§ 22. Folgerungen aus den Eigenschaften der Nebenklassenzerlegungen von Gruppen

1. Der Satz von Lagrange. Es sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ eine Untergruppe in $\mathfrak{G}$. Wir wollen die durch die Existenz und Eigenschaften der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ bestehende Situation prüfen.

Es sei N die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ und n die der Untergruppe $\mathfrak{A}$; die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht also aus N und die Untergruppe $\mathfrak{A}$ aus n Punkten ($N \geqq n$). Unter den Elementen von $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ kommt insbesondere das Feld A der Untergruppe $\mathfrak{A}$ vor; dieses Element wird also von n Punkten der Gruppe $\mathfrak{G}$ gebildet. Nach § 20, Nr. 2, Satz 5 besteht also jedes Element von $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ aus n Punkten der Gruppe $\mathfrak{G}$. Daraus folgt die Gleichung $N = qn$, wobei q die Anzahl der Anzahl der Elemente der linksseitigen (und nach § 21, Nr. 7 auch der rechtsseitigen) Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf $\mathfrak{A}$ bedeutet. Somit sind wir zu dem folgenden wichtigen Resultat gekommen:

Die Ordnung jeder Untergruppe $\mathfrak{A}$ in einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$.

Dieses Resultat wird als der *Satz von* LAGRANGE bezeichnet und zu den wichtigsten Sätzen der Theorie endlicher Gruppen gerechnet. Die Zahl q, also die Anzahl der Elemente jeder der beiden Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{A}$, heißt der *Index der Untergruppe* $\mathfrak{A}$ bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$. Eine wichtige Folgerung des LAGRANGEschen Satzes ist z. B. die, daß eine endliche Gruppe, deren Ordnung eine Primzahl ist, keine von der kleinsten Untergruppe $\{\underline{1}\}$ verschiedene echte Untergruppe enthalten kann.

Wir wollen beachten, daß die Behauptung des LAGRANGEschen Satzes auch dann gilt, wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ unendlich ist ($N = 0$).

Beispiel. Wir betrachten die Gruppe $\mathfrak{S}_3$ und bezeichnen ihre Elemente mit $\underline{1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{f}$ (vgl. § 11, Nr. 4). Aus der diesbezüglichen Gruppentafel ($\boldsymbol{e} = \underline{1}$) sehen wir, daß die Elemente $\underline{1}, \boldsymbol{f}$ eine Untergruppe in $\mathfrak{S}_3$, die wir mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen wollen, bestimmen.

Die linksseitigen Nebenklassen der einzelnen Elemente in $\mathfrak{S}_3$ in bezug auf $\mathfrak{A}$ sind die Komplexe

$$\underline{1}\mathfrak{A} = \boldsymbol{f}\mathfrak{A} = \{\underline{1}, \boldsymbol{f}\}, \quad \boldsymbol{a}\mathfrak{A} = \boldsymbol{c}\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}, \quad \boldsymbol{b}\mathfrak{A} = \boldsymbol{d}\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\},$$

während die rechtsseitigen Nebenklassen durch die Komplexe

$$\mathfrak{A}\underline{1} = \mathfrak{A}\boldsymbol{f} = \{\underline{1}, \boldsymbol{f}\}, \quad \mathfrak{A}\boldsymbol{a} = \mathfrak{A}\boldsymbol{d} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}, \quad \mathfrak{A}\boldsymbol{b} = \mathfrak{A}\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$$

dargestellt werden. Die linksseitige Nebenklassenzerlegung der Gruppe $\mathfrak{S}_3$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ besteht also aus den Elementen $\{\underline{1}, \boldsymbol{f}\}$, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$, $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\}$, während die rechtsseitige Nebenklassenzerlegung von $\{\underline{1}, \boldsymbol{f}\}$, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}\}$, $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ gebildet wird. Wir wollen beachten, daß diese beiden Nebenklassenzerlegungen voneinander verschieden sind. Die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{S}_3$ ist 6, die der Untergruppe $\mathfrak{A}$ ist 2, der Index der Untergruppe $\mathfrak{A}$ bezüglich der Gruppe $\mathfrak{S}_3$ ist $6 : 2 = 3$; dieser Index gibt die Anzahl der linksseitigen und zugleich auch der rechtsseitigen Nebenklassen der Gruppe $\mathfrak{S}_3$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ an.

2. Beziehungen zwischen miteinander vertauschbaren Untergruppen einer Gruppe. Das in § 21, Nr. 6 gefundene Resultat führt zusammen mit den Eigenschaften der komplementären Zerlegungen (§ 5) hinsichtlich der Vertauschbarkeit zu mannigfaltigen Beziehungen zwischen Untergruppen in einer Gruppe. Wir wollen hier nur einige dieser Beziehungen angeben, während die Herleitung von anderen dem Leser überlassen werden soll.

Es sei bemerkt, daß die fertigen Formeln, die wir aufstellen werden, meistens sehr einfach auf direktem Weg verifiziert werden können; unsere Methode hat jedoch den Vorteil, daß sie zur Aufstellung dieser Formeln führt und einen tieferen Einblick in ihre Struktur ermöglicht.

Satz 1. *Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ seien miteinander vertauschbar. Dann sind auch die Untergruppen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ miteinander vertauschbar, und es gilt*

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B}. \tag{1}$$

Beweis. Nach § 21, Nr. 6 sind die Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}$ komplementär. Wegen $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ haben wir $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ (§ 21, Nr. 3). Nach § 5, Nr. 3 ist die Zerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ komplementär zu $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D})$, und nach § 21, Nr. 4 gilt $(\mathfrak{G}_l/\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})$. Folglich sind die Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})$ komplementär und (nach § 21, Nr. 6) die Untergruppen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ miteinander vertauschbar.

Nach § 5, Nr. 4 ist die Zerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}$ in bezug auf die Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ modular. Wir erhalten also

$$(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}) = [\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}, (\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D})],$$

d. h. nach § 21, Nr. 4 und 5

$$(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = [\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}, \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})]$$

und schließlich

$$\mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}\mathfrak{B}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B}.$$

Wir sehen, daß die das Einselement $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ enthaltende linksseitige Nebenklasse der letzten Zerlegung durch das Feld jeder der beiden Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B}$ dargestellt wird. Daraus folgt die Formel (1).

Satz 2. *Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ Untergruppen in $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ seien miteinander vertauschbar. Dann sind auch die Untergruppen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ und ebenfalls die Untergruppen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar. Ferner gilt dasselbe von den Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$, und es gilt*

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}). \tag{2}$$

Beweis. Der erste Teil dieser Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1. Ferner gilt nach § 5, Nr. 6, 1

$$((\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{C}), [\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}]) = [(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}), (\mathfrak{G}/_l\mathfrak{C}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})], \tag{3}$$

und die Zerlegungen $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{C}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$, d. h. $\mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})$, $\mathfrak{G}/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ sind komplementär. Folglich (§ 21, Nr. 6) sind die Untergruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}, \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar, und aus (3) erhalten wir (2).

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gelten auch die Formeln*

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D} \cap \mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}). \tag{4}$$

Beweis. Wir wissen, daß die Zerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}$ komplementär sind; außerdem ist $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}$. Ferner sind die Felder der Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ die die Einheit $\underline{1} \in \mathfrak{G}$ enthaltenden Elemente der linksseitigen Nebenklassenzerlegungen von $\mathfrak{G}$ in bezug auf diese Untergruppen.

Wir wenden nun das Resultat aus § 5, Nr. 5 an, wonach die Zerlegungen

$$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}\ (= \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{A}), \quad \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} = \mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D}\ (= \mathfrak{G}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{C})$$

in bezug auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ adjungiert sind. Es gilt also

$$s(\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}) = s(\mathfrak{B} \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}). \tag{5}$$

Nach § 2, Nr. 6.5a) haben wir

$$\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}) \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{D} \sqsubset (\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}),$$
$$\mathfrak{B} \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) \sqcap \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \sqsubset (\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}),$$

und die Ergebnisse von § 21, Nr. 2,1 führen zu den Formeln

$$(\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}) \sqcap \mathfrak{C} = ((\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}),$$
$$\mathfrak{D} \sqsubset (\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}),$$
$$(\mathfrak{B} \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}) \sqcap \mathfrak{A} = ((\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D} \cap \mathfrak{A})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}),$$
$$\mathfrak{B} \sqsubset (\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}) = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}).$$

Wir haben also

$$s(\mathfrak{D} \sqsubset \mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}),$$
$$s(\mathfrak{B} \sqsubset \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}) = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{D} \cap \mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}),$$

und diese Gleichheiten ergeben zusammen mit (5) die Formeln (4).

3. Modulare Verbände von Untergruppen und von Nebenklassenzerlegungen einer Gruppe. Wir betrachten ein nicht leeres System O von Untergruppen in der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wir nehmen an, daß je zwei Untergruppen des Systems O miteinander vertauschbar sind und das System O bezüglich der Durchschnitts- und Produktbildung abgeschlossen ist. Die erwähnte Abgeschlossenheit des Systems O soll folgendes bedeuten: Für je zwei Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in O$ gehören der Durchschnitt und das Produkt der beiden Untergruppen wiederum dem System O an, also $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \in O$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \in O$.

Wir ordnen nun jeder zweigliedrigen Folge $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von Untergruppen des Systems O einmal den Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ und zum anderen das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der erwähnten Untergruppen zu. Damit haben wir in beiden Fällen eine Multiplikation im System O. Auf diese Weise erhalten wir ein Paar von übereinandergelagerten Gruppoiden auf dem Feld O. Jedes von diesen Gruppoiden ist abelsch (§ 1, Nr. 6), assoziativ (§ 1, Nr. 10, 4; § 18, Nr. 1, 1) und besteht aus lauter idempotenten Elementen (§ 1, Nr. 10, 1; § 15, Nr. 6, 4). Außerdem sehen wir, daß die Multiplikationen in den betrachteten Gruppoiden mittels der für beliebige Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in O$ bestehenden Formeln $\mathfrak{A}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ zusammenhängen. Somit ist gezeigt, daß das betrachtete Gruppoidpaar einen Verband Ω auf dem Feld O darstellt.

Als die obere (untere) Multiplikation im Verband Ω wollen wir etwa diejenige bezeichnen, die zu jeder zweigliedrigen Folge von Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Omega$ das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ (den Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$) dieser Untergruppen zuordnet, also $\mathfrak{A} \smile \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Sodann erhalten wir die obere (untere) partielle Ordnung $\boldsymbol{o}$ ($\boldsymbol{u}$) des Verbandes Ω, indem wir jeder Untergruppe $\mathfrak{A} \in \Omega$ alle auf (in) ihr liegenden Obergruppen (Untergruppen) $\mathfrak{B} \in \Omega$ zuordnen. Nun folgt aus § 22, Nr. 2 (1), daß jede der Beziehung $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}$ ($\boldsymbol{o}$) genügende dreigliedrige Folge von Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \Omega$ die obere modulare Beziehung erfüllt. Wir sehen, daß der Verband Ω modular ist.

Wir ordnen nun jeder Untergruppe $\mathfrak{A} \in \Omega$ die linksseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ zu und bezeichnen das entsprechende System von Klassenzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit O^*. Wegen § 21, Nr. 4 und 5 ist das System O^* bezüglich der beiden Operationen (), [] abgeschlossen, so daß für je zwei Klassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \in O^*$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \in O^*$ auch ihre größte gemeinsame Verfeinerung und ihre kleinste gemeinsame Überdeckung dem System O^* angehören, also $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}) \in O^*$, $[\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}] \in O^*$. Ferner definieren wir in dem System O^* zwei Multiplikationen, indem wir jeder zweigliedrigen Folge von Klassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B} \in O^*$ einmal die größte gemeinsame Verfeinerung $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B})$ und das anderemal die kleinste gemeinsame Überdeckung $[\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}]$ der erwähnten Klassenzerlegungen zuordnen. Auf diese Weise erhalten wir ein Paar von übereinandergelagerten Gruppoiden auf dem Feld O^* und stellen wiederum fest, daß dieses Paar von Gruppoiden einen Verband Ω^* darstellt.

Die Abbildung $\boldsymbol{i}$, bei der jeder Untergruppe $\mathfrak{A} \in \Omega$ die Klassenzerlegung $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \in \Omega^*$ zugeordnet wird, ist offenbar eine schlichte Abbildung des Verbandes Ω auf den Verband Ω^* und erfüllt für je zwei Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Omega$ die Beziehungen

$$\boldsymbol{i}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}), \quad \boldsymbol{i}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

d. h.

$$\boldsymbol{i}(\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B}) = \boldsymbol{i}\mathfrak{A} \frown \boldsymbol{i}\mathfrak{B}, \quad \boldsymbol{i}(\mathfrak{A} \smile \mathfrak{B}) = \boldsymbol{i}\mathfrak{A} \smile \boldsymbol{i}\mathfrak{B}.$$

Wir sehen, daß die Abbildung $\boldsymbol{i}$ einen Isomorphismus des Verbandes Ω auf den Verband Ω^* darstellt. Da der Verband Ω modular ist, gilt dasselbe auch von dem Verband Ω^* (§ 18, Nr. 7, 14).

Somit sind wir zu dem folgenden Resultat gekommen:

Jedes nicht leere System von Untergruppen einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$, dessen Elemente miteinander vertauschbar sind und für die das System selbst bezüglich der Durchschnitts- und Produktbildung abgeschlossen ist, stellt zusammen mit *den mittels Durchschnitts- und Produktbildung definierten Multiplikationen einen modularen Verband dar. Das von den linksseitigen (rechtsseitigen) Nebenklassenzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezüglich der einzelnen Elemente dieses Verbandes gebildete System ist in bezug auf die Operationen* (), [] *abgeschlossen und stellt zusammen mit den mittels dieser Operationen definierten Multiplikationen einen zum ersten Verband isomorphen, also ebenfalls modularen Verband dar.*

4. Übungsaufgaben.

1. Die Ordnung einer Gruppe, die von Permutationen einer endlichen Menge von der Ordnung n gebildet wird, ist ein Teiler der Zahl $n!$.

2. Die Anzahl der zu sich selbst inversen Elemente in einer endlichen abelschen Gruppe von der Ordnung N ist ein Teiler der Zahl N.

§ 23. Spezielle Nebenklassenzerlegungen von Gruppen

1. Halbverknüpfte und verknüpfte Nebenklassenzerlegungen. Wir betrachten beliebige Untergruppen $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$. Mit $A \supset B$, $C \supset D$ bezeichnen wir ihre Felder.

Zunächst fragen wir, unter welchen Umständen die linksseitigen Nebenklassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ halbverknüpft bzw. verknüpft sind.

Da der Durchschnitt $A \cap B$ (die Einheit von $\mathfrak{G}$ enthält und folglich) nicht leer ist, sind nach § 4, Nr. 1 die genannten Klassenzerlegungen dann und nur dann halbverknüpft, wenn

$$\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_l\mathfrak{D} \sqcap \mathfrak{A}$$

gilt. Nach § 21, Nr. 2,1 ist dies gleichbedeutend mit

$$(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}).$$

Wir sehen, daß dies genau dann gilt, wenn

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B} \tag{1}$$

ist. Somit haben wir das Resultat erhalten, daß *die Klassenzerlegungen* $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ *dann und nur dann halbverknüpft sind, wenn die beiden Untergruppen* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *übereinstimmen, also* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ *ist.*

Wir nehmen nun an, die Klassenzerlegungen $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/_l\mathfrak{D}$ seien verknüpft. Dann gelten nach § 4, Nr. 1 und § 20, Nr. 3,2 außer der Beziehung (1) noch die beiden Gleichheiten

$$A = (A \cap C)B, \quad C = (C \cap A)D.$$

Aus ihnen schließen wir (§ 19, Nr. 7,6), daß die Untergruppe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ mit jeder der beiden Untergruppen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ vertauschbar ist; folglich haben wir

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{D}. \tag{2}$$