## § 16. Deformationen von Faktoroiden

**1. Die Isomorphiesätze.** Wir wollen nun die sogenannten *Isomorphiesätze für Gruppoide* behandeln. Sie beschreiben Situationen, die bei homomorphen Abbildungen von Gruppoiden bzw. Faktoroiden vorkommen und mit dem Isomorphiebegriff zusammenhängen. Die mengentheoretische Struktur dieser Sätze wird durch die in § 6, Nr. 8 angeführten Äquivalenzsätze dargestellt.

1. *Erster Satz.* Wir betrachten beliebige Gruppoide $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ und eine Deformation $\boldsymbol{d}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$. In § 14, Nr. 2 haben wir gezeigt, daß die zu der Deformation $\boldsymbol{d}$ gehörige Zerlegung $\bar{D}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ eine erzeugende Zerlegung ist. Wir bezeichnen mit $\bar{\mathfrak{D}}$ das zu dieser Zerlegung $\bar{D}$ gehörige Faktoroid auf $\mathfrak{G}$. Wenn wir jedem Element $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$ denjenigen Punkt $a^* \in \mathfrak{G}^*$ zuordnen, von dessen $\boldsymbol{d}$-Urbildern das Element $\bar{a}$ gebildet wird, so erhalten wir eine schlichte Abbildung des Faktoroids $\bar{\mathfrak{D}}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$, die wir mit $\boldsymbol{i}$ bezeichnen wollen. Nach Definition von $\boldsymbol{i}$ gilt $\boldsymbol{i}\bar{a} = \boldsymbol{d}a$ für jedes Element $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$ und jeden Punkt $a \in \bar{a}$. Wir betrachten beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$ und irgendwelche Punkte $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$. Sodann gelten die Beziehungen $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \circ \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$ und folglich auch $\boldsymbol{i}(\bar{a} \circ \bar{b}) = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b = \boldsymbol{i}\bar{a} \cdot \boldsymbol{i}\bar{b}$. Wir erhalten also $\boldsymbol{i}(\bar{a} \circ \bar{b}) = \boldsymbol{i}\bar{a} \cdot \boldsymbol{i}\bar{b}$ und sehen, daß die Abbildung $\boldsymbol{i}$ eine Deformation und folglich, da sie schlicht ist, einen Isomorphismus des Faktoroids $\bar{\mathfrak{D}}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ darstellt. Wir können also zusammenfassen: Wenn das Gruppoid $\mathfrak{G}$ mit Hilfe einer Deformation $\boldsymbol{d}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ deformiert werden kann, so gibt es ein auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ liegendes Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ derart, daß das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ mit $\bar{\mathfrak{D}}$ isomorph ist. Das Feld von $\bar{\mathfrak{D}}$ ist die zu der Deformation $\boldsymbol{d}$ gehörige Zerlegung von $\mathfrak{G}$, und der erwähnte Isomorphismus ist die oben definierte Abbildung $\boldsymbol{i}$. Wir sagen, das Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ *gehöre* zu der Deformation $\boldsymbol{d}$.

Wir betrachten nun umgekehrt ein beliebiges Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ und die auf folgende Weise definierte Abbildung $\boldsymbol{d}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$: Das $\boldsymbol{d}$-Bild eines jeden Punktes $a \in \mathfrak{G}$ ist das den Punkt $a$ enthaltende Element $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$, also $a \in \bar{a} = \boldsymbol{d}a \in \bar{\mathfrak{D}}$. Wir wollen zeigen, daß diese Abbildung $\boldsymbol{d}$ eine Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ darstellt. Zu diesem Zweck nehmen wir an, es seien $a, b \in \mathfrak{G}$ beliebige Punkte und ferner $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$ die den Beziehungen $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ genügenden Elemente von $\bar{\mathfrak{D}}$; wir haben also $\bar{a} = \boldsymbol{d}a$, $\bar{b} = \boldsymbol{d}b$. Aus den Formeln $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \circ \bar{b} \in \bar{\mathfrak{D}}$ schließen wir auf das Bestehen der Beziehung $ab \in \bar{a} \circ \bar{b}$ und folglich auch auf das der Gleichheiten $\boldsymbol{d}ab = \bar{a} \circ \bar{b} = \boldsymbol{d}a \circ \boldsymbol{d}b$. Wir sehen, daß sich bei der Abbildung $\boldsymbol{d}$ tatsächlich die Multiplikationen in den Gruppoiden $\mathfrak{G}$, $\bar{\mathfrak{D}}$ gleichzeitig ausführen lassen, d. h., $\boldsymbol{d}$ stellt eine Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ dar. Damit ist gezeigt, daß sich das Gruppoid $\mathfrak{G}$ auf jedes auf ihm gelegene Faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ deformieren läßt, und zwar so, daß jeder Punkt in $\mathfrak{G}$ auf das diesen Punkt enthaltende Element in $\bar{\mathfrak{D}}$ abgebildet wird. Daraus folgt weiter, daß das Gruppoid $\mathfrak{G}$ auf jedes zu einem auf $\mathfrak{G}$ gelegenen Faktoroid isomorphe Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ deformiert werden kann.

Die obigen Resultate können kurz in dem sogenannten *ersten Isomorphiesatz für Gruppoide* zusammengefaßt werden:

*Wenn das Gruppoid $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ deformiert werden kann, so ist $\mathfrak{G}^*$ zu einem auf $\mathfrak{G}$ gelegenen Faktoroid isomorph, und umgekehrt. Die Abbildung des zu einer Deformation $\boldsymbol{d}$ von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ gehörigen Faktoroids $\mathfrak{D}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$, in der jedes Element $\bar{a} \in \mathfrak{D}$ auf das $\boldsymbol{d}$-Bild der in $\bar{a}$ enthaltenen Punkte von $G$ abgebildet wird, ist ein Isomorphismus.*

**2.** *Zweiter Satz.* Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ verknüpfte Faktoroide im Gruppoid $\mathfrak{G}$. Jedes Element von $\mathfrak{A}$ ist also mit genau einem Element von $\mathfrak{B}$ und jedes Element von $\mathfrak{B}$ mit genau einem Element von $\mathfrak{A}$ inzident (§ 15, Nr. 3,3). Wenn wir jedem Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ das mit ihm inzidente Element $\bar{b} \in \mathfrak{B}$ zuordnen, so erhalten wir eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{i}$ des Faktoroids $\mathfrak{A}$ auf das Faktoroid $\mathfrak{B}$. Wir wollen zeigen, daß diese Abbildung $\boldsymbol{i}$ einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ darstellt.

Zu diesem Zweck betrachten wir beliebige Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \mathfrak{A}$ und die mit ihnen inzidenten Elemente $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \mathfrak{B}$, so daß $\bar{b}_1 = \boldsymbol{i}\bar{a}_1$, $\bar{b}_2 = \boldsymbol{i}\bar{a}_2$ ist. Es sei $\bar{x}_1 = \bar{a}_1 \cap \bar{b}_1 (\neq \emptyset)$, $\bar{x}_2 = \bar{a}_2 \cap \bar{b}_2 (\neq \emptyset)$. Wir haben $\bar{x}_1\bar{x}_2 \subset \bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_1 \circ \bar{a}_2$, $\bar{x}_1\bar{x}_2 \subset \bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2$, wobei natürlich $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \in \mathfrak{A}$ $(\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \mathfrak{B})$ das Produkt aus dem Element $\bar{a}_1 (\bar{b}_1)$ und dem Element $\bar{a}_2 (\bar{b}_2)$ bedeutet. Folglich gilt die Beziehung $\bar{x}_1\bar{x}_2 \subset \bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \cap \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2$, und wir sehen, daß das mit dem Element $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \in \mathfrak{A}$ inzidente Element von $\mathfrak{B}$ durch $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2$ dargestellt ist. Es gilt also $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 = \boldsymbol{i}(\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2)$, und wir erhalten die Beziehung $\boldsymbol{i}(\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2) = \boldsymbol{i}\bar{a}_1 \circ \boldsymbol{i}\bar{a}_2$. Damit ist das Gewünschte gezeigt.

Dieses Resultat fassen wir in dem *zweiten Isomorphiesatz für Gruppoide* zusammen:

*Je zwei verknüpfte Faktoroide $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ im Gruppoid $\mathfrak{G}$ sind isomorph, also $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Die Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, bei der jedes Element in $\mathfrak{A}$ auf das mit ihm inzidente Element in $\mathfrak{B}$ abgebildet wird, ist ein Isomorphismus.*

Ein wichtiger Spezialfall (§ 15, Nr. 3,3) dieses Satzes betrifft den Isomorphismus der Hülle und der Durchdringung eines Untergruppoids $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{G}$ und eines Faktoroids $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{G}$: *Im Fall $X \cap \boldsymbol{s}\bar{Y} \neq \emptyset$ gilt die mit Hilfe der Inzidenz von Elementen realisierte Isomorphiebeziehung*

$$\mathfrak{X} \sqsubset \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{Y} \sqcap \mathfrak{X};$$

dabei stellt natürlich $X$ bzw. $\bar{Y}$ das Feld von $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$ dar.

**3.** *Dritter Satz.* Es sei $\overline{\mathfrak{B}}$ ein Faktoroid auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ ein solches auf dem Faktoroid $\overline{\mathfrak{B}}$. Wie wir wissen (§ 15, Nr. 4,1), erzwingt das Faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ eine wohlbestimmte Überdeckung $\mathfrak{A}$ des Faktoroids $\overline{\mathfrak{B}}$. Wir wollen daran erinnern, daß das Faktoroid $\mathfrak{A}$ auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ so entsteht, daß man alle je in einem Element $\bar{b} \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ enthaltenen Elemente von $\overline{\mathfrak{B}}$ durch Summenbildung zu einem Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ vereinigt. Wenn wir jedem Element $\bar{b} \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ das erwähnte Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ zuordnen, so erhalten wir eine Abbildung $\boldsymbol{i}$ des Faktoroids $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ auf das Faktoroid $\mathfrak{A}$. Wir wollen zeigen, daß diese Abbildung $\boldsymbol{i}$ einen Isomorphismus darstellt.

Zunächst ist ersichtlich, daß die Abbildung $\boldsymbol{i}$ schlicht ist. Um zu zeigen, daß sie eine Deformation darstellt, betrachten wir beliebige Elemente $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ und das Produkt $\bar{b}_3 \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ des Elements $b_1$ mit dem Element $\bar{b}_2$. Nach Definition der Multiplikation im Faktoroid $\mathfrak{B}$ haben wir für jedes in $\bar{b}_1$ enthaltene Element $\bar{b}_1 \in \mathfrak{B}$ und jedes in $\bar{b}_2$ enthaltene Element $\bar{b}_2 \in \mathfrak{B}$ die Beziehung $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_3$. Es sei $\bar{a}_1 \in \mathfrak{A}$ das durch Summenbildung aller in $\bar{\bar{b}}_1$ enthaltenen Elemente $\bar{b}_1 \in \mathfrak{B}$ entstandene Element von $\mathfrak{A}$, also $\bar{a}_1 = \mathbf{U}\bar{b}_1(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1)$, und ähnlich sei $\bar{a}_2 = \mathbf{U}\bar{b}_2(\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$, $\bar{a}_3 = \mathbf{U}\bar{b}_3(\bar{b}_3 \in \bar{\bar{b}}_3)$; wir haben also $\bar{a}_1 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_1$, $\bar{a}_2 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_2$, $\bar{a}_3 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_3 \in \mathfrak{A}$. Sodann folgt aus $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_3(\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1, \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2)$ zunächst die Beziehung $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$ und ferner $\bar{a}_1\,\bar{a}_2 = \mathbf{U}\bar{b}_1\,\bar{b}_2 \subset \mathbf{U}\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$; es gilt also $\bar{a}_1\,\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$. Somit haben wir $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 = \bar{a}_3$, und es ergibt sich $\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_3 = \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_1 \circ \boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}_2$. Wir sehen, daß die Abbildung $\boldsymbol{i}$ eine Deformation und demzufolge (da sie schlicht ist) einen Isomorphismus darstellt.

Unser Resultat kann in dem folgenden *dritten Isomorphiesatz für Gruppoide* zusammengefaßt werden:

*Ein beliebiges, auf einem Faktoroid $\mathfrak{B}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ gelegenes Faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ und die durch $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ erzwungene Überdeckung $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ sind isomorph, also $\bar{\bar{\mathfrak{B}}} \simeq \mathfrak{A}$. Die Abbildung des Faktoroids $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ auf die Überdeckung $\mathfrak{A}$, in der jedes Element $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ auf das durch Summenbildung aller in $\bar{\bar{b}}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{B}$ entstandene Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ abgebildet wird, stellt einen Isomorphismus dar.*

**2. Erweiterte Deformationen.** Es sei $\boldsymbol{d}$ eine Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$. Aus Nr. 1,1 wissen wir, daß das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ mit dem zu der Deformation $\boldsymbol{d}$ gehörigen Faktoroid $\mathfrak{D}$, d. h. mit dem auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ gelegenen Faktoroid, dessen Feld durch die zu der Deformation $\boldsymbol{d}$ gehörige Zerlegung $\bar{D}$ von $\mathfrak{G}$ dargestellt wird, isomorph ist.

Ferner wissen wir aus § 7, Nr. 1, daß die Deformation $\boldsymbol{d}$ die sogenannte erweiterte Abbildung $\bar{\boldsymbol{d}}$ des Systems aller Teilmengen in $\mathfrak{G}$ in dasjenige aller Teilmengen in $\mathfrak{G}^*$ eindeutig bestimmt. Die Abbildung $\bar{\boldsymbol{d}}$ wird so definiert, daß jedem Komplex $A \subset \mathfrak{G}$ der aus den $\boldsymbol{d}$-Bildern aller Punkte $a \in A$ bestehende Komplex $\bar{\boldsymbol{d}}A \subset \mathfrak{G}^*$ als das $\bar{\boldsymbol{d}}$-Bild von $A$ zugeordnet wird; außerdem setzt man $\bar{\boldsymbol{d}}O = O$. Man schreibt gelegentlich $\boldsymbol{d}$ statt $\bar{\boldsymbol{d}}$, also etwa $\boldsymbol{d}A$ statt $\bar{\boldsymbol{d}}A$.

Wir betrachten ein Faktoroid $\mathfrak{A}$ auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$. Das Feld von $\mathfrak{A}$ ist also eine erzeugende Zerlegung $\bar{A}$ auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$.

Nach § 7, Nr. 2 stellt das Bild $\boldsymbol{d}\bar{A}$ der Zerlegung $\bar{A}$ dann und nur dann eine Zerlegung auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ dar, wenn die Zerlegungen $\bar{A}, \bar{D}$ komplementär sind, d. h. wenn die Faktoroide $\mathfrak{A}, \mathfrak{D}$ komplementär sind.

Wir nehmen im folgenden an, daß diese Bedingung erfüllt sei.

**1.** Es ist leicht zu zeigen, daß *die Zerlegung $\boldsymbol{d}\bar{A}$ erzeugend ist.* Zu dem Zweck betrachten wir beliebige Elemente $\bar{a}^*, \bar{b}^* \in \boldsymbol{d}\bar{A}$. Offenbar gibt es Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$, für die $\boldsymbol{d}\bar{a} = \bar{a}^*$, $\boldsymbol{d}\bar{b} = \bar{b}^*$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ ist. Nach § 13, Nr. 3,2 haben wir die Beziehung $\boldsymbol{d}\bar{a} \cdot \boldsymbol{d}\bar{b} \subset \boldsymbol{d}\bar{c}$; es gibt also ein Element $(\boldsymbol{d}\bar{c} =)\,\bar{c}^* \in \boldsymbol{d}\bar{A}$ derart, daß $\bar{a}^*\,\bar{b}^* \subset \bar{c}^*$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen.

Das zu der erzeugenden Zerlegung $\boldsymbol{d}\bar{A}$ gehörige Faktoroid auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ heißt das *Bild des Faktoroids* $\mathfrak{A}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$ und wird mit $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ bezeichnet. Das Faktoroid $\mathfrak{A}$ heißt das *Urbild von* $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$.

**2.** Durch die erweiterte Abbildung $\boldsymbol{d}$ ist eine partielle Abbildung des Faktoroids $\mathfrak{A}$ auf das Faktoroid $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt; in derselben wird jedem Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ sein Bild $\boldsymbol{d}\bar{a} \in \boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ zugeordnet. Im folgenden verstehen wir unter der *Abbildung* $\boldsymbol{d}$ *des Faktoroids* $\mathfrak{A}$ *auf das Faktoroid* $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ diese partielle Abbildung.

Wir wollen zeigen, daß *die Abbildung* $\boldsymbol{d}$ *des Faktoroids* $\mathfrak{A}$ *auf das Faktoroid* $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ *eine Deformation darstellt.* In der Tat, aus den Beziehungen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathfrak{A}$, $\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{c}$ folgt $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ und ferner $\boldsymbol{d}\bar{a} \cdot \boldsymbol{d}\bar{b} \subset \boldsymbol{d}\bar{c}$. Wir haben also $\boldsymbol{d}\bar{a} \circ \boldsymbol{d}\bar{b} = \boldsymbol{d}\bar{c} = \boldsymbol{d}(\bar{a} \circ \bar{b})$, womit der Beweis erbracht ist.

Mit Hinsicht auf dieses Resultat nennen wir die Abbildung $\boldsymbol{d}$ des Faktoroids $\mathfrak{A}$ auf das Faktoroid $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ die *erweiterte Deformation* $\boldsymbol{d}$.

**3.** Zu der erweiterten Deformation $\boldsymbol{d}$ des Faktoroids $\mathfrak{A}$ auf das Faktoroid $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ gehört ein auf $\mathfrak{A}$ gelegenes Faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Die Elemente von $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ werden also je durch die Menge derjenigen Elemente von $\mathfrak{A}$ dargestellt, deren Bilder bei der erweiterten Deformation $\boldsymbol{d}$ zusammenfallen.

Mit Hinsicht auf die in § 7, Nr. 2 erzielten Resultate schließen wir, daß die durch das Faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ erzwungene Überdeckung des Faktoroids $\mathfrak{A}$ durch die kleinste gemeinsame Überdeckung $[\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$ der Faktoroide $\mathfrak{A}, \mathfrak{D}$ dargestellt wird.

Wenn wir jedem Element $\bar{u} \in [\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$ dasjenige Element $\bar{\bar{a}} \in \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ zuordnen, welches von den in $\bar{u}$ liegenden Elementen des Faktoroids $\mathfrak{A}$ gebildet wird, so erhalten wir eine isomorphe Abbildung des Faktoroids $[\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$ auf das Faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ (Nr. 1,3); wenn wir ferner jedem Element $\bar{\bar{a}} \in \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ dasjenige Element $\bar{a}^* \in \boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ zuordnen, auf welches sich alle in $\bar{\bar{a}}$ vorkommenden Elemente $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ bei der Deformation $\boldsymbol{d}$ abbilden, so erhalten wir eine isomorphe Abbildung des Faktoroids $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ auf das Faktoroid $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ (Nr. 1,1). Durch Zusammensetzung dieser beiden isomorphen Abbildungen erhalten wir eine isomorphe Abbildung des Faktoroids $[\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$ auf das Faktoroid $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ (§ 13, Nr. 4). Durch sie ist jedem Element $\bar{u} \in [\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$ ein bestimmtes Element $\bar{a}^* \in \boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ zugeordnet, welches das Bild von $\bar{u}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$ ist (§ 7, Nr. 2).

Auf diese Weise sind wir zu dem folgenden Ergebnis gekommen:

*Wenn sich bei der erweiterten Deformation* $\boldsymbol{d}$ *ein Faktoroid* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{G}$ *auf ein Faktoroid* $\mathfrak{A}^*$ *von* $\mathfrak{G}^*$ *abbildet, so sind die Faktoroide* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$, $\mathfrak{A}^*$ *isomorph, also* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{D}] \simeq \mathfrak{A}^*$. *Man erhält einen Isomorphismus des Faktoroids* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$ *auf das Faktoroid* $\mathfrak{A}^*$, *indem man jedem Element von* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$ *sein Bild bei der erweiterten Abbildung* $\boldsymbol{d}$ *zuordnet.*

*Insbesondere ist jede Überdeckung des Faktoroids* $\mathfrak{D}$ *ihrem Bild bei der erweiterten Deformation* $\boldsymbol{d}$ *isomorph; man erhält einen Isomorphismus, indem man jedem Element der erwähnten Überdeckung sein Bild bei der erweiterten Abbildung* $\boldsymbol{d}$ *zuordnet.*

**3. Deformationen von Gruppoidfolgen und von $\alpha$-Gruppoidgebilden.** In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einigen komplizierteren Homomorphiebegriffen im Zusammenhang mit Gruppoidfolgen und $\alpha$-Gruppoidgebilden befassen. Die diesbezügliche Begriffsbildung entsteht durch eine Bereicherung der in § 6, Nr. 9 beschriebenen Verhältnisse durch algebraische, mit dem Multiplikationsbegriff zusammenhängende Tatsachen.

**1.** *Abbildungen von Gruppoidfolgen.* Es sei $\alpha (\geqq 1)$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten zwei $\alpha$-gliedrige Folgen $(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\alpha)$, $(\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\alpha)$, deren Glieder $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\alpha$ Gruppoide sind.

a) Wir nennen die Folge $(\mathfrak{b})$ *isomorph* zu der Folge $(\mathfrak{a})$, wenn der folgende Sachverhalt vorliegt: Es gibt eine Abbildung $\boldsymbol{a}$ der Folge $(\mathfrak{a})$ auf die Folge $(\mathfrak{b})$ derart, daß es zu jedem in $(\mathfrak{a})$ enthaltenen Glied $\mathfrak{a}_\gamma$ einen Isomorphismus $\boldsymbol{i}_\gamma$ des Gliedes $\mathfrak{a}_\gamma$ auf das Glied $\mathfrak{b}_\delta = \boldsymbol{a}\,\mathfrak{a}_\gamma$ von $(\mathfrak{b})$ gibt.

Wenn die Folge $(\mathfrak{b})$ der Folge $(\mathfrak{a})$ isomorph ist, so hat auch die Folge $(\mathfrak{a})$ in bezug auf $(\mathfrak{b})$ dieselbe Eigenschaft; mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *isomorphen Folgen* $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b})$.

b) Wir nehmen nun an, daß die Glieder $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\alpha$ von $(\mathfrak{a})$ und ebenso die Glieder $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\alpha$ von $(\mathfrak{b})$ Faktoroide in dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ darstellen.

Wir nennen die Folge $(\mathfrak{b})$ *halbverknüpft* (*verknüpft*) mit der Folge $(\mathfrak{a})$, wenn die aus den Feldern der Glieder von $(\mathfrak{b})$ bestehende Folge $(b) = (b_1, \ldots, b_\alpha)$ mit der von den Feldern der Glieder von $(\mathfrak{a})$ gebildeten Folge $(a) = (a_1, \ldots, a_\alpha)$ halbverknüpft (verknüpft) ist (§ 6, Nr. 9,1 c).

Wenn die Folge $(\mathfrak{b})$ mit der Folge $(\mathfrak{a})$ halbverknüpft (verknüpft) ist, so hat auch die Folge $(\mathfrak{a})$ in bezug auf $(\mathfrak{b})$ dieselbe Eigenschaft; mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *halbverknüpften* (*verknüpften*) *Folgen* $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b})$.

Mit Hilfe des zweiten Isomorphiesatzes für Gruppoide (Nr. 1,2) zeigt man leicht, daß *zwei verknüpfte Folgen von Faktoroiden im Gruppoid $\mathfrak{G}$ stets isomorph sind.*

**2.** *Deformationen von $\alpha$-Gruppoidgebilden.* Es sei $\alpha (\geqq 1)$ eine natürliche Zahl, und $((\mathfrak{A}) =) (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha)$, $((\mathfrak{A}^*) =) (\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha^*)$ seien zwei beliebige Gruppoidfolgen. Ferner sei $\bar{\mathfrak{A}}$ ein $\alpha$-Gruppoidgebilde bezüglich der Gruppoidfolge $(\mathfrak{A})$ und $\bar{\mathfrak{A}}^*$ ein solches bezüglich der Gruppoidfolge $(\mathfrak{A}^*)$ (§ 15, Nr. 5).

Wir wollen daran erinnern, daß jedes Element $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}} (\bar{a}^* \in \bar{\mathfrak{A}}^*)$ eine $\alpha$-gliedrige Mengenfolge ist, $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) (\bar{a}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*))$, wobei jedes Glied $\bar{a}_\gamma (\bar{a}_\gamma^*)$ einen Komplex im Gruppoid $\mathfrak{A}_\gamma (\mathfrak{A}_\gamma^*)$ darstellt $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Wir nehmen an, daß es einen Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\bar{\mathfrak{A}}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\bar{\mathfrak{A}}^*$ gibt. Dann gilt für je zwei Elemente $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \bar{\mathfrak{A}}$ die Beziehung $\boldsymbol{i}\bar{a} \cdot \boldsymbol{i}\bar{b} = \boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \bar{b})$.

a) Der Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ heißt ein *starker Isomorphismus* des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\bar{\mathfrak{A}}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\bar{\mathfrak{A}}^*$, wenn der folgende Sachverhalt vorliegt:

Es gibt eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ mit folgender Auswirkung: Zu jedem in einem beliebigen Element $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \bar{\mathfrak{A}}$ enthaltenen Glied $\bar{a}_\gamma (\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ gibt es eine Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$, die das Glied $\bar{a}_\gamma$ auf das in dem Element $\boldsymbol{i}\bar{a} = \bar{a}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*) \in \bar{\mathfrak{A}}^*$ enthaltene Glied $\bar{a}_\delta^*$, $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$, punktweise schlicht abbildet. Dabei tritt die folgende Homomorphieerscheinung auf: Es seien $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \bar{\mathfrak{A}}$ beliebige Elemente und $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{c} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha) \in \bar{\mathfrak{A}}$ das entsprechende Produkt; nach Definition eines $\alpha$-Gruppoidgebildes gilt $\bar{a}_\gamma \bar{b}_\gamma \subset \bar{c}_\gamma$. Ferner seien $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*)$, $\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{b}}^* = (\bar{b}_1^*, \ldots, \bar{b}_\alpha^*)$ die $\boldsymbol{i}$-Bilder von $\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}$ und $\bar{\bar{a}}^* \cdot \bar{\bar{b}}^* = \bar{\bar{c}}^* = (\bar{c}_1^*, \ldots, \bar{c}_\alpha^*)$ das entsprechende Produkt; es gilt also $\bar{a}_\gamma^* \bar{b}_\gamma^* \subset \bar{c}_\gamma^*$. Schließlich seien $\boldsymbol{a}_\gamma$, $\boldsymbol{b}_\gamma$, $\boldsymbol{c}_\gamma$ die den Gliedern $\bar{a}_\gamma, \bar{b}_\gamma, \bar{c}_\gamma$ zugeordneten schlichten Abbildungen, durch die also die Glieder $\bar{a}_\gamma, \bar{b}_\gamma$ auf $\bar{a}_\delta^*, \bar{b}_\delta^*$ und (wegen $\boldsymbol{i}\bar{\bar{c}} = \bar{\bar{c}}^*$) das Glied $\bar{c}_\gamma$ auf das Glied $\bar{c}_\delta^*$ punktweise schlicht abgebildet werden ($\delta = \boldsymbol{p}\gamma$). Nun kann die erwähnte Homomorphieerscheinung so beschrieben werden: Für beliebige Punkte $a \in \bar{a}_\gamma$, $b \in \bar{b}_\gamma$ gilt $\boldsymbol{a}_\gamma a \cdot \boldsymbol{b}_\gamma b = \boldsymbol{c}_\gamma(ab)$.

Es ist leicht einzusehen, daß die zu einem starken Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}^*$ inverse Abbildung $\boldsymbol{i}^{-1}$ einen starken Isomorphismus des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}^*$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}$ darstellt. Wenn es einen starken Isomorphismus des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}^*$ gibt, so nennen wir $\mathfrak{A}^*$ zu $\mathfrak{A}$ *stark isomorph*. Offenbar ist dieser Begriff des starken Isomorphismus symmetrisch in bezug auf die beiden $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$; mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *stark isomorphen $\alpha$-Gruppoidgebilden* $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$.

b) Wir nehmen nun an, daß die Gruppoidfolgen $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{A}^*)$ von Faktoroiden $\bar{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_\alpha$ und $\bar{\mathfrak{A}}_1^*, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_\alpha^*$ in dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ gebildet werden. In diesem Fall ist also jedes Element $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \mathfrak{A}$ $(\bar{\bar{a}}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*) \in \mathfrak{A}^*)$ eine $\alpha$-gliedrige Folge, deren Glieder $\bar{a}_\gamma(\bar{a}_\gamma^*)$ jeweils eine aus gewissen Elementen des Faktoroids $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma(\bar{\mathfrak{A}}_\gamma^*)$ bestehende Zerlegung im Gruppoid $\mathfrak{G}$ darstellt.

Wir nennen den Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ *Isomorphismus mit Halbverknüpfung* (*Isomorphismus mit Verknüpfung*) des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}^*$, wenn der folgende Sachverhalt vorliegt:

Es gibt eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ mit folgender Auswirkung: Jedes in einem beliebigen Element $\bar{\bar{a}} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \mathfrak{A}$ enthaltene Glied $\bar{a}_\gamma(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ und das in dem Element $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*) \in \mathfrak{A}^*$ enthaltene Glied $\bar{a}_\delta^*$, $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$, stellen halbverknüpfte (verknüpfte) Zerlegungen im Gruppoid $\mathfrak{G}$ dar.

Es ist leicht einzusehen, daß die zu einem Isomorphismus $\boldsymbol{i}$ mit Halbverknüpfung bzw. Isomorphismus mit Verknüpfung des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}^*$ inverse Abbildung $\boldsymbol{i}^{-1}$ einen Isomorphismus derselben Art des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}^*$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}$ darstellt.

Es sei $\boldsymbol{i}$ ein Isomorphismus mit Halbverknüpfung des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}^*$. Wir betrachten zwei in der oben beschriebenen Beziehung stehende Glieder $\bar{a}_\gamma, \bar{a}_\delta^*$ derart, daß $\bar{a}_\gamma$ in $\bar{\bar{a}}$, $\bar{a}_\delta^*$ in $\boldsymbol{i}\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}^*$ enthalten und $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ ist. Dann sind die beiden Hüllen $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma = \bar{a}_\delta^* \sqsubset \bar{a}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{a}_\delta^* = \bar{a}_\gamma \sqsubset \bar{a}_\delta^*$ von der Nullmenge $\emptyset$ verschieden und verknüpft (§ 4, Nr. 1). Nach dem zweiten Äquivalenzsatz (§ 6, Nr. 8) ist die Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$ der Hülle $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ auf die Hülle $\mathrm{H}\bar{a}_\delta^*$, in der jedes Element in $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ auf das mit ihm inzidente Element in $\mathrm{H}\bar{a}_\delta^*$ abgebildet wird, schlicht. Es gilt also für jedes Element $a \in \mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ die Beziehung $\boldsymbol{a}_\gamma a = a^* (\in \mathrm{H}\bar{a}_\delta^*)$ genau dann, wenn $a \cap a^* \neq \emptyset$ ist.

Wir wollen zeigen, daß *für die Abbildungen* $\boldsymbol{a}_\gamma$ *der zu den Gliedern* $\bar{a}_\gamma$ *der Elemente* $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ *zugeordneten Hüllen* $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$ *die in* a) *beschriebene Homomorphieerscheinung auftritt.*

Beweis. Es seien $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \mathfrak{A}$ beliebige Elemente und $\bar{a}\bar{b} = \bar{c} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha) \in \mathfrak{A}$ das entsprechende Produkt; ferner seien $\boldsymbol{i}\bar{a} = \bar{a}^* = (\bar{a}_1^*, \ldots, \bar{a}_\alpha^*)$, $\boldsymbol{i}\bar{b} = \bar{b}^* = (\bar{b}_1^*, \ldots, \bar{b}_\alpha^*) \in \mathfrak{A}^*$ die $\boldsymbol{i}$-Bilder von $\bar{a}, \bar{b}$ und $\bar{a}^* \bar{b}^* = \bar{c}^* = (\bar{c}_1^*, \ldots, \bar{c}_\alpha^*) \in \mathfrak{A}^*$ das entsprechende Produkt. Schließlich seien $\boldsymbol{a}_\gamma, \boldsymbol{b}_\gamma, \boldsymbol{c}_\gamma$ die den Hüllen $\mathrm{H}\bar{a}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{b}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{c}_\gamma$ zugeordneten schlichten Abbildungen.

Wir betrachten beliebige Elemente $a \in \mathrm{H}\bar{a}_\gamma$, $b \in \mathrm{H}\bar{b}_\gamma$, ferner ihre Bilder $\boldsymbol{a}_\gamma a = a^* \in \mathrm{H}\bar{a}_\delta^*$, $\boldsymbol{b}_\gamma b = b^* \in \mathrm{H}\bar{b}_\delta^*$ und die entsprechenden Produkte $c = a \circ b \in \bar{c}_\gamma$, $c^* = a^* \circ b^* \in \bar{c}_\gamma^*$. Dann haben wir $a \cap a^* \neq \emptyset \neq b \cap b^*$ und ferner

$$c = a \circ b \supset ab \supset (a \cap a^*)(b \cap b^*),$$
$$c^* = a^* \circ b^* \supset a^* b^* \supset (a^* \cap a)(b^* \cap b).$$

Wir sehen, daß die Elemente $c$ und $c^*$ inzident sind. Es gilt also $c \in \mathrm{H}\bar{c}_\gamma$, $c^* \in \mathrm{H}\bar{c}_\delta^*$ und ferner $c^* = \boldsymbol{c}_\gamma c$, also $\boldsymbol{a}_\gamma a \circ \boldsymbol{b}_\gamma b = \boldsymbol{c}_\gamma (a \circ b)$, womit das Gewünschte bewiesen ist.

Ist $\boldsymbol{i}$ insbesondere ein Isomorphismus mit Verknüpfung, so fallen die betrachteten Hüllen mit den entsprechenden Elementen zusammen. Wir sehen, daß *jeder Isomorphismus mit Verknüpfung des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}^*$ einen starken Isomorphismus darstellt.*

Wenn es einen Isomorphismus mit Halbverknüpfung (Isomorphismus mit Verknüpfung) des $\alpha$-Gruppoidgebildes $\mathfrak{A}$ auf das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}^*$ gibt, so nennen wir das $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}^*$ *isomorph und halbverknüpft* (*isomorph und verknüpft*) mit dem $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}$. Offenbar sind diese Begriffe in bezug auf die beiden $\alpha$-Gruppoidgebilde $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ symmetrisch; mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *isomorphen und halbverknüpften* (*isomorphen und verknüpften*) *$\alpha$-Gruppoidgebilden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$. Insbesondere sind zwei isomorphe und verknüpfte $\alpha$-Gruppoidgebilde stark isomorph.*

## 4. Übungsaufgaben.

1. Der Leser möge sich die Isomorphiesätze für Gruppoide am Beispiel der in § 15, Nr. 2, Nr. 3, 2 und Nr. 4, 1 betrachteten Gruppoide $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_m$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n$, $\bar{\bar{\mathfrak{Z}}}_d$ überlegen.

2. Es sei $\boldsymbol{i}$ ein Isomorphismus des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$. Bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{i}$ wird das Bild eines auf $\mathfrak{G}$ gelegenen Faktoroids $\bar{\mathfrak{A}}$ durch ein Faktoroid $\boldsymbol{i}\bar{\mathfrak{A}}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}^*$ dargestellt. Die partielle erweiterte Abbildung $\boldsymbol{i}$ des Faktoroids $\bar{\mathfrak{A}}$ auf das Faktoroid $\boldsymbol{i}\bar{\mathfrak{A}}$ ist ein Isomorphismus.

3. Es sei $\boldsymbol{d}$ eine Deformation des Gruppoids $\mathfrak{G}$ auf das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ und $\bar{\mathfrak{D}}$ das zu dieser Deformation gehörige Faktoroid. Jedes auf $\mathfrak{G}^*$ gelegene Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}^*$ stellt das Bild einer Überdeckung $\bar{\mathfrak{A}}$ von $\bar{\mathfrak{D}}$ bei der erweiterten Abbildung $\boldsymbol{d}$ dar.

4. Zwei adjungierte Ketten von Faktoroiden in einem Gruppoid $\mathfrak{G}$ besitzen stets verknüpfte Verfeinerungen (§ 15, Nr. 3, 5; § 6, Nr. 10, 9).