inzidiert. Damit haben wir festgestellt, daß je zwei benachbarte Elemente $\bar{c}_\nu, \bar{c}_{\nu+1}$ mit einem geeigneten Element $\bar{z}_\nu \in \bar{B}$ inzident sind, so daß die Folge (3) tatsächlich eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{c}$ nach $\bar{r}$ darstellt.

3. *Größte gemeinsame Verfeinerung.* Es seien wiederum $\bar{A}, \bar{B}$ erzeugende Zerlegungen auf $\mathfrak{G}$.

Es gilt der Satz, daß *die größte gemeinsame Verfeinerung* $(\bar{A}, \bar{B})$ *der Zerlegungen* $\bar{A}, \bar{B}$ *ebenfalls erzeugend ist.*

Diesen Satz haben wir bereits auf Grund der Gleichheit $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A} \sqcap \bar{B}$ bewiesen (§ 14, Nr. 3,2); wir haben gezeigt, daß die Durchdringung $\bar{A} \sqcap \bar{B}$ der erzeugenden Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ ebenfalls erzeugend ist.

5. Übungsaufgaben.

1. Wenn ein Element $\bar{a} \in \bar{A}$ einer erzeugenden Zerlegung $\bar{A}$ in $\mathfrak{G}$ eine gruppoidale Teilmenge $X \subset \mathfrak{G}$ enthält, also $(\emptyset \neq) X \subset \bar{a}$, so ist dieses Element $\bar{a}$ selbst gruppoidal.

2. Es sei $\mathfrak{G}$ das aus allen natürlichen Zahlen bestehende Gruppoid, in dem die Multiplikation auf folgende Weise definiert ist: Für $a, b \in \mathfrak{G}$ ist das Produkt ab die durch das dekadische Symbol $a_1 \ldots a_\alpha\, b_1 \ldots b_\beta$ definierte Zahl, wobei $a_1 \ldots a_\alpha$ $(b_1 \ldots b_\beta)$ das dekadische Symbol der Zahl $a(b)$ darstellt. Dann gilt: a) Das Gruppoid $\mathfrak{G}$ ist assoziativ; b) die Zerlegung von $\mathfrak{G}$, deren Elemente $\bar{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ jeweils von allen mit i Ziffern dekadisch darstellbaren natürlichen Zahlen gebildet werden, ist erzeugend.

3. Das Gruppoid $\mathfrak{G}$, dessen Feld von einer beliebigen Menge gebildet und in dem die Multiplikation durch die Formel $ab = a$ oder $ab = b$ für $a, b \in \mathfrak{G}$ definiert wird, ist assoziativ, und alle seine Zerlegungen sind erzeugend.

§ 15. Faktoroide

Der Faktoroidbegriff, von dem wir jetzt sprechen werden, spielt in der gesamten weiteren Theorie eine führende Rolle.

1. Grundbegriffe. Es sei $\bar{A}$ eine erzeugende Zerlegung in dem Gruppoid $\mathfrak{G}$. Dieser Zerlegung $\bar{A}$ können wir das auf folgende Weise definierte Gruppoid $\mathfrak{A}$ zuordnen: Das Feld von $\mathfrak{A}$ ist die erzeugende Zerlegung $\bar{A}$; die Multiplikation von $\mathfrak{A}$ besteht darin, daß das Produkt eines Elements $\bar{a} \in \bar{A}$ mit einem Element $\bar{b} \in \bar{A}$ als das der Beziehung $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ genügende Element $\bar{c} \in \bar{A}$ definiert wird. Wir schreiben

$$\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{c}.$$

Wir verwenden also das Zeichen $\circ$ für Produkte in dem Gruppoid $\mathfrak{A}$, ähnlich wie wir den Malpunkt für Produkte im Gruppoid $\mathfrak{G}$ verwenden. Es gilt also $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{a} \circ \bar{b} \in \mathfrak{A}$.

Das Gruppoid $\mathfrak{A}$ nennen wir *Faktoroid in dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$ oder, falls die Zerlegung $\bar{A}$ das Gruppoid $\mathfrak{G}$ bedeckt, *Faktoroid auf dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$ oder auch *Faktoroid des Gruppoids* $\mathfrak{G}$. Jede erzeugende Zerlegung im Gruppoid $\mathfrak{G}$ bestimmt also eindeutig ein Faktoroid in $\mathfrak{G}$, und zwar dasjenige, dessen

Feld sie darstellt. Wir sagen, zu jeder erzeugenden Zerlegung in $\mathfrak{G}$ *gehöre* ein bestimmtes Faktoroid in $\mathfrak{G}$.

Wir wollen beachten, daß *es auf dem Gruppoid* $\mathfrak{G}$ *immer wenigstens zwei Faktoroide gibt, nämlich das zu der größten erzeugenden Zerlegung* $\bar{G}_{\max}$ *gehörige größte Faktoroid* $\bar{\mathfrak{G}}_{\max}$ *und das zu der kleinsten erzeugenden Zerlegung* $\bar{G}_{\min}$ *gehörige kleinste Faktoroid* $\bar{\mathfrak{G}}_{\min}$. Diese *extremen Faktoroide auf* $\mathfrak{G}$ sind offenbar voneinander verschieden oder nicht, je nachdem, ob das Gruppoid $\mathfrak{G}$ von mehr als einem oder genau von einem Punkt gebildet wird.

2. Beispiel eines Faktoroids. Wir betrachten das Gruppoid $\mathfrak{Z}$. Es sei n eine natürliche Zahl und $\bar{a}_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ die von denjenigen Zahlen von $\mathfrak{Z}$ gebildete Menge, die bei der Division durch n den Rest i ergeben. Die Mengen $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ sind also die folgenden:

$$\begin{array}{llllll}
\bar{a}_0 = \{\ldots, -2n, & -n, & 0, & n, & 2n, & \ldots\}, \\
\bar{a}_1 = \{\ldots, -2n+1, & -n+1, & 1, & n+1, & 2n+1, & \ldots\}, \\
\bar{a}_2 = \{\ldots, -2n+2, & -n+2, & 2, & n+2, & 2n+2, & \ldots\}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{a}_{n-1} = \{\ldots, -2n+n-1, & -n+n-1, & n-1, & n+n-1, & 2n+n-1, & \ldots\}.
\end{array}$$

Wir sehen, daß das Mengensystem $\{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}\}$ eine Zerlegung des Gruppoids $\mathfrak{Z}$ darstellt, die wir mit $\bar{Z}_n$ bezeichnen. Es ist leicht zu zeigen, daß $\bar{Z}_n$ erzeugend ist. Zu diesem Zweck haben wir festzustellen, daß das Produkt $\bar{a}_i \bar{a}_j$ jeder zweigliedrigen Folge von Elementen $\bar{a}_i, \bar{a}_j \in \bar{Z}_n$ als Teilmenge in einem Element $\bar{a}_k \in \bar{Z}_n$ enthalten ist, also $\bar{a}_i \bar{a}_j \subset \bar{a}_k$. Nun ist aber nach Definition die Menge $\bar{a}_i \bar{a}_j$ das System aller Produkte $a \cdot b$, wobei a die Zahlen von $\bar{a}_i$ und b die von $\bar{a}_j$ durchläuft. Es sei also $a \in \bar{a}_i$ $(b \in \bar{a}_j)$ eine beliebige Zahl derart, daß der Rest von $a(b)$ durch n gleich $i(j)$ ist. Nach Definition der Multiplikation in $\mathfrak{Z}$ stimmt das Produkt $a \cdot b$ mit der Zahl $a + b$ überein, die in der Menge $\bar{a}_k$ enthalten ist; dabei bedeutet k den Rest von $i + j$ durch n, da die Zahlen $a + b$ und $i + j$ bei der Division durch n die gleichen Reste ergeben. Es gilt also $\bar{a}_i \bar{a}_j \subset \bar{a}_k$, und wir sehen, daß die Zerlegung $\bar{Z}_n$ tatsächlich erzeugend ist. Das zugehörige Faktoroid $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ besteht also aus den n Elementen $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$, und seine Multiplikation ist durch die Formel $\bar{a}_i \circ \bar{a}_j = \bar{a}_k$ definiert, wobei k den Rest von $i + j$ bei Division durch n bedeutet. Offenbar stellt das Faktoroid $\bar{\mathfrak{Z}}_1$ das größte Faktoroid von $\mathfrak{Z}$ dar.

3. Faktoroide in Gruppoiden. Wir wollen zunächst Faktoroide in Gruppoiden betrachten. Einleitend sei daran erinnert, daß wir auf Gruppoide die für ihre Felder und Multiplikationen definierten Begriffe und Symbole übertragen (§ 12, Nr. 2). Dieser Erweiterungsprozeß betrifft natürlich auch Faktoroide. Dennoch wollen wir die wichtigsten diesbezüglichen Begriffe und Symbole sowie die entsprechenden Resultate ausdrücklich besprechen.

1. *Überdeckungen und Verfeinerungen.* Es seien $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ Faktoroide im Gruppoid $\mathfrak{G}$.

Wir nennen das Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{B}})$ *Überdeckung* (*Verfeinerung*) von $\bar{\mathfrak{B}}(\bar{\mathfrak{A}})$, wenn für die Felder $\bar{A}, \bar{B}$ von $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ die Beziehung $\bar{A} \geqq \bar{B}$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ oder $\bar{\mathfrak{B}} \leqq \bar{\mathfrak{A}}$. Wir sehen, daß die Beziehung $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$

nur dann möglich ist, wenn die beiden Faktoroide auf demselben Untergruppoid $\mathbf{s}\mathfrak{A} = \mathbf{s}\mathfrak{B}$ liegen. Wenn $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ und zugleich $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$ ist, so wird die Überdeckung (Verfeinerung) $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ *echt* genannt; in diesem Fall schreiben wir gelegentlich auch $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$.

2. *Hüllen und Durchdringungen.* Es sei $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ ein Untergruppoid und $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ Faktoroide in $\mathfrak{G}$.

Wenn $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ ist, so stellen nach dem Satz aus § 14, Nr. 3, 2 die Hülle $B \sqsubset \bar{C}$ und die Durchdringung $B \sqcap \bar{C}$ je eine erzeugende Zerlegung in $\mathfrak{G}$ dar. Das zugehörige Faktoroid in $\mathfrak{G}$ nennen wir die *Hülle des Untergruppoids* $\mathfrak{B}$ *in dem Faktoroid* $\mathfrak{C}$ bzw. die *Durchdringung des Untergruppoids* $\mathfrak{B}$ (*des Faktoroids* $\mathfrak{C}$) *mit dem Faktoroid* $\mathfrak{C}$ (*mit dem Untergruppoid* $\mathfrak{B}$) und schreiben $\mathfrak{B} \sqsubset \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{C} \sqsupset \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{C} \sqcap \mathfrak{B}$.

Ebenso klar sind die im Fall $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ definierten Faktoroide $\mathfrak{A} \sqsubset \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{C} \sqsupset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$; das erste heißt die *Hülle des Faktoroids* $\mathfrak{A}$ *im Faktoroid* $\mathfrak{C}$, das zweite die *Durchdringung des Faktoroids* $\mathfrak{A}$ *mit dem Faktoroid* $\mathfrak{C}$. Es gilt natürlich $\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C} \sqcap \mathfrak{A}$.

Wir wollen beachten, daß $\mathfrak{B} \sqsubset \mathfrak{C}$ ein Untergruppoid im Faktoroid $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ ein Faktoroid im Untergruppoid $\mathfrak{B}$ darstellt.

Wenn insbesondere $\mathfrak{C}$ auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ liegt, so ist die Bedingung $B \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ erfüllt, und das Faktoroid $\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$ liegt auf dem Untergruppoid $\mathfrak{B}$. Wir sehen, daß jedes aus einem Untergruppoid $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}$ und einem Faktoroid $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{G}$ bestehende Gebilde zwei Faktoroide in $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt, nämlich $\mathfrak{B} \sqsubset \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \sqcap \mathfrak{C}$; das erste ist ein Untergruppoid in $\mathfrak{C}$, das zweite ein Faktoroid auf $\mathfrak{B}$.

Ähnlich bestimmt jedes aus einem Faktoroid $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ und einem solchen $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{G}$ bestehende Gebilde die zwei Faktoroide $\mathfrak{A} \sqsubset \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$, von denen das erste ein Untergruppoid in $\mathfrak{C}$ und das zweite ein Faktoroid auf $\mathbf{s}\mathfrak{A}$ darstellt.

Bedecken die beiden Faktoroide $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ *das Gruppoid* $\mathfrak{G}$, *so stimmt* $\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$ *mit der sogenannten größten gemeinsamen Verfeinerung* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ *der Faktoroide* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ *überein, also* $\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ (Nr. 4, 5).

Beispiel. Um die vorhergehenden Begriffe an einem Beispiel zu erläutern, wollen wir wieder das auf dem Gruppoid $\mathfrak{Z}$ liegende Faktoroid $\mathfrak{Z}_n$ $(n \geqq 1)$ betrachten (Nr. 2). Es sei $\mathfrak{A}_m$ das in $\mathfrak{Z}$ gelegene Untergruppoid, dessen Feld von allen ganzzahligen Vielfachen irgendeiner natürlichen Zahl m gebildet wird. Um unser Beispiel zu vereinfachen, wollen wir annehmen, daß die Zahlen m, n relativ prim seien.

Es handelt sich darum, die beiden Faktoroide $\mathfrak{A}_m \sqsubset \mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{A}_m \sqcap \mathfrak{Z}_n$ zu bestimmen.

Zunächst überlegen wir uns, welche der Elemente $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1} \in \mathfrak{Z}_n$ mit dem Untergruppoid $\mathfrak{A}_m$ inzident sind. Ein Element $\bar{a}_i \in \mathfrak{Z}_n$ ist offenbar dann und nur dann mit $\mathfrak{A}_m$ inzident, wenn es ein ganzzahliges Vielfaches xm der Zahl m enthält (x bedeutet eine ganze Zahl). Da jede in $\bar{a}_i$ vorkommende Zahl die Form $yn + i$ besitzt, wobei y eine ganze Zahl ist, sehen wir, daß $\bar{a}_i$ dann und nur dann mit $\mathfrak{A}_m$ inzident ist, wenn die Gleichung $xm = yn + i$ und folglich auch die Gleichung $xm - yn = i$ in ganzen Zahlen x, y

lösbar ist. Nun sind aber die Zahlen m, n relativ prim, und daraus folgt, daß die Gleichung $am - bn = 1$ ganzzahlige Lösungen a, b besitzt. Wir sehen, daß die Gleichung $xm - yn = i$ für jedes $i = 0, \ldots, n-1$ in ganzen Zahlen x, y lösbar ist, und zwar mit $x = ai$, $y = bi$. Folglich ist jedes Element $\bar{a}_i \in \mathfrak{Z}_n$ mit dem Untergruppoid $\mathfrak{A}_m$ inzident. Auf diese Weise kommen wir zu dem Resultat, daß das Faktoroid $\mathfrak{A}_m \sqsubset \mathfrak{Z}_n$ mit $\mathfrak{Z}_n$ übereinstimmt. Das Faktoroid $\mathfrak{A}_m \sqcap \mathfrak{Z}_n$ wird von denjenigen Elementen gebildet, die durch die in den einzelnen Elementen $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ enthaltenen ganzzahligen Vielfachen der Zahl m dargestellt werden.

3. *Halbverknüpfte und verknüpfte Faktoroide.* Es seien $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ Faktoroide in $\mathfrak{G}$.

Wir nennen die Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ *halbverknüpft* (*verknüpft*), wenn ihre Felder $\bar{A}, \bar{C}$ diese Eigenschaft besitzen (§ 4, Nr. 1). Zum Beispiel stellen die Hülle $\mathfrak{X} \sqsubset \bar{\mathfrak{Y}}$ eines Untergruppoids $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{G}$ in einem Faktoroid $\bar{\mathfrak{Y}}$ in $\mathfrak{G}$ und die Durchdringung $\bar{\mathfrak{Y}} \sqcap \mathfrak{X}$ $(X \cap \mathbf{s}\bar{Y} \neq \emptyset)$ stets verknüpfte Faktoroide dar.

Wir setzen nun die Gültigkeit der Beziehungen $\bar{\mathfrak{A}} = \bar{\mathfrak{C}} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{A}} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$ voraus. Dann haben wir das Untergruppoid $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}} \cap \mathbf{s}\bar{\mathfrak{C}}$ in $\mathfrak{G}$ und die auf ihm liegenden Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathbf{s}\bar{\mathfrak{C}}, \bar{\mathfrak{C}} \sqcap \mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$. Aus dem Satz aus § 14, Nr. 3,3 folgern wir, daß *durch jede gemeinsame Überdeckung* $\bar{\mathfrak{B}}$ *der genannten Faktoroide verknüpfte Überdeckungen* $\mathring{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{A}}$, $\mathring{\mathfrak{C}} \geqq \bar{\mathfrak{C}}$ *von* $\bar{\mathfrak{A}}$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{C}}$ *erzwungen werden, wobei sich* $\mathring{\mathfrak{A}}$ *und* $\mathring{\mathfrak{C}}$ *im Faktoroid* $\bar{\mathfrak{B}}$ *durchdringen*, $\mathring{\mathfrak{A}} \sqcap \mathring{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{B}}$.

4. *Adjungierte Faktoroide.* Es seien $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ Faktoroide und $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ Untergruppoide in $\mathfrak{G}$; ferner sei $\mathfrak{A} = \mathbf{s}\,\bar{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{C} = \mathbf{s}\bar{\mathfrak{C}}$.

Wir setzen die Gültigkeit der Beziehungen $\mathfrak{B} \in \bar{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{D} \in \bar{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D} \neq \emptyset$ voraus. Dabei bedeutet z. B. die erste Formel, daß das Feld von $\mathfrak{B}$ als Element im Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ enthalten ist.

Wir nennen die Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ *adjungiert* in bezug auf die Untergruppoide $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$, wenn die Felder $\bar{A}, \bar{C}$ von $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ in bezug auf die Felder B, D von $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ diese Eigenschaft besitzen (§ 4, Nr. 2). Dieser Fall kann auch durch die Formel

$$\mathbf{s}(\mathfrak{D} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{C}) = \mathbf{s}(\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}} \sqcap \mathfrak{A})$$

beschrieben werden.

Es seien nun die Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ in bezug auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ adjungiert. Dann sind

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{A}}_1 &= \mathfrak{C} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}, & \bar{\mathfrak{A}}_2 &= \mathfrak{D} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}, \\ \bar{\mathfrak{C}}_1 &= \mathfrak{A} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}, & \bar{\mathfrak{C}}_2 &= \mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}} \end{aligned}$$

Faktoroide in $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\mathfrak{A}_1 = \mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}_1$, $\mathfrak{A}_2 = \mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}_2$, $\mathfrak{C}_1 = \mathbf{s}\bar{\mathfrak{C}}_1$, $\mathfrak{C}_2 = \mathbf{s}\bar{\mathfrak{C}}_2$. Aus dem Ergebnis von § 4, Nr. 2 erhalten wir im Hinblick auf § 14, Nr. 4,2 und § 14, Nr. 3,3 den folgenden Satz:

Es gibt verknüpfte Überdeckungen $\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{C}}$ *von* $\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{C}}_1$ *derart, daß* $\mathfrak{A}_2 \in \mathring{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{C}_2 \in \mathring{\mathfrak{C}}$ *ist;* diese Überdeckungen sind durch die in § 4, Nr. 2a) gegebene Konstruktion bestimmt. *Die Untergruppoide* $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{C}_2$ *sind inzident.*

5. *Ketten von Faktoroiden.* Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Untergruppoide in $\mathfrak{G}$. Unter einer *Kette von Faktoroiden von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ oder *Kette von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ verstehen wir eine endliche Folge von $\alpha (\geqq 1)$ Faktoroiden $\bar{\mathfrak{K}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{K}}_\alpha$ in $\mathfrak{G}$ mit den folgenden Eigenschaften: a) $\bar{\mathfrak{K}}_1$ liegt auf $\mathfrak{A}$; b) $\bar{\mathfrak{K}}_{\gamma+1}$ liegt auf einem Element von $\bar{\mathfrak{K}}_\gamma$ für $1 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$; c) $\mathfrak{B} \in \bar{\mathfrak{K}}_\alpha$. Eine solche Kette wird mit

$$\bar{\mathfrak{K}}_1 \to \cdots \to \bar{\mathfrak{K}}_\alpha$$

oder kürzer mit $[\bar{\mathfrak{K}}]$ bezeichnet.

Die in § 2, Nr. 5 und § 4, Nr. 2 für Ketten von Zerlegungen definierten Begriffe können unmittelbar auf Ketten von Faktoroiden übertragen werden. Insbesondere wird der Begriff von adjungierten Ketten von Faktoroiden so definiert:

Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ Untergruppoide in $\mathfrak{G}$ und

$$([\bar{\mathfrak{K}}] =)\ \bar{\mathfrak{K}}_1 \to \cdots \to \bar{\mathfrak{K}}_\alpha,$$
$$([\bar{\mathfrak{L}}] =)\ \bar{\mathfrak{L}}_1 \to \cdots \to \bar{\mathfrak{L}}_\beta$$

Ketten von Faktoroiden von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ bzw. von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$.

Die Ketten $[\bar{\mathfrak{K}}]$, $[\bar{\mathfrak{L}}]$ heißen *adjungiert*, wenn a) die Enden von $[\bar{\mathfrak{K}}]$ und $[\bar{\mathfrak{L}}]$ dieselben sind, also $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$; b) je zwei Glieder $\bar{\mathfrak{K}}_\gamma$, $\bar{\mathfrak{L}}_\delta$ von $[\bar{\mathfrak{K}}]$ bzw. $[\bar{\mathfrak{L}}]$ in bezug auf $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{K}}_{\gamma+1}$, $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{L}}_{\delta+1}$ adjungiert sind, und zwar für $\gamma = 1, \ldots, \alpha$ und $\delta = 1, \ldots, \beta$; dabei ist $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{K}}_{\alpha+1} = \mathfrak{B}$, $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{L}}_{\beta+1} = \mathfrak{D}$.

4. Faktoroide auf Gruppoiden. Wir wollen nun insbesondere Faktoroide *auf* Gruppoiden betrachten. Die diesbezüglichen Ergebnisse kommen auch für Faktoroide in Gruppoiden weitgehend zur Geltung, da jedes Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ im Gruppoid $\mathfrak{G}$ zugleich ein Faktoroid auf dem Untergruppoid $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$ darstellt.

1. *Überdeckungen und Verfeinerungen.* Wir knüpfen an die in Nr. 3, 1 erläuterten Begriffe von Überdeckungen und Verfeinerungen eines Faktoroids im Gruppoid $\mathfrak{G}$ an. Wir wollen nun den Spezialfall eines Faktoroids *auf* dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ näher betrachten.

Es seien $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ Faktoroide auf $\mathfrak{G}$. Wir wissen, daß das Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ ($\bar{\mathfrak{B}}$) Überdeckung (Verfeinerung) von $\bar{\mathfrak{B}}$ ($\bar{\mathfrak{A}}$) genannt und dieser Sachverhalt durch die Formel $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ oder $\bar{\mathfrak{B}} \leqq \bar{\mathfrak{A}}$ ausgedrückt wird, wenn für die Felder $\bar{A}$, $\bar{B}$ von $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ die Beziehung $\bar{A} \geqq \bar{B}$ gilt. Ferner kennen wir die Bedeutung der Formel $\bar{\mathfrak{A}} > \bar{\mathfrak{B}}$ oder $\bar{\mathfrak{B}} < \bar{\mathfrak{A}}$.

Offenbar ist $\bar{\mathfrak{G}}_{\max}$ ($\bar{\mathfrak{B}}$) die größte (kleinste) Überdeckung von $\bar{\mathfrak{B}}$, und zwar in dem Sinn, daß jede Überdeckung von $\bar{\mathfrak{B}}$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{G}}_{\max}$ und eine Überdeckung von $\bar{\mathfrak{B}}$ ist; analog stellt das Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ ($\bar{\mathfrak{G}}_{\min}$) die größte (kleinste) Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{A}}$ dar.

Für $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ ist die Zerlegung $\bar{A}$ eine Überdeckung von $\bar{B}$, und folglich ist diese Überdeckung durch eine auf der Zerlegung $\bar{B}$, d. h. auf dem Faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ liegende Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ erzwungen (§ 2, Nr. 4). Die Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ besteht also aus Elementen, die durch je ein System von Untermengen in $\mathfrak{G}$, die als Elemente in $\bar{\mathfrak{B}}$ vorkommen, dargestellt werden, und die Zerlegung $\bar{A}$ entsteht durch Summenbildung aller je in demselben Element von $\bar{\bar{B}}$ enthaltenen Elemente von $\bar{\mathfrak{B}}$.

Wenn umgekehrt irgendeine Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ auf dem Faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ gegeben ist, so wird durch sie wohl eine Überdeckung $\bar{A}$ der Zerlegung $\bar{B}$ erzwungen, die jedoch keinesfalls erzeugend zu sein braucht. Im allgemeinen gehört also zu der durch die Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ erzwungenen Überdeckung von $\bar{B}$ kein Faktoroid.

Es gilt nun der folgende

Satz. *Es sei $\bar{\mathfrak{B}}$ ein Faktoroid auf $\mathfrak{G}$ und $\bar{\bar{B}}$ eine auf ihm liegende Zerlegung; ferner sei $\bar{A}$ die durch $\bar{\bar{B}}$ erzwungene Überdeckung des Feldes $\bar{B}$ von $\bar{\mathfrak{B}}$. Die Zerlegung $\bar{A}$ ist dann und nur dann erzeugend, wenn dies für die Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ der Fall ist.*

Beweis. a) Wir nehmen an, die Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ sei erzeugend. Wir betrachten beliebige Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$. Es ist zu zeigen, daß es ein Element $\bar{a}_3 \in \bar{A}$ gibt, für welches $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$ ist. Nun ist aber $\bar{a}_1 = \bigcup \bar{b}_1$, $\bar{a}_2 = \bigcup \bar{b}_2$, wobei sich die erste (zweite) Summe auf alle in einem bestimmten Element $\bar{\bar{b}}_1$ $(\bar{\bar{b}}_2)$ von $\bar{\bar{B}}$ enthaltenen Elemente $\bar{b}_1$ $(\bar{b}_2)$ von $\bar{\mathfrak{B}}$ bezieht. Da die Zerlegung $\bar{\bar{B}}$ erzeugend ist, gibt es ein Element $\bar{\bar{b}}_3 \in \bar{\bar{B}}$ derart, daß $\bar{\bar{b}}_1 \circ \bar{\bar{b}}_2 \subset \bar{\bar{b}}_3$ ist. Wir bezeichnen mit $\bar{a}_3$ die Summe der in $\bar{\bar{b}}_3$ enthaltenen Elemente von $\bar{\mathfrak{B}}$ und erhalten dann die Beziehung $\bar{a}_3 \in \bar{A}$. Offenbar gilt für jedes Element $\bar{b}_1$ $(\bar{b}_2)$, auf welches sich die oben erwähnte erste (zweite) Summe bezieht, $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_1 \circ \bar{\bar{b}}_2 \subset \bar{\bar{b}}_3$. Folglich bestehen die Beziehungen $\bar{a}_1\bar{a}_2 = \bigcup\bigcup \bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bigcup\bigcup \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$, womit das Gewünschte bewiesen ist.

b) Wir nehmen an, die Zerlegung $\bar{A}$ sei erzeugend. Wir betrachten beliebige Elemente $\bar{\bar{b}}_1, \bar{\bar{b}}_2 \in \bar{\bar{B}}$ und behalten die obige Bedeutung für $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ und $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ bei. Da die Zerlegung $\bar{A}$ erzeugend ist, gibt es ein Element $\bar{a}_3 \in \bar{A}$, für das $\bar{a}_1\bar{a}_2 \subset \bar{a}_3$ ist. Nach Definition von $\bar{A}$ gibt es Elemente $\bar{b}_3 \in \bar{\mathfrak{B}}$ derart, daß $\bar{a}_3 = \bigcup \bar{b}_3$ ist und die Menge dieser Elemente ein Element $\bar{\bar{b}}_3 \in \bar{\bar{B}}$ bildet. Für $\bar{b}_1 \in \bar{\bar{b}}_1$, $\bar{b}_2 \in \bar{\bar{b}}_2$ besteht die Beziehung $\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{a}_3$, und daher gibt es ein Element $\bar{b}_3 \in \bar{\bar{b}}_3$ mit der Eigenschaft $\bar{b}_1\bar{b}_2 \subset \bar{b}_3$. Daraus folgt $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 = \bar{b}_3 \in \bar{\bar{b}}_3$ und schließlich $\bar{\bar{b}}_1 \circ \bar{\bar{b}}_2 \subset \bar{\bar{b}}_3$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir sehen, daß beide Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{\bar{B}}$ zugleich erzeugend sind, d. h., wenn eine von ihnen erzeugend ist, so hat auch die andere dieselbe Eigenschaft. Wenn dieser Fall vorliegt, so gehört zu der Zerlegung $\bar{A}$ ein auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ liegendes Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$, und es besteht die Beziehung $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$; ebenso gehört zu $\bar{\bar{B}}$ ein auf dem Faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ liegendes Faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$. Wir sagen, das Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ sei die durch das Faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ *erzwungene Überdeckung* des Faktoroids $\bar{\mathfrak{B}}$. Jedes auf einem Faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{G}$ liegende Faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ erzwingt also eine wohlbestimmte Überdeckung des Faktoroids $\bar{\mathfrak{B}}$, und umgekehrt ist jede Überdeckung des Faktoroids $\bar{\mathfrak{B}}$ durch ein wohlbestimmtes, auf $\bar{\mathfrak{B}}$ liegendes Faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ erzwungen.

Beispiel. Um die obigen Begriffe an einem Beispiel zu erläutern, wollen wir wieder das auf dem Gruppoid $\mathfrak{Z}$ liegende Faktoroid $\bar{\mathfrak{Z}}_n$ betrachten (Nr. 2). Wir nehmen an, daß die natürliche Zahl n wenigstens gleich 2 sei und keine ungerade Primzahl darstelle. Es sei d ein den Ungleichungen $1 < d < n$ genügender Teiler von n, so daß $n = qd$ ist; q stellt eine natürliche, den Ungleichungen $1 < q < n$ genügende Zahl dar. Wir betrachten nun die auf dem

Faktoroid $\mathfrak{Z}_n$ liegende und von den folgenden Elementen $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{d-1}$ gebildete Zerlegung $\overline{\overline{Z}}_d$:

$$\begin{array}{llll} \bar{\bar{a}}_0 &= \{\bar{a}_0, & \bar{a}_d & , \ldots, \bar{a}_{(q-1)d}\}, \\ \bar{\bar{a}}_1 &= \{\bar{a}_1, & \bar{a}_{d+1} & , \ldots, \bar{a}_{(q-1)d+1}\}, \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \bar{\bar{a}}_{d-1} &= \{\bar{a}_{d-1}, & \bar{a}_{d+d-1}, & \ldots, \bar{a}_{(q-1)d+d-1}\}. \end{array}$$

Wir sehen, daß jedes Element $\bar{\bar{a}}_i \in \overline{\overline{Z}}_d (i = 0, \ldots, d-1)$ von denjenigen Elementen $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ des Faktoroids $\mathfrak{Z}_n$ gebildet wird, deren Indizes bei der Division durch d den Rest i ergeben. Wir wollen nun zeigen, daß die Zerlegung $\overline{\overline{Z}}_d$ erzeugend ist. Zu diesem Zweck betrachten wir beliebige Elemente $\bar{\bar{a}}_i, \bar{\bar{a}}_j \in \overline{\overline{Z}}_d$ und beweisen die Beziehung $\bar{\bar{a}}_i \circ \bar{\bar{a}}_j \subset \bar{\bar{a}}_k$, wobei k der Rest der Zahl $i + j$ bei der Division durch d ist. Es seien $\bar{a}_\alpha \in \bar{\bar{a}}_i$, $\bar{a}_\beta \in \bar{\bar{a}}_j$ beliebige Elemente, so daß α bei der Division durch d den Rest i und β den Rest j ergibt; die Zahlen $\alpha + \beta$, $i + j$ unterscheiden sich also nur um ein ganzzahliges Vielfaches von d. Nun gilt aber nach Definition der Multiplikation im Faktoroid $\mathfrak{Z}_n$ die Beziehung $\bar{a}_\alpha \circ \bar{a}_\beta = \bar{a}_\gamma$, wobei γ den Rest der Zahl $\alpha + \beta$ durch n bedeutet. Da d ein Teiler von n ist, unterscheiden sich die Zahlen $\alpha + \beta$, γ und folglich auch $i + j$, γ nur um ein ganzzahliges Vielfaches von d; die Zahl γ ergibt also bei Division durch d den Rest k. Daraus folgen die Beziehungen $\bar{a}_\alpha \circ \bar{a}_\beta = \bar{a}_\gamma \in \bar{\bar{a}}_k$, und wir erhalten die erwähnte Beziehung $\bar{\bar{a}}_i \circ \bar{\bar{a}}_j \subset \bar{\bar{a}}_k$. Die durch das zu der erzeugenden Zerlegung $\overline{\overline{Z}}_d$ gehörige Faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{Z}}}_d$ erzwungene Überdeckung von $\mathfrak{Z}_n$ besteht aus d Elementen:

$$\{\ldots, -n+i, -n+d+i, \ldots, -n+(q-1)d+i, i, d+i, \ldots, (q-1)d+i, \\ n+i, n+d+i, \ldots, n+(q-1)d+i, \ldots\},$$

wobei i die Zahlen $0, \ldots, d-1$ durchläuft.

2. *Lokale Eigenschaften von Überdeckungen und Verfeinerungen.* Es seien $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ Faktoroide auf $\mathfrak{G}$.

Wir betrachten beliebige, den Beziehungen $\bar{a}_1 \supset \bar{b}_1$, $\bar{a}_2 \supset \bar{b}_2$ genügende Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \mathfrak{A}$, $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \mathfrak{B}$. Ferner betrachten wir in $\mathfrak{G}$ die Zerlegungen $\bar{a}_1 \sqcap \mathfrak{B}$, $\bar{a}_2 \sqcap \mathfrak{B}$. Wegen der Beziehung $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ stellen diese Zerlegungen Komplexe in $\mathfrak{B}$ dar.

Es gelten nun die folgenden Formeln:

$$\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \supset \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \tag{1}$$

$$(\bar{a}_1 \sqcap \mathfrak{B}) \circ (\bar{a}_2 \sqcap \mathfrak{B}) \subset (\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \sqcap \mathfrak{B}). \tag{2}$$

Beweis. a) Aus den Beziehungen $\bar{b}_1 \bar{b}_2 \subset \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \cap \bar{a}_1 \bar{a}_2 \subset \bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \cap \bar{a}_1 \circ \bar{a}_2$ schließen wir, daß die Elemente $\bar{b}_1 \circ \bar{b}_2 \in \mathfrak{B}$ und $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \in \mathfrak{A}$ inzident sind. Daraus folgt wegen $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ (§ 3, Nr. 2) die Formel (1).

b) Das Produkt $\bar{x}\bar{y}$ mit beliebigen Faktoren $\bar{x} \in \bar{a}_1 \sqcap \mathfrak{B}$, $\bar{y} \in \bar{a}_2 \sqcap \mathfrak{B}$ ist das der Beziehung $\bar{x}\bar{y} \subset \bar{z}$ genügende Element $\bar{z} \in \mathfrak{B}$, das nach § 14, Nr. 4,1 in der Zerlegung $\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 \sqcap \mathfrak{B}$ liegt.

Wenn insbesondere ein Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ eine gruppoidale Teilmenge in $\mathfrak{G}$ darstellt, so haben wir $\bar{a} \circ \bar{a} = \bar{a}$, und die Formel (2) ergibt für $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \bar{a}$

die Beziehung $(\bar{a} \sqcap \mathfrak{B}) \circ (\bar{a} \sqcap \mathfrak{B}) \subset (\bar{a} \sqcap \mathfrak{B})$. Wir sehen, daß in diesem Fall die Zerlegung $\bar{a} \sqcap \mathfrak{B}$ einen gruppoidalen Komplex in $\mathfrak{B}$ darstellt.

Wenn also das Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ eine gruppoidale Teilmenge in $\mathfrak{G}$ darstellt, so erzeugt die Zerlegung $\bar{a} \sqcap \mathfrak{B}$ das auf dem entsprechenden Untergruppoid $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{G}$ liegende Faktoroid $\bar{\mathfrak{a}} \sqcap \mathfrak{B}$.

Insbesondere stellt ein Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ eine gruppoidale Teilmenge in $\mathfrak{G}$ dar, wenn es einen idempotenten Punkt a enthält, wenn also $aa = a \in \bar{a}$ ist (Nr. 6,4).

Wenn also ein Punkt $a \in \mathfrak{G}$ idempotent ist, so ist das diesen Punkt enthaltende Element $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ eine gruppoidale Untermenge in $\mathfrak{G}$, und die Zerlegung $\bar{a} \sqcap \mathfrak{B}$ erzeugt das auf dem entsprechenden Untergruppoid $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{G}$ liegende Faktoroid $\bar{\mathfrak{a}} \sqcap \mathfrak{B}$.

3. *Gemeinsame Überdeckung und Verfeinerung zweier Faktoroide.* Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Faktoroide auf $\mathfrak{G}$. Unter einer *gemeinsamen Überdeckung* oder *Überdeckung der Faktoroide* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ verstehen wir jedes Faktoroid auf $\mathfrak{G}$, das beide Faktoroide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gleichzeitig überdeckt.

Ähnlich definieren wir eine *gemeinsame Verfeinerung* oder *Verfeinerung der Faktoroide* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ als ein Faktoroid, das beide Faktoroide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gleichzeitig verfeinert.

Zum Beispiel stellt das größte Faktoroid auf $\mathfrak{G}$, $\bar{\mathfrak{G}}_{\max}$, eine gemeinsame Überdeckung und das kleinste, $\bar{\mathfrak{G}}_{\min}$, eine gemeinsame Verfeinerung der Faktoroide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dar.

Es ist leicht einzusehen, daß jede Überdeckung einer gemeinsamen Überdeckung der Faktoroide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ wiederum eine Überdeckung der Faktoroide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ darstellt; ähnlich ergibt jede Verfeinerung einer gemeinsamen Verfeinerung der Faktoroide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ wiederum eine Verfeinerung dieser Faktoroide.

4. *Kleinste gemeinsame Überdeckung zweier Faktoroide.* Aus § 14, Nr. 4,2 wissen wir, daß die kleinste gemeinsame Überdeckung der Felder von zwei auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ liegenden Faktoroiden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ eine erzeugende Zerlegung auf $\mathfrak{G}$ darstellt. Das zu dieser kleinsten gemeinsamen Überdeckung gehörige Faktoroid wird die *kleinste gemeinsame Überdeckung* oder die *kleinste Überdeckung der Faktoroide* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ genannt und mit $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ oder $[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$ bezeichnet.

Aus dieser Definition des Faktoroids $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ergibt sich, daß das Feld von $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ eine Verfeinerung jeder gemeinsamen Überdeckung und folglich auch jeder erzeugenden gemeinsamen Überdeckung der Felder von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ darstellt. Daraus sehen wir, daß das Faktoroid $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ eine gemeinsame Überdeckung der Faktoroide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ darstellt und diese die kleinste ist, und zwar in dem Sinn, daß jede gemeinsame Überdeckung der Faktoroide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zugleich eine Überdeckung von $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ darstellt.

5. *Größte gemeinsame Verfeinerung zweier Faktoroide.* Aus § 14, Nr. 4,3 wissen wir, daß die größte gemeinsame Verfeinerung der Felder von zwei auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ liegenden Faktoroiden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ eine erzeugende Zerlegung auf $\mathfrak{G}$ darstellt. Das zu dieser größten gemeinsamen Verfeinerung gehörige Faktoroid wird die *größte gemeinsame Verfeinerung* oder die *größte Verfeinerung der Faktoroide* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ genannt und mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ oder $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ bezeichnet.

Aus dieser Definition des Faktoroids $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}})$ ergibt sich, daß das Feld von $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}})$ eine Überdeckung jeder gemeinsamen Verfeinerung und folglich auch jeder erzeugenden gemeinsamen Verfeinerung der Felder von $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ ist. Daraus sehen wir, daß das Faktoroid $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}})$ eine gemeinsame Verfeinerung der Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ darstellt und diese die größte ist, und zwar in dem Sinn, daß jede gemeinsame Verfeinerung der Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ zugleich eine Verfeinerung von $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}})$ ist.

Wir wollen hier auch an die Gültigkeit der Formel $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}) = \bar{\mathfrak{A}} \sqcap \bar{\mathfrak{B}}$ erinnern (Nr. 3,2).

6. *Modulare Faktoroide.* Es seien $\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ drei der Bedingung $\bar{\mathfrak{X}} \geqq \bar{\mathfrak{A}}$ genügende Faktoroide auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$.

Wir nennen das Faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ *modular in bezug auf die Faktoroide* $\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{A}}$ (in dieser Anordnung), wenn

$$[\bar{\mathfrak{A}}, (\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{B}})] = (\bar{\mathfrak{X}}, [\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}])$$

erfüllt ist.

Ist etwa $\bar{\mathfrak{X}} = \bar{\mathfrak{A}}$ oder $\bar{\mathfrak{X}} = \mathfrak{G}_{\max}$, so ist $\bar{\mathfrak{B}}$ in bezug auf $\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{A}}$ modular.

Wir betrachten nun beliebige, den Bedingungen $\bar{\mathfrak{X}} \geqq \bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{Y}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ genügende Faktoroide $\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{Y}}$ und $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ auf $\mathfrak{G}$ und setzen voraus, daß das Faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ in bezug auf $\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{A}}$ und das Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ in bezug auf $\bar{\mathfrak{Y}}, \bar{\mathfrak{B}}$ modular ist.

Dann gilt

$$(\mathring{\mathfrak{A}} =)\ [\bar{\mathfrak{A}}, (\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{B}})] = (\bar{\mathfrak{X}}, [\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}]),$$
$$(\mathring{\mathfrak{B}} =)\ [\bar{\mathfrak{B}}, (\bar{\mathfrak{Y}}, \bar{\mathfrak{A}})] = (\bar{\mathfrak{Y}}, [\bar{\mathfrak{B}}, \bar{\mathfrak{A}}]),$$

wobei wir das durch die erste (zweite) Formel definierte Faktoroid auf $\mathfrak{G}$ mit $\mathring{\mathfrak{A}}$ $(\mathring{\mathfrak{B}})$ bezeichnet haben.

In diesem Fall gelten die Beziehungen

$$\bar{\mathfrak{X}} \geqq \mathring{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{A}}, \quad \bar{\mathfrak{Y}} \geqq \mathring{\mathfrak{B}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$$

und ferner die Formeln (§ 4,3)

$$[\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{B}}] = [\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}], \quad [\bar{\mathfrak{X}}, \mathring{\mathfrak{B}}] = [\bar{\mathfrak{X}}\bar{\mathfrak{Y}}, \bar{\mathfrak{B}}], \quad [\bar{\mathfrak{Y}}, \mathring{\mathfrak{A}}] = , [\bar{\mathfrak{A}}]; \tag{1}$$
$$(\mathring{\mathfrak{A}}, \mathring{\mathfrak{B}}) = (\bar{\mathfrak{X}}, \mathring{\mathfrak{B}}) = (\bar{\mathfrak{Y}}, \mathring{\mathfrak{A}}) = ((\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{Y}}), [\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}]). \tag{2}$$

7. *Komplementäre Faktoroide.* Es seien $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ beliebige Faktoroide auf dem Gruppoid $\mathfrak{G}$. Wir nennen die Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ *komplementär*, wenn ihre Felder komplementär sind, d. h., wenn je zwei in ein und demselben Element $\bar{u} \in [\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}]$ als Teilmengen enthaltene Elemente $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{b} \in \bar{\mathfrak{B}}$ inzident sind (§ 5, Nr. 1).

Wenn z. B. eines der beiden Faktoroide das andere überdeckt, so sind die Faktoroide komplementär.

Wenn für ein Faktoroid $\bar{\mathfrak{X}}$ auf $\mathfrak{G}$ die Beziehung $\bar{\mathfrak{X}} \geqq \bar{\mathfrak{A}}$ besteht und die Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ komplementär sind, so ist das Faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ in bezug auf $\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{A}}$ modular (§ 5, Nr. 4).

Später (§ 25, Nr. 3) werden wir Gruppoiden begegnen, die so beschaffen sind, daß je zwei auf ihnen liegende Faktoroide komplementär sind. Es scheint also zweckmäßig, zu bemerken, daß zwei auf einem Gruppoid liegende Faktoroide im allgemeinen nicht komplementär sind. So sind z. B. alle auf dem aus vier Punkten a, b, c, d bestehenden und mit der Multiplikation $xy = y$ versehenen Gruppoid liegenden Zerlegungen erzeugend (§ 14, Nr. 5, 3), aber z. B. die beiden Zerlegungen $\{a, b\}, \{c, d\}$ und $\{a\}, \{b, c, d\}$ sind nicht komplementär (§ 5, Nr. 6, 2).

5. α-Gruppoidgebilde. Wir wollen nun ein komplizierteres, auf dem Begriff eines α-Mengengebildes und einer Multiplikation beruhendes Gebilde, ein sogenanntes α-Gruppoidgebilde definieren. Es sei $\alpha (\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl und $([\mathfrak{A}] =)(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha)$ eine Folge von Gruppoiden; A_γ soll das Feld von $\mathfrak{A}_\gamma$ bedeuten ($\gamma = 1, \ldots, \alpha$).

Unter einem *α-Gruppoidgebilde bezüglich der Gruppoidfolge* $[\mathfrak{A}]$ verstehen wir ein Gruppoid $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ von folgender Struktur:

Das Feld von $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ ist ein α-Mengengebilde bezüglich der Folge $(A_1, \ldots, A_\alpha)$; jedes Element $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ ist also eine α-gliedrige Folge, von der jedes Glied $\bar{a}_\gamma$ von beliebigem Rang γ $(= 1, \ldots, \alpha)$ einen Komplex in $\mathfrak{A}_\gamma$ darstellt. Ferner ist die Multiplikation in dem Gruppoid $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ von der Beschaffenheit, daß für je zwei Elemente $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ und deren Produkt $\bar{a}\bar{b} = \bar{\bar{c}} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha) \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ die Beziehungen $\bar{a}_1 \bar{b}_1 \subset \bar{c}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \bar{b}_\alpha \subset \bar{c}_\alpha$ gelten.

Wir werden insbesondere den Fall zu betrachten haben, daß als Gruppoide $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ die Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_\alpha$ eines Gruppoids $\mathfrak{G}$ auftreten. Solche α-Gruppoidgebilde $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ haben also die folgende Struktur: Jedes Element $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha) \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ ist eine α-gliedrige Folge, von der jedes Glied $\bar{a}_\gamma$ von beliebigem Rang $\gamma (= 1, \ldots, \alpha)$ eine Zerlegung im Gruppoid $\mathfrak{G}$, und zwar einen Komplex im Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$ darstellt. Ferner ist die Multiplikation in $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ so beschaffen, daß für je zwei Elemente $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\alpha) \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ und deren Produkt $\bar{a}\bar{b} = \bar{\bar{c}} = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\alpha) \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ die Beziehungen $\bar{a}_1 \circ \bar{b}_1 \subset \bar{c}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \circ \bar{b}_\alpha \subset \bar{c}_\alpha$ gelten.

6. Übungsaufgaben.

1. Man zeige, daß die Gruppoide $\mathfrak{Z}_n, \bar{\mathfrak{Z}}_n (n \geqq 1)$ isomorph sind.

2. Es sei $\mathfrak{A}_m$ das von allen ganzzahligen Vielfachen einer natürlichen Zahl $m > 1$ gebildete Untergruppoid in $\mathfrak{Z}$. Man bestimme die beiden Faktoroide $\mathfrak{A}_m \sqsubset \bar{\mathfrak{Z}}_n, \mathfrak{A}_m \sqcap \bar{\mathfrak{Z}}_n$ unter der Annahme, daß die Zahlen m, n nicht relativ prim seien.

3. Jedes auf einem abelschen (assoziativen) Gruppoid liegende Faktoroid ist ebenfalls abelsch (assoziativ).

4. Wenn in einem Gruppoid $\mathfrak{G}$ ein sogenanntes *idempotentes*, d. h. der Beziehung $aa = a$ genügendes Element a vorkommt, so ist das den Punkt a enthaltende Element $\bar{a}$ eines beliebigen Faktoroids $\bar{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{G}$ eine gruppoidale Teilmenge in $\mathfrak{G}$ und folglich ein idempotentes Element von $\bar{\mathfrak{A}}$ (Nr. 4, 2).