7. Zobrazení rozkladů

Nechť $\mathbf{g}$ značí libovolné zobrazení množiny G na nějakou množinu G^*. Každý prvek $a \in G$ je tedy v $\mathbf{g}$ zobrazen na jistý prvek $a^* \in G^*$; a (a^*) je vzor (obraz) prvku a^* (a) v zobrazení $\mathbf{g}$. K zobrazení $\mathbf{g}$ patří jistý rozklad $\bar{G}$ na G, jehož prvky se skládají ze všech vzorů vždy téhož prvku v G^*. Tento rozklad je ekvivalentní s množinou G^*.

7.1. Rozšířené zobrazení

Zobrazení $\mathbf{g}$ určuje jisté zobrazení $\bar{\mathbf{g}}$ systému všech podmnožin v G do systému všech podmnožin v G^*, tzv. *rozšířené zobrazení*. Toto zobrazení $\bar{\mathbf{g}}$ je definováno tím, že pro $\emptyset \neq A \subset G$ je $\bar{\mathbf{g}}A \subset G^*$ množina obrazů v $\mathbf{g}$ všech prvků ležících v A; mimoto klademe $\bar{\mathbf{g}}\emptyset = \emptyset$. Zejména pro $\bar{a} \in \bar{G}$ se množina $\bar{\mathbf{g}}\bar{a}$ skládá z jediného prvku v G^*, a to z onoho, na nějž se v $\mathbf{g}$ zobrazí jednotlivé prvky v G ležící v $\bar{a}$.

K vůli zjednodušení označení užíváme zpravidla pro rozšířené zobrazení $\bar{\mathbf{g}}$ rovněž označení $\mathbf{g}$. Symbol $\mathbf{g}$ tedy aplikujeme na prvky v G, např. $a \in G$, a pak výsledek $\mathbf{g}a$ značí obraz prvku a v původním zobrazení $\mathbf{g}$, nebo jej aplikujeme na podmnožiny v G, např. $A \subset G$, a pak výsledek $\mathbf{g}A$ označuje obraz podmnožiny A v rozšířeném zobrazení $\bar{\mathbf{g}}$.

Tohoto pravidla používáme i pro systémy podmnožin v G: Když je $\tilde{\mathrm{A}}$ nějaký neprázdný systém podmnožin v G, označujeme zpravidla systém obrazů v $\bar{\mathbf{g}}$ jednotlivých prvků v $\tilde{\mathrm{A}}$ symbolem $\mathbf{g}\tilde{\mathrm{A}}$.

Např. když je $\bar{A}$ rozklad množiny G, značí $\mathbf{g}\bar{A}$ systém obrazů v $\bar{\mathbf{g}}$ jednotlivých prvků rozkladu $\bar{A}$. Když zejména $\mathbf{g}\bar{A}$ je rozklad na G^*, pak rozšířeným zobrazením $\bar{\mathbf{g}}$ je určeno částečné zobrazení $\mathbf{g}_{\bar{A}}$ rozkladu $\bar{A}$ na rozklad $\mathbf{g}\bar{A}$, jímž je ovšem ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ přiřazen jeho obraz $\mathbf{g}\bar{a} \in \mathbf{g}\bar{A}$.

Nechť A, B značí libovolné podmnožiny v G.

Je zřejmé, že ze vztahu $A \subset B$ plyne $\mathbf{g}A \subset \mathbf{g}B$.

Dokážeme tuto větu:

Rovnost $\mathbf{g}A = \mathbf{g}B$ platí tehdy a jen tehdy, když každý prvek v $\bar{G}$, který je incidentní s jednou podmnožinou A, B, je incidentní také s druhou.

Důkaz. a) Nechť platí $\mathbf{g}A = \mathbf{g}B$. Když některý prvek $\bar{g} \in \bar{G}$ je incidentní např. s množinou A, pak existuje prvek $a \in A$ takový, že $\bar{g}$ je množinou všech vzorů v $\mathbf{g}$ prvku $\mathbf{g}a$. Protože $\mathbf{g}a \in \mathbf{g}A = \mathbf{g}B$, existuje prvek $b \in B$ takový, že $\mathbf{g}b = \mathbf{g}a$, takže $b \in \bar{g}$, a vidíme, že prvek $\bar{g}$ je incidentní s B.

b) Nechť každý prvek v $\bar{G}$, který je incidentní s jednou množinou A, B, je incidentní i s druhou. Pak např. pro $a^* \in \boldsymbol{g}A$ je onen prvek $\bar{g} \in \bar{G}$, který se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{g}$ prvku a^*, incidentní s A a tedy, podle předpokladu, i s B. Tedy existuje prvek $b \in B$ takový, že $a^* = \boldsymbol{g}b \in \boldsymbol{g}B$ a vychází $\boldsymbol{g}A \subset \boldsymbol{g}B$. Současně ovšem platí vztah $\boldsymbol{g}B \subset \boldsymbol{g}A$ a máme $\boldsymbol{g}A = \boldsymbol{g}B$.

Zřejmě můžeme předcházející větu vyjádřit také tím, že *rovnost* $\boldsymbol{g}A = \boldsymbol{g}B$ *platí tehdy a jen tehdy, když* $A \sqsubset \bar{G} = B \sqsubset \bar{G}$.

Nechť $\tilde{A}$ značí systém podmnožin v G.

Když všechny prvky systému $\tilde{A}$ *mají v rozšířeném zobrazení* $\boldsymbol{g}$ *týž obraz* $A^* \subset G^*$, *takže pro* $A \in \tilde{A}$ *je* $\boldsymbol{g}A = A^*$, *pak také množina* $\boldsymbol{s}\tilde{A}$ *má obraz* A^*, *tj.* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s}\tilde{A}) = A^*$.

Vskutku, především pro každý prvek $A \in \tilde{A}$ platí $A \subset \boldsymbol{s}\tilde{A}$ a odtud následuje $A^* = \boldsymbol{g}A \subset \boldsymbol{g}(\boldsymbol{s}\tilde{A})$. Dále každý prvek $a \in \boldsymbol{s}\tilde{A}$ leží v jisté podmnožině $A \in \tilde{A}$ a platí vztahy: $\boldsymbol{g}a \in \boldsymbol{g}A = A^*$; odtud plyne $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s}\tilde{A}) \subset A^*$. Tím je důkaz ukončen.

7.2. Věty o zobrazení rozkladů

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný rozklad na G.

Systém $\boldsymbol{g}\bar{A}$ podmnožin v G^* zřejmě pokrývá množinu G^*. Avšak tento systém není nutně rozkladem množiny G^*, neboť obrazy v $\boldsymbol{g}$ dvou různých prvků v $\bar{A}$ mohou být incidentní, aniž splývají.

Následující věta popisuje nutnou a dostatečnou podmínku toho, aby se rozklad $\bar{A}$ zobrazil v $\boldsymbol{g}$ na rozklad množiny G^*:

$\boldsymbol{g}\bar{A}$ *je rozkladem množiny* G^* *tehdy a jen tehdy, když rozklady* $\bar{A}, \bar{G}$ *jsou doplňkové.*

D ů k a z. a) Nechť $\boldsymbol{g}\bar{A}$ je rozkladem na G^*. Nechť prvky $\bar{a} \in \bar{A}, \bar{g} \in \bar{G}$ leží v témž prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$. Máme ukázat, že $\bar{a} \cap \bar{g} \neq \emptyset$. Nechť $\bar{b} \in \bar{A}$ je libovolný prvek incidentní s $\bar{g}$. Pak $\bar{b} \subset \bar{u}$ a tedy existuje vazba v $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{b}$:

$$(\bar{a} =) \quad \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \quad (= \bar{b}) .$$

Podle definice vazby jsou každé jeho dva sousední prvky $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ $(\beta = 1, \ldots, \alpha - 1)$ incidentní vždy s jistým prvkem rozkladu $\bar{G}$ a tedy oba obrazy $\boldsymbol{g}\bar{a}_\beta, \boldsymbol{g}\bar{a}_{\beta+1}$ jsou incidentní. Protože $\boldsymbol{g}\bar{A}$ je rozklad na G^*, je $\boldsymbol{g}\bar{a}_\beta = \boldsymbol{g}\bar{a}_{\beta+1}$ a tedy také $\boldsymbol{g}\bar{a} = \boldsymbol{g}\bar{b}$. Odtud plyne $\bar{a} \sqsubset \bar{G} = \bar{b} \sqsubset \bar{G}$. Protože $\bar{g} \in \bar{b} \sqsubset \bar{G}$, máme tedy $\bar{g} \in \bar{a} \sqsubset \bar{G}$, takže $\bar{a} \cap \bar{g} \neq \emptyset$.

b) Nechť jsou rozklady $\bar{A}, \bar{G}$ doplňkové. Máme ukázat, že pro $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ jsou množiny $\boldsymbol{g}\bar{a}, \boldsymbol{g}\bar{b}$ buď disjunktní nebo splývají. Nejsou-li množiny $\boldsymbol{g}\bar{a}, \boldsymbol{g}\bar{b}$ disjunktní, existují prvky $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ takové, že $\boldsymbol{g}a = \boldsymbol{g}b \in \boldsymbol{g}\bar{a} \cap \boldsymbol{g}\bar{b}$. Prvek $\bar{g} \in \bar{G}$, který se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{g}$ prvku $\boldsymbol{g}a$, je pak incidentní s oběma prvky $\bar{a}$, $\bar{b}$ a tyto prvky tedy leží v témž prvku rozkladu $[\bar{A}, \bar{G}]$. Protože rozklady $\bar{A}, \bar{G}$ jsou doplňkové, platí $\bar{a} \sqsubset \bar{G} = \bar{b} \sqsubset \bar{G}$ a odtud plyne $\boldsymbol{g}\bar{a} = \boldsymbol{g}\bar{b}$.

V dalším výkladu předpokládáme, že rozklady $\bar{A}, \bar{G}$ jsou doplňkové.

Podle předcházející věty je $\mathbf{g}\bar{A}$ rozklad na G. Rozšířeným zobrazením $\mathbf{g}$ je určeno částečné zobrazení rozkladu $\bar{A}$ na rozklad $\mathbf{g}\bar{A}$, jímž je ovšem ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ přiřazen jeho obraz $\mathbf{g}\bar{a} \in \mathbf{g}\bar{A}$. Dále rozumíme zobrazením $\mathbf{g}$ rozkladu $\bar{A}$ na rozklad $\mathbf{g}\bar{A}$ toto částečné zobrazení.

K zobrazení $\mathbf{g}$ rozkladu $\bar{A}$ na rozklad $\mathbf{g}\bar{A}$ přísluší ovšem jistý rozklad $\bar{\bar{A}}$ rozkladu $\bar{A}$. Jeho prvky se skládají vždy ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které mají v rozšířeném zobrazení $\mathbf{g}$ týž obraz.

Ukážeme, že *zákryt rozkladu $\bar{A}$ vynucený rozkladem $\bar{\bar{A}}$ je nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, \bar{G}]$ rozkladů $\bar{A}$, $\bar{G}$.*

Vskutku, uvažujme o libovolném prvku $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$. Máme ukázat, že množina $\mathbf{s}\bar{\bar{a}}$ je prvkem rozkladu $[\bar{A}, \bar{G}]$. Budiž $\bar{a} \in \bar{\bar{a}}$ libovolný prvek a budiž $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$ onen prvek rozkladu $[\bar{A}, \bar{G}]$, který obsahuje $\bar{a}$; máme tedy $\bar{a} \subset \mathbf{s}\bar{\bar{a}} \cap \bar{u}$. Každý prvek $\bar{x} \in \bar{\bar{a}}$ má v rozšířeném zobrazení $\mathbf{g}$ týž obraz jako $\bar{a}$ a tedy je $\bar{a} \sqsubset \bar{G} = \bar{x} \sqsubset \bar{G}$; odtud plyne, že se prvek $\bar{x}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\bar{G}$ a tedy, že leží v prvku $\bar{u}$. Tím jsme zjistili, že platí vztah $\mathbf{s}\bar{\bar{a}} \subset \bar{u}$. Naopak, každý prvek $\bar{x} \in \bar{A}$, který leží v $\bar{u}$, vyhovuje rovnosti $\bar{a} \sqsubset \bar{G} = \bar{x} \sqsubset \bar{G}$; z ní soudíme, že prvek $\bar{x}$ má v rozšířeném zobrazení $\mathbf{g}$ týž obraz jako prvek $\bar{a}$, takže $\bar{x} \subset \bar{u}$, a platí vztah $\bar{x} \subset \mathbf{s}\bar{\bar{a}}$. Tím jsme zjistili, že $\bar{u} \subset \mathbf{s}\bar{\bar{a}}$, a důkaz je ukončen.

Když ke každému prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$ přiřadíme onen prvek $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$, který obsahuje prvky rozkladu $\bar{A}$ v něm ležící, obdržíme prosté zobrazení rozkladu $[\bar{A}, \bar{G}]$ na rozklad $\bar{\bar{A}}$ (**6.8**); když ke každému prvku $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ přiřadíme onen prvek $\bar{a}^* \in \mathbf{g}\bar{A}$, jenž je obrazem každého prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ ležícího v $\bar{\bar{a}}$, obdržíme prosté zobrazení rozkladu $\bar{\bar{A}}$ na rozklad $\mathbf{g}\bar{A}$ (**6.8**). Složením těchto prostých zobrazení obdržíme prosté zobrazení rozkladu $[\bar{A}, \bar{G}]$ na rozklad $\mathbf{g}\bar{A}$ (**6.7**). V něm je ke každému prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{G}]$ přiřazen jistý prvek $\bar{a}^* \in \mathbf{g}\bar{A}$; prvek $\bar{a}^*$ je obrazem v rozšířeném zobrazení $\mathbf{g}$ každého prvku rozkladu $\bar{A}$, který leží v prvku $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ obsahujícím všechny prvky rozkladu $\bar{A}$ ležící v $\bar{u}$. Protože $\bar{u} = \mathbf{s}\bar{\bar{a}}$ a pro $\bar{a} \in \bar{\bar{a}}$ máme $\mathbf{g}\bar{a} = \bar{a}^*$, soudíme se zřetelem na poslední větu v **7.1**, že prvek $\bar{u}$ má v rozšířeném zobrazení $\mathbf{g}$ obraz $\bar{a}^*$, tj. $\mathbf{g}\bar{u} = \bar{a}^*$.

Tím jsme došli k tomuto výsledku:

Když se nějaký rozklad $\bar{A}$ na G zobrazí v zobrazení $\mathbf{g}$ na nějaký rozklad $\bar{A}^*$ na G^*, pak jsou rozklady $[\bar{A}, \bar{G}]$, $\bar{A}^*$ ekvivalentní, tj. $[\bar{A}, \bar{G}] \simeq \bar{A}^*$; prosté zobrazení rozkladu $[\bar{A}, \bar{G}]$ na $\bar{A}^*$ obdržíme, když ke každému prvku prvního rozkladu přiřadíme jeho obraz v rozšířeném zobrazení $\mathbf{g}$.

Důsledkem tohoto poznatku je, že *každý zákryt rozkladu $\bar{G}$ je ekvivalentní se svým obrazem v $\mathbf{g}$; zobrazení, které ke každému prvku zákrytu přiřazuje jeho obraz, je prosté.*

7.3. Cvičení

1. Buď $\mathbf{g}$ zobrazení množiny G na G^* a A, B libovolné podmnožiny v G. Ukažte, že platí tyto vztahy: $\mathbf{g}(A \cup B) = \mathbf{g}A \cup \mathbf{g}B$; $\mathbf{g}(A \cap B) \subset \mathbf{g}A \cap \mathbf{g}B$.

2. V situaci popsané v předcházející úloze 1 budiž $\bar{G}$ rozklad na G patřící k zobrazení $\mathbf{g}$. Ukažte, že rovnost $\mathbf{g}(A \cap B) = \mathbf{g}A \cap \mathbf{g}B$ platí právě tehdy, když je $(A \cap B) \sqsubset \bar{G} = (A \sqsubset \bar{G}) \cap \cap (B \sqsubset \bar{G})$.

3. Nechť $\mathbf{g}$ značí nějaké zobrazení množiny G na G^* a $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ nějaký rozklad na G. Pak $\{\mathbf{g}\bar{a}, \mathbf{g}\bar{b}, \ldots\}$ je rozklad na G^*, když a jen když $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ je zákrytem rozkladu příslušného ke $\mathbf{g}$.

4. Buď $\mathbf{g}$ prosté zobrazení množiny G na G^*. Dále buď $A \subset G$ neprázdná podmnožina a $\bar{A}$, $\bar{B}$ rozklady v (na) G. V této situaci platí: a) rozšířené zobrazení $\bar{\mathbf{g}}$ zobrazuje systém všech neprázdných částí množiny G na systém všech neprázdných částí množiny G^* prostě; b) množiny A, $\mathbf{g}A$ jsou ekvivalentní, tedy $A \simeq \mathbf{g}A$; c) $\mathbf{g}\bar{A}$ je rozklad v (na) množině G^*; d) rozklady $\bar{A}$, $\mathbf{g}\bar{A}$ jsou ekvivalentní, tedy $\bar{A} \simeq \mathbf{g}\bar{A}$; e) když rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou ekvivalentní, popř. volně spřažené nebo spřažené, pak rozklady $\mathbf{g}\bar{A}$, $\mathbf{g}\bar{B}$ mají vždy touž vlastnost.