1654; Leibnizův spis vyšel poprvé v r. 1666. Bernoulliova kniha vyšla v r. 1713, ale napsána byla v osmdesátých letech 17. století.

který probíhal velice pomalu po dobu delší než jedno tisíciletí a je poměrně málo zpracován; existuje snad jediná kniha [3], která se tímto vývojem podrobně zabývá.[2] Předložený článek se týká vývoje kombinatoriky v Evropě v období před vydáním uvedené Bernoulliovy knihy a vychází z názoru, že ve vývoji kombinatoriky v Evropě v uvedeném období lze zřetelně rozlišit dva proudy:

I. proud, který budeme stručně nazývat proudem filozofickým; v tomto proudu jsou kombinatorické úvahy součástí úvah filozofických (případně teologických, morálních a podobných) a některé kombinatorické výsledky jsou matematicky zobecňovány.

II. proud, který budeme stručně nazývat proudem matematickým; v tomto proudu jsou kombinatorické problémy studovány samy o sobě jako problémy matematické, většinou v rámci aritmetiky. Při studiu tohoto proudu se objevuje zásadní metodický problém spočívající v tom, že kombinační čísla $\binom{n}{k}$ vyjadřují nejen počet k-prvkových kombinací z n prvků, ale současně jsou i binomickými koeficienty v rozvoji výrazu $(a+b)^n$; je tedy otázkou, zda lze každý spis, ve kterém se pojednává o číslech typu $\binom{n}{k}$ a o jejich uspořádání do obrazce typu Pascalova trojúhelníka, považovat za spis náležející do historie kombinatoriky. Většinou za takové považovány jsou, ale dle našeho názoru je to přístup nesprávný, protože mnohé tyto spisy pojednávají výlučně o problematice aritmeticko-algebraické (výpočty mocnin a odmocnin) a kombinatorických problémů se netýkají ani v náznaku.

Předložený článek bude věnován převážně filozofickému proudu v historii kombinatoriky; protože však nelze oba proudy od sebe ostře oddělit, bude podán základní přehled obou proudů až do spisu Jacoba Bernoulliho *Ars conjectandi*, ve kterém (podle našeho názoru) oba proudy definitivně splynuly.

2. Filozofický proud před r. 1500

2.1 Anicius Manlius Severinus Boethius (asi 480 – 525)

Boethius bývá někdy označován jako „oslední Říman“ Pocházel z urozené římské rodiny a díky svému původu i své mimořádné učenosti byl už v mládí přijat do služeb ostrogótského krále Theodoricha.[3] Dosáhl významného postavení a dlouho byl královým oblíbencem, ale měl také řadu nepřátel a ti nakonec vykonstruovaným obviněním ze spiknutí dosáhli toho, že Boethius byl uvězněn a bez soudu popraven (někdy se užívá spíše termínu: umučen). Není jasné, proč král Theodorich postupoval proti svému oblíbenci tak tvrdě; panovala domněnka, že skutečnou příčinou Boethiovy smrti byly důvody náboženské (Boethius byl katolík, zatímco Theodorich arián[4]) a proto byl Boethius jako mučedník pro víru prohlášen za svatého (jako sv. Severin má svátek 23. X.).

[2] Domníváme se, že ne se všemi názory uvedenými v citovaných knihách [1, 2, 3] lze bez výhrad souhlasit, ale sporné otázky nebudou předmětem tohoto článku.

[3] Ostrogótská říše vznikla v Itálii r. 493, když ostrogótský král Theodorich (asi 453 – 526) porazil římského krále Odoakera (Odoakerův nástup na římský trůn v r. 476 je tradičně považován za konec starověku a začátek středověku) a vytvořil říši s centerem v Ravenně.

[4] Kněz Arius (asi 256 – 336) žil v Alexandrii a učil, že Syn Boží (Logos) nevychází od věčnosti od Otce, nýbrž byl čas, ve kterém ještě neexistoval; před stvořením světa byl vytvořen z nicoty

Boethius se zabýval nejen politikou, ale byl též významným filozofem a teologem. V dějinách matematiky je znám svými učebnicemi čtyř disciplin tzv. quadrivia (aritmetika, geometrie, astronomie a musica (v podstatě matematický popis hudebních intervalů)), z nichž se zachovala pouze aritmetika a musica. Z našeho hlediska je však důležitý jeden Boethiův komentář k jednomu spisu řeckého filozofa Porfyria,[5] který dle našeho názoru lze považovat za první práci filozofického proudu v historii kombinatoriky. Zatímco Porfyrios v rámci filozofické úvahy počítá (řečeno dnešní terminologií) počet dvouprvkových kombinací z pěti prvků,[6] v Boethiově komentáři se již objevuje ve slovní podobě známý vztah pro počet dvouprvkových kombinací z n prvků, který dnes zapisujeme ve tvaru $n(n-1)/2$. Boethiovy spisy byly opisovány a studovány po celý středověk a lze tedy předpokládat, že tento výsledek (který je podle [3] možná převzat z řecké matematiky) byl mezi středověkými vzdělanci všeobecně znám.

2.2 Ramon Lull (asi 1232 – 1316)

Narodil se a zemřel na Mallorce;[7] své spisy psal nejen latinsky (jak bylo v té době zvykem), ale též katalánsky. Pocházel ze šlechtické rodiny, ale asi ve věku třiceti let se po náboženském osvícení zcela odvrátil od světského života (i když nikdy nevstoupil do žádného řeholního řádu, ani se nestal knězem) a zbytek svého života věnoval misionářské činnosti, kterou však pojímal komplexně: kromě toho, že sám působil jako misionář mezi muslimy, usiloval i o zakládání kolejí, ve kterých by nastávající misionáři mohli studovat orientální jazyky (hlavně arabštinu a hebrejštinu) a navíc (což je z našeho hlediska nejdůležitější) chtěl vypracovat nauku, která by umožňovala naprosto spolehlivě vyvracet náboženské omyly muslimů a dokazovat správnost křesťanského učení bez odvolávání k autoritě Písma svatého, tj. pouze na základě racionální logické

---

aktem Otcovy vůle. Teprve od této chvíle se Bůh může nazývat Otcem. Syn Boží je však Otcem povýšen nad všechno stvoření; Bůh jím jako nástrojem všechno stvořil. Svobodným rozhodnutím (pro nebo proti Otci) se Syn staví na stranu Otce; byl jím za to povýšen do božské slávy a proto může být také nazýván Bohem. Ariovo učení bylo zavrženo na koncilu v Niceji (r. 325) a znovu na koncilu v Konstantinopoli (r. 381), ale v některých částech Evropy (např. mezi Góty) bylo dlouho velmi rozšířené (podle knihy FISCHER-WOLLPERT, R. F.: *Malý teologický slovník*. Zvon, Praha 1995, str. 15).

[5]Porfyrios žil asi v letech 233 – 304 n. l. a byl žákem Plotínovým; po Plotínově smrti sebral a vydal jeho spisy. Napsal řadu komentářů ke spisům řeckých filozofů, z nichž nejvýznamnější je *Úvod do Aristotelových kategorií* (jeho český překlad vyšel ve Filosofickém časopisu roč. XVIII (1970), č. 6); k tomuto Porfyriovu spisu se vztahuje i uvedený Boethiův komentář.

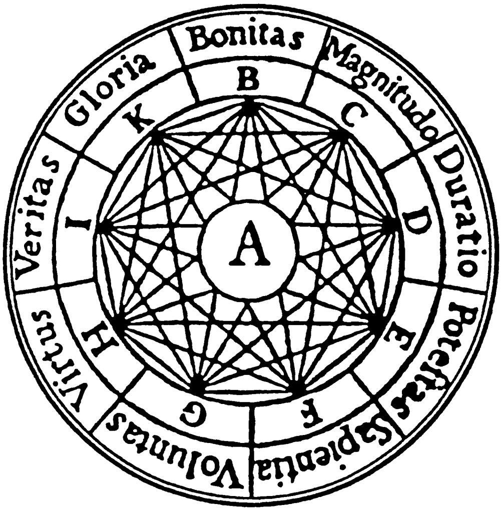
[6]Tato skutečnost u Porfyria není překvapivá, protože u Aristotela je úvaha velice podobná; Aristoteles převzal Empedoklovo učení o čtyřech základních elementech (země, oheň, voda, vzduch), z nichž je vše utvořeno, a ve spisu *O vzniku a zániku* stanovuje počet všech dvouprvkových kombinací ze čtyř prvků (viz např. Aristoteles: *O nebi. O vzniku a zániku.* Pravda, Bratislava 1985, str. 217 (podle Bekkerova stránkování str. 332b)).

[7]Poznamenejme při této příležitosti, že Lullův život byl umělecky ztvárněn i v české literatuře; nedávno znovu vyšla knížka Jiřího Karáska ze Lvovic *Obrácení Raymunda Lulla*, Trigon, Praha 1996.

argumentace.[8] Při práci na tomto úkolu vytvořil rozsáhlé dílo, které bývá většinou zařazováno do dějin logiky; z našeho hlediska je podstatné, že důležitou roli při vytváření Lullova logického systému hrály myšlenky kombinatorické, i když nebyly vyjádřeny v matematické podobě.

Při výkladu Lullova díla vycházíme výlučně ze sekundární literatury (hlavně z [4]); studium původních Lullových prací přesahuje jak rámec tohoto příspěvku, tak i rámec možností autora příspěvku. Základní Lullovu myšlenku lze snad vyjádřit tak, že vše, co Bůh stvořil, lze popsat pomocí kombinací konečného počtu základních pojmů a vztahů, které jsou rozdělené do několika skupin a kombinují se podle jistých pravidel; pro lepší pochopení svého systému znázorňuje Lull základní vztahy graficky. Konkrétní podoba tohoto systémum se během doby měnila; ve spisu *Ars brevis* uvádí např. šest skupin základních pojmů a vztahů, každou o devíti prvcích, z nichž jedna (nazvaná *Prædicata absoluta*) je graficky znázorněna na obr. 1. Ke studiu možných kombinací potom byly prvky jednotlivých skupin znázorněny na obvodu soustředných kotoučů o různém průměru, jimiž bylo možno navzájem otáčet, takže bylo možno mechanicky vytvářet různé kombinace prvků obsažených na těchto kotoučích.

Lullovo dílo je veskrze nematematické, ale v historii kombinatoriky ho nelze minout bez povšimnutí, protože jeho vliv byl značný; lze ho sledovat až k Leibnizovu spisu *Ars combinatoria*.



Obr. 1 *Prædicata absoluta* Ramona Lulla

[8]Pro zařazení Lullova díla do širších historických souvislostí uveďme, že ke stejnému cíli mířil i sv. Tomáš Akvinský (1225 – 1274) ve své *Summě proti pohanům*; oba učence vybídl k práci na tomto problému katalánský dominikán Raymund z Peñafortu (1175 – 1275), významný církevní právník a pozdější generální představený dominikánského řádu.

3. Jezuité a kombinatorika

Chceme-li se zabývat vědeckou činností jezuitů, měli bychom stále mít na paměti, že jezuité nebyli žádnou vědeckou („učenou") společností; je to řeholní řád,[9] pro který vědecká činnost byla jen jednou z mnoha činností, kterými se zabývali, a to ještě ne tou nejdůležitější. Lze soudit, že náplň vědecké činnosti v jezuitských kolejích byla ve značné míře (a možná v rozhodující míře) určována požadavky výuky a vzdělávání; jezuité vždy věnovali velikou pozornost rozvoji řádového školství[10] a k tomu potřebovali kvalifikované odborníky. Jezuitské školy byly sice orientovány převážně filozoficky a teologicky, ale toto filozofické a teologické studium bylo budováno na kvalitním základním všeobecném vzdělání, ve kterém měla pevné místo i matematika. Z tohoto hlediska není výskyt kombinatoriky v jezuitských filozofických (a jiných) spisech nijak zvlášť překvapující.

Pokusíme se zde nyní podat přehled jezuitských autorů a spisů zabývajících se kombinatorikou. Je prakticky jisté, že tento přehled není úplný, protože jezuitská publikační činnost byla rozsáhlá, nicméně podle vzájemných citací lze soudit, že nejdůležitější autoři zde jsou zahrnuti. Pokud bude řeč o historických předchůdcích Pascalova trojúhelníka, budeme je nazývat aritmetickými trojúhelníky. Pro zkrácení zápisu budeme používat symbolu $C(n,k)$ pro počet všech k-prvkových kombinací z n prvků a $V(n,k)$ pro počet všech k-prvkových variací z n prvků (vždy bez opakování).

3.1 Christopher Clavius (1538 – 1612)

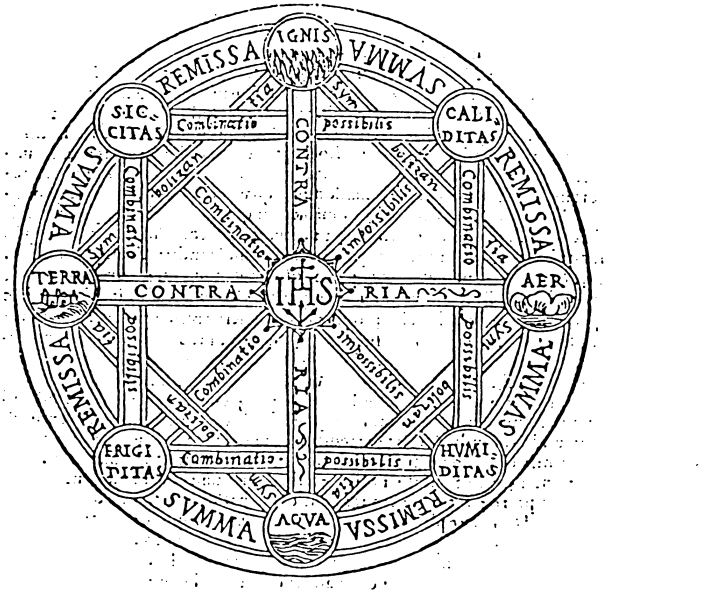
Narodil se v Bambergu (Německo), v r. 1555 vstoupil do jezuitského řádu a po studiích působil většinu života jako profesor matematiky na jezuitské koleji v Římě, kde také zemřel. Za jeho hlavní dílo bývá považováno vydání Eukleidových *Základů* doplněné rozsáhlým komentářem, ve kterém jednak shrnul komentáře dřívější, jednak připojil celou řadu komentářů vlastních; významně se rovněž podílel na zavádění kalendářní reformy provedené papežem Řehořem XIII. v r. 1582.

Z našeho hlediska je podstatné, že Clavius uvedl do novověkého bádání problematiku filozoficko-kombinatorickou, a to ve svém komentáři k nauce o sféře (tj. k astronomii) známého středověkého autora Johanna Sacrobosca (žil zhruba v první polovině 13. století). Clavius zde nejprve komentuje základní schéma Aristotelovy nauky o čtyřech elementech (viz obr. 2), připojuje stručnou zmínku o Porfyriovi (viz část 2.1 tohoto příspěvku) a pak vsouvá relativně samostatnou dvoustránkovou část, která kromě výsledku uvedeného už u Boethia obsahuje ještě vztah pro stanovení počtu všech permutací n prvků, který dnes vyjadřujeme

[9]Jezuité (Societas Jesu, česky Tovaryšstvo Ježíšovo) jsou řeholní řád, který byl založen sv. Ignácem z Loyoly (1491 – 1556) v Paříži v r. 1534 a schválen papežem Pavlem III. v r. 1540. Do Prahy přišli v r. 1556 a založili zde kolej, která je běžně nazývána Klementinum. V r. 1773 byl řád zrušen papežem Klimentem XIV, ale v r. 1814 byl obnoven papežem Piem VII.

[10]Poznamenejme ovšem, že do jezuitských škol měli přístup i studenti, kteří nebyli členy řádu, a v českých zemích před r. 1618 i nekatolíci (viz např. [5], str. 66).

pomocí faktoriálu ve tvaru $n!$, a vztah pro stanovení počtu všech kombinací dvou-, tří-, atd. až n-prvkových, které lze utvořit z n prvků;[11] dnes bychom tento vztah zapsali ve tvaru $2^n - 1 - n$. Podle našeho názoru byl uvedený Claviův komentář spolu s autoritou jeho autora příčinou (nebo aspoň jednou z příčin) toho, že kombinatorická problematika byla v jezuitském bádání živá po celé 17. století.



Obr. 2 Claviovo znázornění vztahů mezi elementy

3.2 Nejstarší česká kombinatorická úloha

V r. 1637 vyšel v Praze v klementinské koleji spis[12]

Brausírna lidského jazyka, celou abecedou naskrz vysvětlená, z latinského exempláře ctihodného P. Jeremiáše Drexelia z Societatis JESU, dvorského kazatele J. M. kurfiřta bavorského na česko přeložená a na jevo vydaná.

Spis má 703 stránek a představuje výklad všech možných hříchů, které lze spáchat jazykem (tj. mluvením, jako např. lhaní, pomlouvání atd.).[13] Na

[11] Podle [3] (str. 25) byla uvedená tři kombinatorická pravidla na konci 16. století všeobecně známa a Clavius je pouze převzal.

[12] Pravopis je upraven do dnešní podoby.

[13] Jedná se o překlad Drexeliova spisu *Orbis phaeton hoc est de universis vitiis linguæ*, vydaného v Mnichově v r. 1629.

str. 474 začíná kapitola čtyřicátá první s názvem *Otiosa Lingua. Zahálčivý jazyk* s podtitulkem *že jazyk zahalečný rozličné těžké škody přináší a často k pokutám přichází.* Na str. 485 začíná § 5 obsahující následující úlohu:[14]

Často toliko slovo jedinké, marné a ne zlým úmyslem promluvené, k velikým těžkostem a pádům nás přivozuje, rovněž jako olej na kment nebo pěkné dřevo vylitý rozloží se a rozleze. Dám ti, čtenáři, pěkný příklad:

Jeden pozval šest pánů ke stolu. Když měli zasednouti, každý se zdráhal, žádný nechtěl před jiným seděti, nebylo konce klanění, uctivosti, ponížení; každý chtěl, aby někdo jiný nad ním seděl. Hospodář pracoval to spokojiti:

„Milí páni, chceme-li pak dnes před stolem státi. Nechť se každý posadí, kde mu nejblížeji, nebo já vás tolikrát pozvu, kolikrát můžete vaše sedění změniti."

Bylo to slovo marné a daremné, nedal na to pozor ani dobře neuvážil, kolikráte by se to změnění mohlo státi. Prosím, čtenáři, rozvrhni, kolikrát šest hostí mohou místo své změniti; já dobře vím, ty pak sotva mi budeš věřiti. Pozoruj: podle aritmetiky, jestli jich šest za stolem sedí, mohou sedmsetkrát a dvacetkrát místo své proměniti, takže se žádný z nich na své místo nedostane.[15] *Dáme-li každému roku 365 dní (neb tolik jich má vskutku), tedy onen nešetrný hospodář (pokud chtěl svému slovu zadosti učiniti) přes celý rok musel by své hosty každodenně dvakrát hostiti krom pěti dnů před velikonocemi. Ještě nevěříš? Netoliko uším, ale i očím tvým patrně to předložím. Šest liter a, b, c, d, e, f mají tobě místo šesti hostí sloužiti, kteréžto litery jináč vždy na obzvláštním místě sázím. Čtenáři, dej se do této tabule a nestejskej sobě shledati, kolikrát každý host nové místo dostane.*

V českém překladu pak následuje tabulka všech sto dvaceti permutací uvedených šesti písmen s písmenem *a* na prvním místě, v latinském textu je kompletní tabulka všech sedmi set dvaceti permutací uvedených šesti písmen. Český překlad doplňuje uvedenou tabulku poznámkou, že podobně by se pokračovalo dále, a uvádí i počet možných rozsazení sedmi a osmi hostů, což v latinském originálu není. Anonymní český překladatel[16] tedy zkrátil (z dnešního hlediska poněkud absurdně působící) původní tabulku a místo ní se pokusil spočítat něco navíc; bohužel se do textu vloudila chyba a počet všech možných permutací osmi prvků uvádí (slovně) jako *čtyři tisíce tři sta a dvacet* místo správných 40320.

Pater Drexelius nebyl matematikem a uvedený spis není odborným teologickým spisem, ale náboženskou knihou určenou (v dnešní terminologii) široké čtenářské veřejnosti. Výskyt kombinatorické úlohy ve spisu tohoto druhu svědčí dle našeho názoru o tom, že v první polovině 17. století byly v jezuitském řádu základní kombinatorické poznatky součástí všeobecného základního vzdělání a jezuité jich běžně používali.

[14] Tuto úlohu uvádí i Leibniz (viz 7. část tohoto příspěvku).

[15] Konec věty je nejasný.

[16] Podle Sommervogela ([6], díl III, sloupec 193) byl překladatelem P. G. Ferus, S. J., což je (podle téhož pramene) český jezuita Jiří Ferus Plachý (1585 – 1655 nebo 1659). Podle [7] bývá zaměňován se známějším jezuitou Jiřím Plachým (?1606 – 1664), který proslul při obraně Prahy proti Švédům v r. 1646 a byl synovcem Jiřího Fera Plachého; v Sommervogelově odkazu jsou však některá místa poněkud nejasná.

Na závěr připojme několik základních životopisných informací o Jeremiáši Drexeliovi. Narodil se r. 1581 v Augsburgu, do jezuitského řádu vstoupil v r. 1598, působil nejprve jako profesor na nižším stupni řádových škol (odpovídajících zhruba dnešnímu gymnáziu) a pak jako dvorní kazatel na dvoře bavorského kurfiřta Maxmiliána I.[17] Byl zřejmě velice plodným autorem; seznam jeho prací v [6] obsahuje 34 položek a bibliografické údaje o nich (spolu s překlady a dalšími vydáními) zabírají dvanáct stránek formátu A4. Zemřel v Mnichově v r. 1638.

3.3 Andreas Tacquet (1612 – 1660)

Andreas Tacquet vlastně do této kapitoly nepatří, protože se zabýval kombinatorikou v rámci aritmetiky, nikoli filozofie, a podle námi provedeného rozlišení tedy jeho dílo patří do matematického proudu v historii kombinatoriky. Protože se zde ale snažíme podat základní přehled o vztazích jezuitů ke kombinatorice, pojednáme zde krátce i o Tacquetovi.

Narodil se a zemřel v Antverpách, kde také v r. 1629 vstoupil do jezuitského řádu. Někde se píše, že v matematice byl žákem Gregoria a Sancto Vincentio, jiné prameny však uvádějí jako jeho učitele matematiky Williama Boelmanse, který byl Gregoriovým žákem a sekretářem. Většinu života strávil jako učitel matematiky na různých jezuitských kolejích (Bruggy, Lovaň, Antverpy) a jeho učebnice matematiky byly velice populární; uvádí se, že jeho spisy ovlivnily i Pascala.

O kombinatorice je krátce pojednáno v jeho knize *Arithmeticæ theoria et praxis*, která vyšla v Lovani v r. 1656.[18] Kombinatorice je věnována osmá kapitola páté knihy (str. 375 – 383), která je obsahově poměrně chudá. Obsahuje pouze dva výsledky, z nichž prvním je pravidlo pro stanovení počtu k-prvkových kombinací z n prvků, kde Tacquet uvádí jako autora francouzkého matematika Pierra Herigona (1580 – 1643); v dnešní symbolice má toto pravidlo tvar

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}\,.$$

Dále uvádí obvyklé pravidlo pro stanovení počtu všech permutací z n prvků a celou kapitolu končí příkladem:

Tisíc milionů písařů za tisíc milionů let nevypíše všechny permutace 24 písmen abecedy, když každý denně napíše 40 stránek a na každé z nich bude 40 permutací.

Při výpočtu bere Tacquet délku roku rovnou 366 dnům a vychází mu, že oni písaři stihnou napsat celkem $5{,}856\cdot 10^{23}$ permutací, zatímco všech permutací je podle Tacqueta[19] 620 448 401 733 239 439 360 000.

Poznamenejme na závěr, že pokud se mluví o Pascalově ovlivnění Tacquetem, určitě se to netýká kombinatoriky. Obsah kombinatorické části Pascalova *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku* nemá takřka nic společného s uvedenou prací

[17] Maxmilián I. z rodu Witellsbachů (1573 – 1651) byl bavorským vévodou od r. 1597 a v r. 1623 získal kurfiřtskou hodnost.

[18] Zde vycházíme z třetího vydání této knihy, které vyšlo v Bruselu r. 1683.

[19] Programový produkt MAPLE dal pro 24! stejnou hodnotu.

Tacquetovou (výjimkou je Herigonův vztah pro stanovení počtu kombinací, kde se však oba odvolávají právě na Herigona); navíc (jak už bylo řečeno) Pascalův spis byl hotov (aspoň zčásti) už v r. 1654, tedy dva roky před prvním vydáním uvedného spisu Tacquetova, a je daleko obsažnější.

3.3 Sebastian Izquierdo (1601 – 1681)

Narodil se ve Španělsku (Alcaraz), do jezuitského řádu vstoupil v r. 1623 a působil na různých řádových školách ve Španělsku; na 11. generální kongregaci jezuitského řádu byl jmenován asistentem pro Španělsko a Západní Indii. Zemřel v Římě.

Z našeho hlediska je zajímavý jeho spis *Pharus scientiarum*;[20] z dnešního hlediska bychom ho asi zařadili do kategorie filozofických spisů věnovaných „vědě o vědě".[21] Jedná se o dvousvazkový foliant, jehož druhý díl obsahuje na str. 318 – 358 část *Disputatio XXIX. De Combinatione*, a podle našeho názoru je matematický obsah této části natolik pozoruhodný, že by zasloužil samostatný rozbor; zde podáme pouze jeho stručný přehled.

Spis obsahuje všechny základní pojmy dnešní kombinatoriky, tj. kombinace, variace a permutace bez opakování i s opakováním (i když v jiné termínologii). Pro stanovení počtu k-prvkových kombinací z n prvků (bez opakováním i s opakováním) používá aritmetický trojúhelník, pro stanovení počtu k-prvkových variací z n prvků (bez opakování) používá podobnou tabulku, jejíž obsah bychom dnes asi vyjádřili rekurentním vzorcem

$$V(n,k) = n \cdot V(n-1, k-1) \quad .$$

Tyto základní výsledky jsou doplněny dalšími zajímavostmi: např. Claviovo stanovení počtu všech kombinací, které lze utvořit z n prvků, je doplněno stanovením počtu všech variací, které lze utvořit z n prvků; je zde uvedena úloha (podobná úloze Tacquetově) ukazující, jak rozsáhlá je množina všech slov (která jsou chápána jako variace s opakováním), která lze utvořit z 23 písmen latinské abecedy), a našlo by se i leccos dalšího, ale – jak už bylo řečeno – podrobný rozbor této Izquierdovy práce nelze provést v rámci stručného informativního příspěvku.

V pracích věnovaných dějinám matematiky se Izquierdovo jméno neobjevuje,[22] i když jeho kombinatorické výsledky jsou daleko rozsáhlejší než třeba kombinatorické výsledky Tacquetovy, který je v historii kombinatoriky tradičně

---

[20]Na ostrově Faru u Alexandrie byl ve starověku mohutný maják, vysoký přes 100 metrů, který byl považován za jeden ze sedmi divů světa; dnes bychom tedy název spisu přeložili nejspíš jako *Maják věd.*

[21]Úplný název spisu zní takto: *Pharus scientiarum ubi quidquid ad cognitionem humanam humanitus acquisibilem pertinet, ubertim iuxta, atque succincte pertractatur. Scientia de scientia, ob summam universalitatem utilissima, scientificisque iucundissima, scientifica methodo exhibetur*; český překlad tohoto názvu by mohl znít *Maják věd, kde je bohatě a stručně pojednáno o všem, co se týká lidského rozmnožování lidského poznání. Věda o vědě, vyložená kvůli nejvyšší obecnosti nejvhodnější a nejpříjemnější vědeckou metodou.*

[22]Jedinou zmínku o něm jsme nalezli v komentáři k Pascalovu *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku* v Pascalových sebraných spisech [8] na str. 441.

zmiňován. Zdá se, že tento Izquierdův spis zůstal vně jezuitského řádu zcela neznámý a pravděpodobně další vývoj kombinatoriky nijak neovlivnil; přesto se domníváme, že by Izquierdo neměl být v dějinách kombinatoriky přehlížen.

3.5 Athanasius Kircher (1602(?) – 1680)

Athanasius Kircher byl typickým polyhistorem a ve své době patřil k nejznámějším učencům; věhlas získal (kromě jiného) rozluštěním (bohužel chybným) egyptských hieroglyfů. Narodil se v Německu (Geisa a.d. Ulster), do jezuitského řádu vstoupil r. 1616 a po skončení studií působil až do r. 1640 jako učitel na různých jezuitských kolejích v Německu, později v Římě; po r. 1640 působil jako nezávislý badatel (dnes bychom možná řekli „učenec na volné noze", kdyby něco takového existovalo), jehož výzkumy byly štědře sponzorovány hodnostáři světskými i církevními. Zemřel v Římě.

Jeho dílo je velice rozsáhlé a zdá se, že v poslední době je mu věnována zvýšená pozornost, ale v dějinách matematiky se jeho jméno prakticky neobjevuje. Kombinatorice věnoval několik stránek ve svém spisu *Ars magna sciendi*, který vyšel v Amsterodamu v r. 1669; z našeho hlediska je zajímavé, že na titulním obrázku se objevuje název knihy v podobě *Ars magna sciendi sive combinatoria.*

Kombinatorice v matematickém smyslu se Kircher v této knize věnuje na str. 155 – 162, kde v podstatě opakuje výsledky Christophera Clavia. Proti Claviovi je zde navíc uvedena tabulka počtu všech možných permutací (tj. tabulka faktoriálů) až do 50!, bohužel s chybami, a je uveden postup stanovení počtu permutací s opakováním jednoho prvku; pro počet všech prvků $n \leq 10$ jsou výsledky shrnuty do tabulky. Rovněž je třeba konstatovat, že uvedený Kircherův spis vyšel deset let po spisu Izquierdovu a Kircher tedy mohl Izquierdův spis znát, přesto – pokud se kombinatoriky týče – zůstal Kircher daleko za spisem Izquierdovým.

Z historického hlediska je zajímavé, že Kircher dále (na str. 165) využívá těchto kombinatorických výsledků ke studiu své varianty filozofického systému Ramona Lulla; vzhledem k numerickým chybám je tato část bohužel poněkud nepřehledná.

3.6 Caspar Knittel (1644 – 1702)

Narodil se ve Slezsku,[23] do jezuitského řádu vstoupil v r. 1660 a po studiích prožil většinu života v Praze, kde působil kromě jiného i jako profesor matematiky v Klementinu a jeden rok byl dokonce rektorem Karlo-Ferdinandovy univerzity. Zemřel v Telči.

Z našeho hlediska je zajímavý Knittelův filozofický spis *Via regia ad omnes scientias et artes*, jehož první vydání vyšlo v Praze v r. 1682. Prof. Sousedík v knize [9] charakterizuje tento spis jako projev barokního lullismu v českých zemích a uvádí ho do souvislosti s již zmiňovanými spisy Izquierdovými a Kircherovými. Z našeho hlediska je ve spisu zajímavá *Pars secunda. De arte combinatoria*, kde Knittel shrnuje některé základní kombinatorické poznatky.

[23] V německy psaných pramenech je uváděno jako místo narození Glatz, není však jasné, jaké současné lokalitě toto místo odpovídá.

I když mezi citovanými autory uvádí Knittel i Izquierda, nedosahuje bohužel jeho úrovně. Kombinatorická část Knittelova spisu začíná příkladem, který je variantou příkladu Drexeliova (viz část 3.2 tohoto příspěvku); rozdíl proti Drexeliovi spočívá v tom, že u Knittela střídá místa 12 pánů.[24] Pak opakuje výsledky Claviovy a Tacquetovy; tyto výsledky doplňuje vztahem pro stanovení počtu všech k-prvkových variací z n prvků, který bychom dnes zapsali ve tvaru $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ a uvádí, že toto řešení pochází ze spisu jiného jezuity Caspara Schotta *Magia arithmetica.*

Kombinatorická část Knittelova spisu končí úlohou, která se týká vytváření variací z variací. Výklad není příliš jasný, ale naštěstí je připojen příklad, ze kterého lze pochopit, co má Knittel na mysli: mějme čtyři druhy vína (české, rakouské, italské a španělské) a tři druhy vod (přírodní, citronovou a skořicovou); ptáme se, kolika způsoby lze utvořit variace obsahující jednu dvojici vína a a jednu dvojici vod. Knittelovo řešení lze formulovat takto: ze čtyř prvků (čtyř vín) lze utvořit 12 dvouprvkových variací, ze tří prvků (tří vod) lze utvořit 6 dvouprvkových variací, takže máme celkem $12.6 = 72$ způsobů, jak lze spojit dvojici vína s dvojicí vod, a protože lze ještě zaměnit pořadí těchto dvojic, je celkem 144 řešení dané úlohy.

Za zmínku ještě stojí skutečnost, že v závěru kombinatorické části Knittelova spisu je citován jeden příklad Paula Guldina; citace bohužel není přesná, ale zdá se, že se v podstatě jedná o jakousi variantu příkladu Tacquetova s tím rozdílem, že je posuzován objem, který by zaplnily knihy obsahující všechny možné permutace třiadvaceti písmen abecedy.[25]

Podle citací u Knittela lze tedy soudit, že kombinatorické výsledky lze najít i u jezuitů **Caspara Schotta** (1608 - 1666) a **Paula Guldina** (1577 - 1643), ale průzkum jejich prací z hlediska kombinatoriky jsme zatím neprovedli; jak už bylo řečeno v úvodu k této části příspěvku, jezuitská publikační činnost byla rozsáhlá a není možné prozkoumat ji v rámci jednoho příspěvku.

4. Doplňující poznámky k filozofickému proudu

4.1 Magické čtverce

Magické čtverce představují zcela samostatnou část kombinatoriky. Vznikly v Číně a do Evropy pronikly asi až ve 14. století přes indické a arabské matematiky; posledním spojovacím článkem byla pravděpodobně Byzanc (podle [1], str. 2166). Celá tato problematika je zpracována v knize [10]; i když se nejedná o knihu matematickou,[26] jedná se o natolik podrobné zpracování historie

[24] Je otázkou, nakolik je zde Knittel původní, protože Leibniz (viz 7. část tohoto příspěvku) uvádí, že autorem úlohy o dvanácti hodujících pánech je jistý Georges Henischius, *Medicus Augustanus.*

[25] Knittel ovšem říká: ... *tot esse permutationes et combinationes solarum 23. literarum alphabeti* ... , takže není jasné, co má vlastně na mysli.

[26] Například na str. 16 uvedené knihy je tvrzení: *Dnes víme, že všechna dokonalá čísla musí být sudá,* ... , což není pravda (viz např. FUCHS, E.: *Co ještě nevíme o přirozených číslech (2),* Učitel matematiky 7 (1998/99), č. 2, str. 66).

magických čtverců, že považujeme za možné ponechat je v tomto příspěvku zcela stranou.[27]

4.2 Anagramy

Podle Slovníku spisovného jazyka českého (NČSAV Praha 1960) je anagram nové slovo vzniklé přeskupením písmen slova základního. Z historického hlediska je toto vysvětlení příliš úzké, protože anagramy nebyly vytvářeny jen přeskupováním (matematik by asi řekl: permutováním) písmen, ale i celých slov. Byly známy už v antice, hrály roli v židovské kabale,[28] pozornost jim byla věnována i ve středověku a v renesanci; není proto překvapivé, že se v 17. století objevily v souvislosti s problematikou kombinatorickou. Nebudeme zde tuto problematiku sledovat, protože je natolik speciální, že by vyžadovala samostatný příspěvek; uvedeme pouze jeden příklad jako ukázku (vycházíme přitom z [11]).

Základem anagramu je následují latinský verš[29] oslavující Pannu Marii:

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cœlo.

Autorem verše je lovaňský jezuita Bernhard Bauhusius (1575 – 1619) a tvorbou anagramů vzniklých permutacemi slov daného verše se v 17. století zabývala řada učenců nejrůznějšího zaměření, mezi nimi i matematici John Wallis[30] a Jakob Bernoulli. Wallisovi (i dalším) je pochopitelně jasné, že všech možných permutací uvedených osmi slov je $8! = 40320$, ale úlohou je stanovit počet těch anagramů, které vyhovují požadavkům latinské metriky. Jakob Bernoulli (viz 8. část tohoto příspěvku) tuto úlohu uvádí na začátku druhé části svého spisu *Ars conjectandi* (tato část je věnovaná kombinatorice) a v latinském originálu tohoto spisu (v německém překladu [11] je tato část vynechána) věnuje tři stránky schematickému rozepsání všech možných anagramů, zachovávajících pravidla latinské metriky, přičemž dospívá k závěru, že jich je 3312.

---

[27] Vážné zájemce o magické čtverce ještě upozorňujeme, že nedávno vyšel český překlad jednoho renesančního spisu, ve kterém se objevují magické čtverce. Jedná se knihu, kterou napsal Heinrich Cornelius Agrippa von Nettesheim (1487 – 1535) a pod názvem *De occulta philosophia libri tres* vyšla v r. 1531 (údaje o roku vydání se v různých pramenech liší; rok 1531 je uveden na osmé (nečíslované) straně exempláře, který měl autor příspěvku v rukách); magické čtverce jsou ve druhé knize tohoto spisu, jehož překlad pod názvem *Okultní filosofie* vydalo nakladatelství Trigon v Praze v r. 1994 (mimochodem je zajímavé, že Agrippa výslovně v názvu uvádí, že jeho spis je členěn do tří knih, ale v českém překladu vyšly knihy čtyři).

[28] O souvislostech mezi kabalou a kombinatorikou pojednává např. článek RABINOVITCH, N. L.: *Combinations and probability in rabbinic literature*. Biometrika roč. 57 (1970), str. 203 – 205.

[29] Překlad by mohl znít: *Tolik je tvých darů, Panno, jako je hvězd na nebi.*

[30] John Wallis (1616 – 1703) byl kaplanem anglického krále Karla II. a profesorem geometrie v Oxfordu. Kromě jiného vydal v r. 1685 spis *Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises*, jehož část je věnována kombinatorice; v latinském překladu tohoto spisu, který vyšel pod názvem *De algebra tractatus* v r. 1693, je naše anagramatická úloha řešena v rámci této kombinatorické části na str. 494 – 495.

5. Matematický proud

V této části podáme pouze základní přehled autorů a prací uváděných v evropské historii kombinatoriky před vydáním spisu Jacoba Bernoulliho *Ars conjectandi*. Vycházíme přitom hlavně z prací [1, 2, 3]; neprováděli jsme (až na několik výjimek) vlastní průzkum původních pramenů, takže posouzení otázky, zda uváděná práce skutečně patří do historie kombinatoriky nebo ne (viz názor vyslovený v 1. části tohoto příspěvku) ponecháváme stranou.

Z historického hlediska je zřejmé, že důležitým matematickým inspiračním zdrojem pro kombinatoriku byla figurální čísla, která byla studována už v antice a přes Nikomacha z Gerasy a Boethia pronikla i do středověké matematiky. Matematická souvislost mezi kombinatorikou a figurálními čísly je zcela jasně vyjádřená u celé řady autorů včetně Jakoba Bernoulliho, přesto v tomto přehledném článku ponecháme tuto souvislost stranou.

Nejstarším autorem, kterého jsem našli uvedeného v souvislosti s historií kombinatoriky v Evropě, je **Rabbi ben Ezra**, který ([3], str. 34) žil ve Španělsku a stanovil okolo r. 1140 počet všech k-prvkových kombinací sedmi prvků, není však jasné, zda znal obecné pravidlo pro stanovení počtu kombinací. Protože oněch sedm kombinovaných objektů byly tehdy známé planety, je otázka, zda by podle našeho dělení vývoje kombinatoriky Rabbi ben Ezra nepatřil spíše do filozofického proudu.

Chronologicky dalším autorem, který je jmenován v souvislosti s historií kombinatoriky, je **Jordanus Nemorarius** ([1], str. 2166), který pravděpodobně pocházel z Německa a u kterého se v první polovině 13. století objevuje aritmetický trojúhelník i návod k jeho sestrojení; nepodařilo se nám bohužel zjistit, zda se tento trojúhelník u Jordana Nemoraria objevuje v souvislosti s řešením úloh kombinatorických nebo zda sloužil jako pomůcka k řešení úloh aritmetických.

Levi ben Gerson (1288 – 1344) působil ve Francii (Avignon); své spisy psal hebrejsky, ale některé z nich byly brzo přeloženy do latiny a staly se známými. Podle [2] (str. 43) a [3] (str. 34) se zabýval kombinatorikou a znal obecná pravidla pro stanovení počtu permutací n prvků (v dnešním značení $n!$), k-prvkových variací z n prvků (v dnešním značení $V(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$) a k- prvkových kombinací z n prvků (v dnešním značení $C(n,k) = V(n,k)/k!$);[31] navíc věděl, že $C(n,k) = C(n,n-k)$. To jsou na začátku 14. století pozoruhodné výsledky, je ale otázka, nakolik vstoupily ve známost; podle [2] asi upadly v zapomenutí a byly později objeveny znovu. Podle některých autorů kombinatorika u Židů úzce souvisela s kabalou; je tedy otázka, zda by i Levi ben Gerson neměl být podle našeho pojetí historie kombinatoriky zahrnut spíše do filozofického proudu.

V souvislosti s aritmetickým trojúhelníkem bývá uváděno několik německých matematiků. U **Petera Apiana** (1495 – 1552) se objevuje aritmetický trojúhelník na titulní straně spisu *Eyn Neue unnd wohlgegründete underweysung aller Kauffmanß Rechnung* ... , který vyšel v Ingolstadtu v r. 1527. K tomu je ovšem

[31] To je vlastně pravidlo, které bylo v 17. století asi znovu objeveno Herigonem; už o něm byla řeč ve 3. části tohoto příspěvku

třeba poznamenat, že nikde uvnitř uvedené knihy se nám nepodařilo objevit žádnou zmínku o tomto trojúhelníku, takže jeho uvedení na titulním listu se nám jeví spíše jako grafická zvláštnost než jako záležitost související s historií kombinatoriky.

Dalším německým autorem uváděným v této souvislosti je **Michael Stifel** (1487 – 1567) a jeho spis *Arithmetica integra*, který vyšel v Norimberku v r. 1544 a později byl přeložen do němčiny. Spis obsahuje jednu z mnoha historických variant aritmetického trojúhelníka, ale kombinatoriky se vůbec netýká a onoho aritmetického trojúhelníka je v něm použito pouze jako pomůcky při „extrakci kořenů“, tj. při výpočtu odmocnin. Ve stejné souvislosti se podle [3] (str. 7) objevuje poněkud odlišná verze aritmetického trojúhelníka u Stifelova současníka **Johanna Scheubelia** (německy: Scheybla) (1494 – 1570) ve spisu *Tractatus quintus* (1545).

Podle [3] (str. 36) souvisel rozvoj kombinatoriky v Evropě hlavně se stanovením počtu situací, které se mohou vyskytnout při házení hracími kostkami. V této souvislosti bývají uváděni autoři, kteří se objevují rovněž v prehistorii počtu pravděpodobnosti a tím se dostává historie kombinatoriky do blízkosti vzniku počtu pravděpodobnosti; podle našeho názoru zde ovšem vzniká otázka, zda pouhé zjišťování počtu různých možností při házení hracími kostkami (a v mnoha případech se o nic jiného nejednalo) lze považovat za kombinatoriku.

Nicolo Tartaglia (1499(?) – 1557) ve spisu *General trattato di numeri et misura* (1556) podal návod k řešení úlohy o tom, kolika způsoby může padnout n kostek (viz např. [2], str. 31 a násl.). Protože přitom nepřihlíží k pořadí (tj. například při házení dvěma kostkami A, B nerozlišuje situaci, kdy na A padne a a na B padne b, od situace, kdy na B padne a a na A padne b), zjišťuje vlastně (v dnešní terminologii) počet n-prvkových kombinací s opakováním, které lze utvořit ze šesti prvků. Výsledek neuvádí ve tvaru vzorce, ale rekurentního postupu (dnes bychom asi řekli: algoritmu), který umožňuje řešení úlohy pro dané n na základě známého řešení pro $n-1$; svoji metodu neformuluje obecně, ale ukazuje řešení postupně pro $n = 1$ až $n = 8$, čímž je postup (ovšem bez jakéhokoli zdůvodnění) jasný.

Hieronymus Cardano (1501 – 1576) se věnoval kombinatorice (podle [3], str. 43 a násl.) ve spisech *De subtilitate* (Norimberk, 1550) a *Opus novum de proportionibus numerorum* (Basilej, 1570). Uvádí zde aritmetický trojúhelník a používá ho ke stanovení počtu k-prvkových kombinací z n prvků; navíc znal i některé vlastnosti aritmetického trojúhelníka: $C(n,k) = C(n,n-k), C(n,k) = (n-k+1)C(n,k-1)/k$, takže pro pro postupné stanovení počtu jedno-, dvou-, ... , k-prvkových kombinací používal pravidla, připisovaného později Herigonovi, o kterém už byla řeč.

Marin Mersenne (1588 – 1648) uvádí ve svém spisu *Harmonicorum libri XII* a jeho francouzském překladu (Paříž 1636 – 37) (podle [3], str. 45) Cardanův aritmetický trojúhelník a všechna tři kombinatorická pravidla nacházející se u Christophera Clavia, dále pak pravidlo pro stanovení počtu k-prvkových variací z n prvků ve tvaru $V(n,k) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ a konečně pravidlo pro stanovení počtu permutací s opakováním $n!/(a!b!c!\ldots)$. Těchto pravidel používá pro stanovení počtu kombinací a permutací hudebních not.

Náš výčet matematiků podílejících se na formování kombinatoriky určitě není úplný; není možné v krátkém přehledném příspěvku zpracovat celou historii kombinatoriky a navíc (jak bylo řečeno hned na začátku) tento příspěvek míří spíše k filozofickému proudu v historii kombinatoriky (i když (jak už rovněž bylo řečeno) nelze oba tyto proud od sebe striktně oddělit). Proto považujeme za možné v tuto chvíli náš stručný přehled matematického proudu v historii kombinatoriky ukončit a přikročit k základním informacím o Pascalovi, Leibnizovi a Jakobu Bernoullim, kteří představují přechod od prehistorie kombinatoriky ke kombinatorice v dnešním pojetí; přitom vždy uvedeme, jaké prameny tito tři autoři uvádějí, takže tím bude náš přehled matematického proudu doplněn o další jména.

6. Blaise Pascal (1623 – 1662)

Narodil se v Clermont-Ferrandu; jeho otec Etienne Pascal (1588 – 1651) byl povoláním soudce, ale rovněž se zabýval matematikou (Pascalovy závitnice). V r. 1631 se rodina přestěhovala do Paříže. Blaise Pascal byl všestranně nadaný; ve věku 16 let publikoval pojednání o kuželosečkách, ve dvaceti sestrojil počítací strojek, v letech 1648 – 1653 opakoval Toricelliho pokusy k výpočtu atmosférického tlaku, v letech 1653 – 1654 se zabýval teorií pravděpodobnosti, v letech 1658 – 1659 studoval cykloidu (z hlediska výpočtu obsahu, těžiště apod., čímž předjímal infinitesimální metody Newtonovy a Leibnizovy). Zabýval se rovněž filozofií a teologií; v r. 1656 uveřejnil ostře protijezuitské *Listy venkovanovi* a od r. 1658 pracoval na obraně křesťanského náboženství, z níž napsal pouze fragmenty vydané po jeho smrti pod názvem *Penséees.*

Pojednání o aritmetickém trojúhelníku vyšlo v r. 1665 (tj. až po Pascalově smrti), ale z Pascalovy korespondence s Fermatem je zřejmé, že aspoň některé jeho části byly napsány už v r. 1654. Jedná se vlastně o soubor pojednání, která nebyla napsána jako souvislý celek; některá jsou napsána francouzsky, některá latinsky, obsahově se částečně překrývají a na některých místech není ani zcela jasné, zda se jedná o dvě různá pojednání nebo o dvě části téhož pojednání. Protože ani přístup francouzských editorů Pascalových spisů k této otázce není stejný, uvedeme zde přehled názvů a rozsahů všech pojednání celého souboru podle vydání [8]:[32]

I. Traité du triangle arithmétique .... *20 str.*
II. Divers usages du triangle arithmétique dont le generateur est l'unité.
II.1 Usage du triangle arithmétique pour les ordres numériques .... *3 str.*
II.2 Usage du triangle arithmétique pour les combinaisons .... *8 str.*
II.3 Usage du triangle arithmétique pour determiner les partys qu'on doit faire entre deux joüeurs qui joüent en plusieurs parties .... *20 str.*
II.4 Usages du triangle arithmétique pour trouver les puissances des binomes et des apotomes .... *4 str.*

[32]Pořadové číslování těchto částí je naše vlastní; ve vydání [8] jsou naše části I. – VII. zahrnuty do jedné části s číslem LXIV, naše části VIII a IX mají v [8] čísla LV a LVI, a konečně naše části X. – XII. jsou v [8] zahrnuty do jedné části s číslem LXV.

Celá tato část má ve vydání [8] stejné stránkové záhlaví *Traité du triangle arithmétique*, vydavatel ji tedy považuje za jeden celek; část II má ale samostatnou titulní stránku, takže je asi považována za relativně samostatnou část onoho celku.

III. Traité des ordres numériques .... *8 str.*
IV. De numericis ordinibus tractatus .... *8 str.*
V. De numerorum continuorum productis seu de numeris qui productuntur ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium .... *8 str.*
VI. Numericarum potestatum generalis resolutio .... *6 str.*
VII. Combinationes .... *23 str.*

Následující dvě pojednání byla zahrnuta do vydání r. 1665, ve vydání [8] jsou ale uvedena na jiném místě, protože byla napsána dříve než pojednání I.

VIII. De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis .... *13 str.*
IX. Potestatum numericarum summa .... *11 str.*

Následující tři pojednání byla nalezena dodatečně v rukopise, protože se však týkají stejné problematiky, jsou ve vydání [8] připojena jako dodatky.

X. Triangulus arithmeticus .... *15 str.*
XI. Numeri figurati seu ordines numerici .... *7 str.*
XII. De numericorum ordinum compositione .... *3 str.*

Z názvu spisu *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku* lze soudit, že Pascal sám asi kombinatoriku za samostatný okruh problémů nepovažoval, spíše ji považoval za aplikační oblast aritmetiky. Proto nejprve v části I studuje zcela obecně vlastnosti aritmetického trojúhelníka[33] a potom – při výkladu jeho aplikací – ukazuje i možnosti jeho použití v kombinatorice. Kombinatorika tedy není primárním předmětem Pascalova zájmu; zajímá ho jen potud, pokud na ní může demonstrovat význam výsledků dosažených při studiu aritmetického trojúhelníka.

Kombinatorice jsou věnovány dvě části spisu označené v našem přehledu jako II.2 a VII, část II.2 je však pouze francouzským překladem (v závěru nepatrně pozměněným) začátku latinského pojednání VII. Jedná se o text čistě matematický, bez jediného „názorného“ příkladu (jako je přesazování pánů na hostině, stanovení počtu anagramů apod.). Z hlediska kombinatoriky je ovšem třeba říci, že Pascal se zabývá pouze kombinacemi bez opakování a všechna tvrzení části VII (kromě prvních čtyř lemm) představují vlastně (z dnešního hlediska) tvrzení o vlastnostech čísel uspořádaných do Pascalova trojúhelníka „přeložená“ do terminologie kombinací.

Podrobný rozbor Pascalových výsledků přesahuje rámec tohoto příspěvku; lze ho najít v [3] a částečně (s orientací spíše na počet pravděpodobnosti) v [12]. Z historického hlediska poznamenejme, že Herigonův vzorec pro stanovení počtu kombinací, který uvádí Tacquet (i další autoři) s odvoláním na Herigona, je u Pascala uveden nejprve jako poslední úloha části I, ale bez odvolání na Herigona; krátké odvolání na Herigona je na konci části II.4. Znovu se tento

[33] Některé části tohoto Pascalova textu jsou přeloženy v [12].

vzorec objevuje jako poslední úloha v části VII, ale jako autor je zde uveden jistý pan de Gagnières, o kterém se nám však nepodařilo nikde nic bližšího zjistit.

7. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz se narodil v Lipsku a po získání doktorátu práv v r. 1666 vstoupil do diplomatických služeb mohučského kurfiřta, což ho přivedlo na čtyři roky (1672 – 1676) do Paříže, kde navázal řadu vědeckých kontaktů (včetně matematických). Od r. 1676 působil jako knihovník a dvorní rada v Hannoveru (pro zajímavost poznamenejme, že v letech 1710 – 1712 zde působil i hudební skladatel G. F. Händel), kde také zemřel.

Jeho vědecké zájmy byly neuvěřitelně široké; v dějinách matematiky je znám hlavně jako jeden ze zakladatelů infinitesimálního počtu. Kombinatoriky se týká jeho práce citovaná obvykle jako *Ars combinatoria*; její úplný název (podle vydání z r. 1690) zní

ARS COMBINATORIA *Gottfrieda Wilhelma Leibnize z Lipska, ve které je vybudována na základech aritmetiky nauka o spojování a přemísťování s novými pravidly, & je ukázáno použití obojího na veškerém okruhu věd; rovněž jsou obsaženy nové základy umění přemýšlet neboli logiky vynalézání. Předeslán je přehled celého pojednání, & jako dodatek přesný důkaz existence Boží dovedený k matematické jistotě.*[34]

Spis byl vydán v r. 1666, kdy bylo Leibnizovi 20 let a matematikou se ještě vůbec nezabýval. Má rozsah zhruba 100 stran a problematice matematické je věnována (nejvýše) polovina z nich; název spisu nasvědčuje tomu, že Leibnizovi vlastně o matematiku ani nešlo a užíval jí pouze jako nástroje k řešení problémů, které bychom dnes nejspíše označili jako logicko-filozofické (ostatně v některých vydáních Leibnizových spisů je tento spis řazen mezi spisy filozofické). Spis je proto dost obtížně srozumitelný[35] a zde se omezíme na referát o tomto spisu podle údajů v [2, 3] (s malými vlastními doplňky).

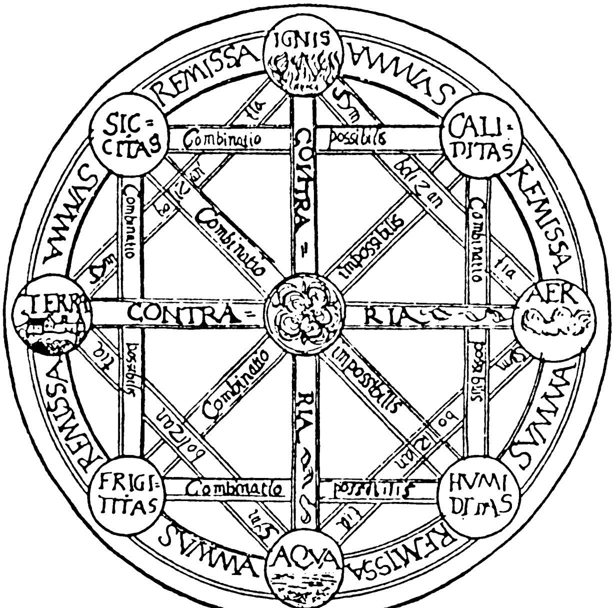
Jako své předchůdce uvádí Leibniz dva autory ([13], str. 38). Prvním z nich je Daniel Schwenter (1585 – 1636), který byl ve své době znám hlavně svým spisem *Geometria practica nova et aucta* (1. vydání r. 1618); Leibniz však uvádí další Schwenterův spis *Deliciæ physico-mathematicæ*, který byl vydán ze Schwenterovy pozůstalosti v r. 1636. Jako dalšího předchůdce uvádí Leibniz již zmíněného Christophera Clavia a jeho komentář k Sacroboscovi, který zřejmě na Leibnize silně zapůsobil, protože na začátku Leibnizova spisu se objevuje jediný obrázek v celé práci (viz obr. 3), který je natolik podobný obrázku Claviovu (viz obr. 2), že podle našeho názoru nemůže jít o podobnost náhodnou.

---

[34] *Gottfredi Guilielmi Leibnüzii Lipsiensis, ARS COMBINATORIA, in qua ex arithmeticæ fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam Artis Meditandi, seu Logicæ inventionis semina sparguntur. Præfix est Synopsis totius Tractatus, & additamenti loco Demonstratio Existentiæ Dei ad Mathematicam certitudinem exacta.*

[35] Pokud je nám známo, neexistuje žádný překlad toho spisu do některého živého jazyka ani žádné vydání doplněné komentářem; v tomto příspěvku vycházíme z vydání [13].

Pokud se matematického obsahu Leibnizova spisu týče, obsahuje aritmetický trojúhelník a jeho použití pro stanovení počtu kombinací (které nazývá *complexiones*); obsahuje rovněž pravidla pro stanovení počtu permutací (které nazývá *variationes*) bez opakování i s opakováním prvků. Zajímavou variantu úlohy o stanovení počtu permutací n prvků obsahuje Leibnizovo *Problema V*, ve kterém je zkoumán počet permutací při uspořádání prvků na kružnici, takže (jak uvádí Leibniz) při permutování čtyř prvků budeme permutace *abcd*, *dabc*, *cdab*, *bcda* považovat za stejné.



Obr. 3 Leibnizovo znázornění vztahu mezi elementy

Leibnizova práce obsahuje však i některé zajímavé výsledky, které nemají charakter kombinatorický, ale snad by bylo možné označit je za teoreticko-číselné; dva z nich zde uvedeme (v dnešní symbolice):

1) Je-li n prvočíslo, pak n dělí $\binom{n}{k}$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

2) Dělíme-li číslo $n!$ postupně čísly $1, 2, \ldots, n$, dostaneme harmonickou posloupnost, tj. pro každé tři po sobě jdoucí členy této posloupnosti platí, že prostřední z nich je harmonickým průměrem sousedních.

Matematická stránka problematiky ale není pro Leibnize hlavní; Leibniz v tomto spisu pojímá kombinatoriku jako nástroj k řešení problémů nematematických a více než polovinu své práce věnuje zkoumání problémů, které bychom asi nejspíš mohli označit za formálně logické.[36] Podle našeho názoru představuje

[36] Ani tato charakteristika asi není výstižná, protože Leibnizova práce je tématicky velice

Leibnizův spis jisté vyvrcholení filozofického proudu v historii evropské kombinatoriky; je otázkou, nakolik byl přínosem pro rozvoj kombinatoriky jako matematické disciplíny, přesto se však domníváme, že by si zasloužil systematické prostudování a podrobný komentář.[37]

8. Jakob Bernoulli (1654 – 1705)

Rod Bernoulliů pocházel z Antverp, ale v důsledku náboženských nepokojů se v průběhu XVI. století několikrát stěhoval a od r. 1620 se usadil v Basileji; zde se také narodil i zemřel Jakob Bernoulli. Na místní univerzitě získal doktorát teologie a od r. 1687 až do smrti zde působil jako profesor matematiky.[38] Od r. 1690 publikoval spolu se svým bratrem Johannem v návaznosti na práce Leibnizovy celou řadu prací z infinitesimálního počtu, z našeho hlediska je však podstatné, že je autorem knihy *Ars conjectandi*, která sice vyšla tiskem až r. 1713, ale napsána byla už okolo r. 1685. Druhá ze čtyř částí této knihy je celá věnována kombinatorice; z historického hlediska je zajímavé, že Bernoulli zde uvádí jako své předchůdce Schootena, Leibnize, Wallise a Presteta,[39] ale ne Pascala, jehož práci o aritmetickém trojúhelníku zřejmě neznal.[40] Podle našeho názoru lze formování kombinatoriky jako relativně samostatné části matematiky považovat za završené právě touto knihou Jakoba Bernoulliho.

Je zajímavé, že Bernoulli zahajuje kombinatorickou část svého spisu úlohou o stanovení počtu permutací n prvků a řešení této úlohy ilustruje na příkladech anagramatických (viz část 4.2 tohoto příspěvku); v této části tedy postupuje Bernoulli zcela v duchu své doby. Pak ovšem jeho spis získává takřka výlučně matematický charakter; pomocí figurálních čísel zavádí aritmetický trojúhelník, studuje variace, kombinace i permutace bez opakování i s opakováním prvků a (podle našeho názoru) matematickým vrcholem této části spisu je zavedení

---

pestrá: jako samostatná část je proveden důkaz existence Boží, opakují se zde Claviovy (tj. Aristotelovy) úvahy o kombinování čtyř základních elementů, citován je Lull a Kircher, jedna kapitola je věnována anagramům, je zde Drexeliova úloha o rozsazování šesti hostů a její varianty pro 7 a 12 hostů, a v tomto výčtu témat by asi bylo možné pokračovat velice dlouho.

[37] Vypracování takového komentáře by ovšem bylo velice pracné, protože Leibnizova práce obsahuje překvapivé (u dvacetiletého autora až neuvěřitelné) množství citací, které jsou často velice zkratkovité a komentátor by se s nimi musel nějak vypořádat.

[38] Pro zajímavost poznamenejme, že učil také Paula Eulera (1670 – 1745), otce slavného Leonarda Eulera (1707 – 1783). Bernoulliové zastávali místo profesora matematiky na basilejské univerzitě nepřetržitě více než sto let; Jakobovým nástupcem byl jeho bratr Johann (1667 – 1748), jehož žákem byl již zmíněný Leonard Euler. Základní rodokmen rodu Bernoulliů lze nalézt např. v práci MAČÁK, K.: *Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v 17. a 18. století*. In: Historie matematiky II, (Dějiny matematiky, sv. 7, ed. J. Bečvář, E. Fuchs), str. 63. Prometheus, Praha 1997.

[39] O Wallisovi a Leibnizovi už byla řeč. Pokud se Schootena týče, je míněn Franciscus van Schooten mladší (1615 – 1690), který byl profesorem na univerzitě Leydenu stejně jako jeho otec, který se také jmenoval Franciscus a žil v letech 1581 – 1646. Jean Prestet (? – 1690) vydal v r. 1675 učebnici *Elemens des Mathématiques*, která údajně byla velmi ceněna.

[40] Z citací v textu je však zřejmé, že Leibniz znal Pascalovu korespondenci s Fermatem obsaženou ve vydání Fermatových spisů, které vyšlo v Toulouse v r. 1679.

Bernoulliových čísel.[41] Domníváme se, že i z této velice stručné charakteristiky druhé části Bernoulliova spisu je zřejmé, že se jedná o matematické pojednání věnované kombinatorické problematice, která je pojímána jako relativně samostatná část matematiky, nikoli jako pouhá část aritmetiky (jak je tomu u Pascala) nebo nástroj k řešení problémů filozofických (jak je tomu u Leibnize); proto považujeme tento spis za předěl, kterým prehistorie kombinatoriky přechází do kombinatoriky v dnešním pojetí.

9. Závěr

Chronologicky vzato, kombinatorická problematika byla nejdříve studována v Asii (Čína, Indie) a z toho se někdy vyvozuje (např. [1], str. 2165) že kombinatorika v Evropě vznikla jako důsledek přenosu matematických znalostí z Asie do Evropy.[42] Domníváme se, že tento názor není správný; v předloženém příspěvku jsme se snažili ukázat, že evropská kombinatorika má vlastní myšlenkové kořeny, odlišné od kořenů asijských. Je jasné, že docházelo k ovlivnění evropské matematiky arabskou matematikou a jejím prostřednictvím i matematikou asijskou; lze tedy předpokládat, že docházelo k ovlivnění i při formulování a řešení kombinatorických úloh, podle našeho názoru se však jednalo jen o ovlivnění již existujícího myšlenkového proudu, nikoli o jeho vytvoření.

Domníváme se rovněž, že pro pochopení vývoje evropské kombinatoriky je nezbytné sledovat nejen vývoj čistě matematický, ale i vývoj v oblasti filozofické, a tento názor jsme se pokusili alespoň v základních rysech doložit konkrétními příklady. Přitom jsme věnovali pozornost hlavně pracím jezuitských autorů; zdá se nám totiž, že v rozhodujícím období formování kombinatoriky, tj. v 17. století, se právě ve filozofii pěstované v jezuitském řádu objevují kombinatorické úvahy poměrně často a jejich vliv lze sledovat až k Leibnizovi a Jakobu Bernoulliovi.

[41] Tato část Bernoulliova spisu *Ars conjectandi* je vyložena v práci VESELÝ, J.: *Poznámky k historii funkce gama.* In: Člověk – umění – matematika, (Dějiny matematiky, sv. 4, ed. J. Bečvář, E. Fuchs), str. 49 a násl. Prometheus, Praha 1996.

[42] Na citovaném místě se praví: *It is strange that there is almost no material relevant to combinatorics in the literature of the classical Western civilizations. All the evidence points to the fact that the originators of the subject came from the East. The Chinese have a minor claim, through their interest in the magic squares, but the main stimulus came from the Hindus.*

LITERATURA

1. Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, J. R., *The history of combinatorics*; In: Graham, M., Grötschel, M., Lovasz, L. (Eds.), *Handbook of combinatorics*, Elsevier Sci., Amsterdam (aj.), 1995.
2. Majstrov, L. E., *Teorija verojatnostej. Istoričeskij očerk*, Nauka, Moskva, 1967.
3. Edwards, A. W. F., *Pascal's arithmetical triangle*, Charles Griffin, London, 1987.
4. Pring-Mill, R. D. F., *Lull, Ramon*, In: *Dictionary of scientific biography*. Vol. VIII., Charles Scribners Sons, New York, 1973.
5. Čornejová, I., *Tovaryšstvo Ježíšovo. Jezuité v Čechách*, MF, Praha, 1995.
6. Sommervogel, C. (ed.), *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*, Bruxelles - Paris 1890 a násl..
7. Čornejová, I., Fechtnerová, A., *Životopisný slovník pražské univerzity. Filozofická a teologická fakulta 1654 - 1773*, UK, Praha, 1986.
8. Pascal, B., *Œuvres*, (Ed. L. Brunschvicg, P. Boutroux) Sv. III. Druhé vydání, Paříž, 1923.
9. Sousedík, S., *Filosofie v českých zemích mezi středověkem a osvícenstvím*, Vyšehrad, Praha, 1997.
10. Karpenko, V., *Tajemství magických čtverců*, Půdorys, Praha, 1997.
11. Bernoulli, J., *Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi)*, Leipzig, 1899.
12. Mačák, K., *Počátky počtu pravděpodobnosti*, Dějiny matematiky, sv. 9, Prometheus, Praha, 1997.
13. Leibniz, G. W., *Die philosophischen Schriften*, (Ed. C. J. Gerhardt) Band, Berlin, 1880.