3. Rozklady na množinách

V této kapitole pojednáme o rozkladech na množinách. Poznatky o takových rozkladech se často uplatňují, jak jsme se již zmínili (**2.2**), při popisu vlastností rozkladů v množinách, neboť libovolný rozklad $\bar{A}$ v množině G je současně rozkladem na množině $\mathbf{s}\bar{A}$.

3.1. Vazby v rozkladu

Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné rozklady na G.

Vezměme v úvahu libovolné prvky $\bar{a}, \bar{p} \in \bar{A}$.

Vazbou od $\bar{a}$ do $\bar{p}$ v rozkladu $\bar{A}$ vzhledem k rozkladu $\bar{B}$ rozumíme konečnou posloupnost prvků v $\bar{A}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \quad (\alpha \geqq 2)$$

vyznačující se tím, že $\bar{a}_1 = \bar{a}$, $\bar{a}_\alpha = \bar{p}$ a že každé dva sousední členy $\bar{a}_\beta$, $\bar{a}_{\beta+1}$ ($\beta = 1, \ldots, \alpha - 1$) jsou incidentní vždy s týmž prvkem $\bar{b}_\beta \in \bar{B}$. Pravíme, že zmíněná vazba je *vytvořena* rozkladem $\bar{B}$. Stručněji hovoříme o *vazbě $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$*.

Poznamenejme, že jednotlivé členy vazby neznačí nutně prvky vzájemně různé.

Když existuje vazba $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$, pravíme, že *se prvek $\bar{p}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$ v rozkladu $\bar{B}$*, nebo stručněji, že *se prvek $\bar{p}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$.*

Budeme se zabývat vlastnostmi vazeb.

Především se snadno sezná (provedení příslušných důkazů přenecháváme čtenáři), že o libovolných prvcích $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$ platí tato tvrzení:

a) *Prvek $\bar{a}$ se dá spojit s $\bar{a}$.*

b) *Když se prvek $\bar{b}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$ a prvek $\bar{c}$ s $\bar{b}$, pak se $\bar{c}$ dá spojit s $\bar{a}$.*

c) *Když se prvek $\bar{b}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$, pak se $\bar{a}$ dá spojit s $\bar{b}$.*

Se zřetelem na platnost výroku c), mluvíme zpravidla o vazbě mezi dvěma prvky nebo o tom, že se dva prvky dají spojit, ale nevyzdvihujeme, který z nich se dá spojit s kterým.

Když se prvky $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ dají spojit s některým prvkem $\bar{c} \in \bar{A}$, pak se dají spojit navzájem.

Vskutku, když je předpoklad splněn, dá se spojit prvek $\bar{a}$ s $\bar{c}$, prvek $\bar{c}$ s $\bar{b}$, a tedy též prvek $\bar{a}$ se dá spojit s $\bar{b}$.

Nechť $\bar{a}, \bar{p} \in \bar{A}$, $\bar{b}, \bar{q} \in \bar{B}$ jsou libovolné prvky a předpokládejme, že prvky $\bar{a}$, $\bar{b}$ a rovněž prvky $\bar{p}, \bar{q}$ jsou incidentní.

Když se dají spojit prvky $\bar{a}$, $\bar{p}$ v rozkladu $\bar{B}$, pak se dají spojit prvky $\bar{b}$, $\bar{q}$ v rozkladu $\bar{A}$.

Vskutku, když existuje vazba $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$ tvaru

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \quad (\bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}),$$

jsou každé dva sousední prvky $\bar{a}_\beta$, $\bar{a}_{\beta+1}$ incidentní s jistým prvkem $\bar{b}_\beta \in \bar{B}$, a tedy prvky $\bar{b}_\beta$, $\bar{b}_{\beta+1}$ jsou incidentní s prvkem $\bar{a}_{\beta+1}$. Mimoto je prvek $\bar{b}$ incidentní s $\bar{a}_1$ a prvek $\bar{q}$ s $\bar{a}_\alpha$. Z toho vidíme, že

$$\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_\alpha \quad (\bar{b}_0 = \bar{b},\ \bar{b}_\alpha = \bar{q})$$

je vazba $\{\bar{B}, \bar{A}\}$ od $\bar{b}$ do $\bar{q}$.

3.2. Zákryty a zjemnění rozkladů na množinách

Především uvedeme ještě jednou pojem zákrytu a zjemnění rozkladu ležícího *na* množině G. Tyto pojmy, o nichž jsme se zmínili již v **2.4**, mají v dalších úvahách podstatnou úlohu.

Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné rozklady *na* G.

Rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) nazýváme zákryt (zjemnění) rozkladu $\bar{B}$ ($\bar{A}$), když každý prvek v $\bar{A}$ je součtem některých prvků rozkladu $\bar{B}$. Tento vztah mezi rozklady $\bar{A}$, $\bar{B}$ vyjadřujeme symbolem $\bar{A} \geqq \bar{B}$ nebo $\bar{B} \leqq \bar{A}$. Zejména ($\bar{A} = \bar{B}$) je každý rozklad na G svým zákrytem i zjemněním. Viděli jsme, že v případě $\bar{A} \geqq \bar{B}$ rozklad $\bar{B}$ obdržíme, když každý prvek v $\bar{A}$ nahradíme vhodným jeho rozkladem; dále jsme si všimli, že zákryt $\bar{A}$ je vynucen jistým rozkladem ležícím na rozkladu $\bar{B}$.

Nyní přejdeme k podrobnějšímu zkoumání vlastností těchto pojmů.

Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ jsou libovolné rozklady na G.

Především ukážeme, že *vztah $\bar{A} \geqq \bar{B}$ platí tehdy a jen tehdy, když pro každé dva incidentní prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ je $\bar{a} \supset \bar{b}$.*

Předpokládejme, že je $\bar{A} \geqq \bar{B}$. Buďte $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ libovolné incidentní prvky, takže $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$. Potom $\bar{a}$ je součtem některých podmnožin v G, jež jsou prvky rozkladu $\bar{B}$. Jednou z nich je $\bar{b}$, neboť $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ a prvky rozkladu $\bar{B}$ jsou disjunktní. Odtud plyne $\bar{a} \supset \bar{b}$. — Nechť naopak pro každé dva incidentní prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ platí vztah $\bar{a} \supset \bar{b}$. Potom $\bar{a}$ je součtem těch podmnožin v G, které jsou prvky rozkladu $\bar{B}$ a jsou incidentní s $\bar{a}$. Z toho vidíme, že platí vztah $\bar{A} \geqq \bar{B}$.

Dále připomeňme, že platí tyto výroky:

a) $\bar{A} \geqq \bar{A}$.

b) *Ze vztahů $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{C}$ plyne $\bar{A} \geqq \bar{C}$.*

c) *Ze vztahů $\bar{A} \geqq \bar{B}$, $\bar{B} \geqq \bar{A}$ plyne $\bar{A} = \bar{B}$.*

3.3. Společný zákryt a společné zjemnění dvou rozkladů

Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ značí libovolné rozklady na G.

Společným zákrytem, stručněji *zákrytem rozkladů* $\bar{A}, \bar{B}$ rozumíme každý rozklad na G, který je zákrytem každého rozkladu $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Podobně rozumíme *společným zjemněním*, stručněji *zjemněním rozkladů* $\bar{A}$, $\bar{B}$, každý rozklad na G, který je zjemněním každého rozkladu $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Např. největší rozklad $\bar{G}_{\max}$ je společným zákrytem a nejmenší rozklad $\bar{G}_{\min}$ společným zjemněním rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Snadno seznáme, že *každý zákryt každého společného zákrytu rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$ je opět jejich zákrytem*; podobně *je každé zjemnění každého společného zjemnění rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$ opět jejich zjemněním.*

Významný pokrok ve směru těchto úvah, který má odezvu v mnoha důležitých výsledcích (uslyšíme o nich v dalším výkladu), je dán pojmem nejmenšího společného zákrytu a největšího společného zjemnění dvou rozkladů. O těchto pojmech pojednáme v odstavcích **3.4**; **3.5**; **3.6**.

3.4. Nejmenší společný zákryt dvou rozkladů

V odst. **3.3** jsme viděli, že každý zákryt každého společného zákrytu dvou rozkladů je opět jejich zákrytem. Je to důležitý poznatek, že mezi všemi společnými zákryty dvou rozkladů je jeden nejmenší; nejmenší v tom smyslu, že každý společný zákryt obou rozkladů je jeho zákrytem. Tento význačný zákryt se nazývá *nejmenší společný zákryt*, stručněji *nejmenší zákryt* obou rozkladů.

Buďte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ libovolné rozklady na G.

V tomto odstavci popíšeme konstrukci jistého rozkladu na G, který značíme $[\bar{A}, \bar{B}]$ a o němž v dalším zjistíme, že je nejmenším společným zákrytem rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Budiž $\bar{\bar{A}}$ systém všech podmnožin v rozkladu $\bar{A}$ vyznačujících se touto vlastností: Každá podmnožina $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se vesměs dají spojit v rozkladu $\bar{B}$ s některým prvkem $\bar{a} \in \bar{A}$.

Ukážeme, že $\bar{\bar{A}}$ je rozklad na rozkladu $\bar{A}$.

Především vidíme, že každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ leží v některé podmnožině $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$. To plyne z toho, že se prvek $\bar{a}$ dá spojit s prvkem $\bar{a}$, a tedy leží v jisté podmnožině $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$, skládající se ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se dají spojit s prvkem $\bar{a}$.

Dále ukážeme, že každé dva prvky systému $\bar{\bar{A}}$ jsou buď disjunktní nebo identické. Za tím účelem uvažujme o libovolných prvcích $\bar{\bar{a}}$, $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{A}}$, z nichž $\bar{\bar{a}}$ se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se dají spojit s jistým prvkem $\bar{a} \in \bar{A}$, a $\bar{\bar{b}}$ se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se dají spojit s jistým prvkem $\bar{b} \in \bar{A}$. Předpokládejme, že prvky $\bar{\bar{a}}$ a $\bar{\bar{b}}$ jsou incidentní, takže mají společný jistý prvek $\bar{c} \in \bar{A}$. Prvek $\bar{c}$ leží v $\bar{\bar{a}}$ a proto se dá spojit s prvkem $\bar{a}$; leží v $\bar{\bar{b}}$ a tedy se dá spojit s prvkem $\bar{b}$. Odtud soudíme, že se prvky $\bar{a}$, $\bar{b}$ dají spojit s prvkem $\bar{c}$, a dále, že se dají spojit navzájem (**3.1**). Každý prvek $\bar{x} \in \bar{\bar{a}}$ se dá spojit s prvkem $\bar{a}$ a ten opět s prvkem $\bar{b}$, jak jsme právě viděli. Z toho plyne, že se prvek $\bar{x}$ dá spojit s prvkem $\bar{b}$, takže vychází $\bar{\bar{a}} \subset \bar{\bar{b}}$. Podobně zjistíme, že je $\bar{\bar{b}} \subset \bar{\bar{a}}$, a máme $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$.

Tím jsme zjistili, že systém podmnožin $\bar{\bar{A}}$ v rozkladu $\bar{A}$ je rozkladem na $\bar{A}$.

Všimněme si, že každé dva prvky v $\bar{A}$, které jsou v témž prvku rozkladu $\bar{\bar{A}}$, se dají navzájem spojit, kdežto žádné dva, které v témž prvku nejsou, se spojit nedají.

Rozklad $\bar{\bar{A}}$ vynucuje jistý zákryt rozkladu $\bar{A}$, který označíme $[\bar{A}, \bar{B}]$. Máme tedy

$$[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{A}\,.$$

Připomeňme, že každý prvek $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ je součtem všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které leží v některém prvku rozkladu $\bar{\bar{A}}$, takže je součtem všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se dají spojit v rozkladu $\bar{B}$ s některým prvkem $\bar{a} \in \bar{A}$, který je částí prvku $\bar{u}$.

Nyní pojednáme o vlastnostech rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$. Především ukážeme, že rovnost $[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{A}$ a vztah $\bar{A} \geqq \bar{B}$ platí současně.

Důkaz. a) Nechť platí hořejší rovnost. Nachť $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ jsou libovolné incidentní prvky. Neplatí-li $\bar{a} \supset \bar{b}$, existuje prvek $\bar{p} \in \bar{A}$, který je incidentní s $\bar{b}$ a je různý od $\bar{a}$. Prvky $\bar{a}$, $\bar{p}$, seřazené v tomto pořadí, tvoří vazbu $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$, a tedy množina $\bar{a} \cup \bar{p}$ je částí jistého prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Prvek $\bar{u}$ je tedy součtem alespoň dvou různých prvků rozkladu $\bar{A}$, a tudíž není prvkem rozkladu $\bar{A}$, což odporuje předpokladu. Máme tedy $\bar{a} \supset \bar{b}$, a vychází $\bar{A} \geqq \bar{B}$.

b) Nechť platí vztah $\bar{A} \geqq \bar{B}$. V tomto případě je každý prvek rozkladu $\bar{B}$ částí jistého prvku rozkladu $\bar{A}$. Z toho soudíme, že se žádné dva různé prvky rozkladu $\bar{A}$ nedají spojit v rozkladu $\bar{B}$. Vidíme, že hořejší rozklad $\bar{\bar{A}}$ je nejmenší rozklad na $\bar{A}$ a vychází $[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{A}$.

Dále ukážeme, že *platí tyto rovnosti*:

a) $[\bar{A}, \bar{B}] = [\bar{B}, \bar{A}]$;

b) $[\bar{A}, \bar{A}] = \bar{A}$;

c) $[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$.

Důkaz. a) Nechť $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, $\bar{v} \in [\bar{B}, \bar{A}]$ jsou libovolné incidentní prvky. Protože $\bar{u}$ ($\bar{v}$) je součtem jistých prvků rozkladu $\bar{A}$ ($\bar{B}$), existují prvky $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ takové, že $\bar{a} \subset \bar{u}$, $\bar{b} \subset \bar{v}$ a že jsou incidentní. Protože rozklad $\bar{A}$ pokrývá G, leží každý prvek $p \in \bar{u}$ v jistém prvku $\bar{p} \in \bar{A}$. Vidíme, že platí $\bar{u} \supset \bar{p}$, a z toho, že prvky $\bar{a}, \bar{p} \in \bar{A}$ leží v témž prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, soudíme, že se prvek $\bar{p}$ dá spojit v rozkladu $\bar{B}$ s prvkem $\bar{a}$. Protože rozklad $\bar{B}$ pokrývá G, leží p v jistém prvku $\bar{q} \in \bar{B}$, který je ovšem incidentní s $\bar{p}$. Dále z (**3.2**) soudíme, že se prvek $\bar{q}$ dá spojit v rozkladu $\bar{A}$ s prvkem $\bar{b}$. Odtud plyne $\bar{v} \supset \bar{q}$, a tedy také $\bar{v} \supset \bar{u}$. Máme tedy $[\bar{B}, \bar{A}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$. Současně však z obdobných důvodů platí vztah $\leqq$, takže vychází $[\bar{A}, \bar{B}] = [\bar{B}, \bar{A}]$.

b) Protože platí $\bar{A} \geqq \bar{A}$, platí také $[\bar{A}, \bar{A}] = \bar{A}$.

c) Když některé prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ jsou incidentní s některým prvkem $\bar{z} \in [\bar{B}, \bar{C}]$, pak leží v témž prvku rozkladu $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$. Neboť pak existují prvky $\bar{b}, \bar{q} \in \bar{B}$ takové, že $\bar{b}, \bar{q} \subset \bar{z}$, $\bar{a}_1$ a $\bar{b}$ jsou incidentní a rovněž $\bar{a}_2$ a $\bar{q}$, a existuje vazba $\{\bar{B}, \bar{C}\}$ od $\bar{b}$ do $\bar{q}$:

$$\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\gamma \quad (\bar{b}_1 = \bar{b},\ \bar{b}_\gamma = \bar{q}) .$$

Každý prvek $\bar{b}_\delta$ této vazby je částí jistého prvku $\bar{u}_\delta \in [\bar{B}, \bar{A}] = [\bar{A}, \bar{B}]$, kde $\delta = 1, \ldots, \gamma$. Z toho, že prvek $\bar{a}_1$ $(\bar{a}_2)$ je incidentní s $\bar{b}_1$ $(\bar{b}_\gamma)$ a $\bar{b}_1$ $(\bar{b}_\gamma)$ je částí prvku $\bar{u}_1$ $(\bar{u}_\gamma)$, plyne, že $\bar{a}_1$ $(\bar{a}_2)$ je incidentní s $\bar{u}_1$ $(\bar{u}_\gamma)$, a odtud soudíme, že $\bar{a}_1 \subset \bar{u}_1$, $\bar{a}_2 \subset \bar{u}_\gamma$. Protože každé dva sousední prvky $\bar{b}_\delta, \bar{b}_{\delta+1}$ jsou incidentní s některým prvkem $\bar{c}_\delta \in \bar{C}$, platí totéž o každých dvou prvcích $\bar{u}_\delta, \bar{u}_{\delta+1}$, a tedy $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_\gamma$ je vazba $\{[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}\}$ od $\bar{u}_1$ do $\bar{u}_\gamma$. Odtud plyne, že prvky $\bar{u}_1, \bar{u}_\gamma$, a tedy i prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ leží v témž prvku rozkladu $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$.

Nuže, nechť $\bar{u} \in [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]]$, $\bar{v} \in [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$ jsou libovolné incidentní prvky. Pak existuje prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{a} \subset \bar{u} \cap \bar{v}$ a $\bar{u}$ je součtem všech prvků $\bar{p} \in \bar{A}$, k nimž existuje vazba $\{\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{p}$:

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \quad (\bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}) .$$

Každé dva sousední prvky $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ jsou incidentní s některým prvkem rozkladu $[\bar{B}, \bar{C}]$ a tedy leží, jak jsme právě zjistili, v témž prvku rozkladu $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$. Odtud a ze vztahu $\bar{v} \supset \bar{a}_1$ plyne $\bar{v} \supset \bar{a}_\alpha$, tj. $\bar{v} \supset \bar{p}$. Vychází tedy $\bar{v} \supset \bar{u}$. Z toho vidíme, že je $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}] \geqq [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]]$. Odtud a z hořejšího výsledku a) máme dále:

$$[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{B}, \bar{C}], \bar{A}] \geqq [\bar{B}, [\bar{C}, \bar{A}]] = [[\bar{C}, \bar{A}], \bar{B}] \geqq$$
$$\geqq [\bar{C}, [\bar{A}, \bar{B}]] = [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}] \geqq [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] ,$$

takže podle (**3.2**c), platí

$$[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}] ,$$

a tím je důkaz ukončen.

Tyto výsledky umožňují ukázat, že rozklad $[\bar{A}, \bar{B}]$ je nejmenším společným zákrytem rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$.

Vskutku, podle své konstrukce je rozklad $[\bar{A}, \bar{B}]$ zákrytem rozkladu $\bar{A}$ a podle vztahu a) též zákrytem rozkladu $\bar{B}$. Je tedy společným zákrytem rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$. Dále budiž $\bar{X}$ libovolný společný zákryt rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$. Pak platí rovnosti

$$[\bar{X}, \bar{A}] = \bar{X} , \quad [\bar{X}, \bar{B}] = \bar{X} ,$$

a dále, podle vztahu c), je

$$[\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]] = [[\bar{X}, \bar{A}], \bar{B}] = [\bar{X}, \bar{B}] = \bar{X} .$$

Tím je zjištěno, že $\bar{X}$ je zákrytem rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$.

Každý společný zákryt rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ je tedy zákrytem jejich společného zákrytu $[\bar{A}, \bar{B}]$. Tím je ukázáno, že rozklad $[\bar{A}, \bar{B}]$ je nejmenším společným zákrytem rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$.

3.5. Největší společné zjemnění dvou rozkladů

V odst. **3.3** jsme viděli, že každé zjemnění každého společného zjemnění dvou rozkladů je opět jejich zjemněním. Je důležité pamatovat, že mezi všemi společnými zjemněními dvou rozkladů je jedno největší; největší v tom smyslu, že každé společné zjemnění obou rozkladů je jeho zjemněním. Toto význačné společné zjemnění se nazývá *největší společné zjemnění*, stručněji *největší zjemnění* obou rozkladů.

Buďte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ libovolné rozklady na G.

V tomto odstavci popíšeme konstrukci jistého rozkladu na G, který označíme $(\bar{A}, \bar{B})$ a o němž v dalším výkladu zjistíme, že je největším společným zjemněním rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Zmíněná konstrukce je tato: Když každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ nahradíme jeho rozkladem $\bar{a} \sqcap \bar{B}$, obdržíme jistý rozklad na G, který označujeme $(\bar{A}, \bar{B})$.

Rozklad $(\bar{A}, \bar{B})$ je tedy systém všech neprázdných průniků vždy některého prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ s některým prvkem $\bar{b} \in \bar{B}$.

Rozklad $(\bar{A}, \bar{B})$ je zřejmě zjemněním rozkladu $\bar{A}$, tj.

$$(\bar{A}, \bar{B}) \leqq \bar{A}\,.$$

Nyní pojednáme o vlastnostech rozkladu $(\bar{A}, \bar{B})$.

Především ukážeme, že *platí současně tyto vztahy*: $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A}$, $\bar{A} \leqq \bar{B}$.

D ů k a z. a) Nechť platí hořejší rovnost. Nechť $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ jsou libovolné incidentní prvky. Pak platí vztahy: $\bar{a} \cap \bar{b} \in \bar{a} \sqcap \bar{B} \subset (\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A}$ a z nich plyne $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a}$. Odtud vychází $\bar{a} \subset \bar{b}$ a dále $\bar{A} \leqq \bar{B}$, podle (**3.2**).

b) Nechť platí vztah $\bar{A} \leqq \bar{B}$. Pak každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ je částí jistého prvku rozkladu $\bar{B}$, a tedy $\bar{a} \sqcap \bar{B}$ se skládá z jediného prvku $\bar{a}$. Odtud plyne $(\bar{A}, \bar{B}) \geqq \bar{A}$. Protože současně platí vztah $\leqq$, jak jsme viděli vpředu, platí hořejší rovnost (**3.2** c).

Dále ukážeme, že *platí tyto rovnosti*:

a) $(\bar{A}, \bar{B}) = (\bar{B}, \bar{A})$;

b) $(\bar{A}, \bar{A}) = \bar{A}$;

c) $(\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C})) = ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$.

D ů k a z. a) Každý prvek $\bar{v} \in (\bar{A}, \bar{B})$ je prvkem rozkladu $\bar{a} \sqcap \bar{B}$, kde $\bar{a}$ značí některý prvek v $\bar{A}$, takže je $\bar{v} = \bar{a} \cap \bar{b}$, kde $\bar{b} \in \bar{B}$ značí vhodný prvek. Odtud plyne: $\bar{v} \in \bar{b} \sqcap \bar{A} \subset (\bar{B}, \bar{A})$. Máme tedy $(\bar{A}, \bar{B}) \subset (\bar{B}, \bar{A})$ a z obdobných důvodů platí vztah $\supset$. Tím je zjištěna platnost rovnosti a).

Poznamenejme, že tato rovnost vychází též ze vztahu $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A} \sqcap \bar{B}$ a z rovnosti $\bar{A} \sqcap \bar{B} = \bar{B} \sqcap \bar{A}$, jejíž platnost jsme zjistili v **2.3**.

b) Protože platí $\bar{A} \leqq \bar{A}$, platí také $(\bar{A}, \bar{A}) = \bar{A}$.

c) Nechť $\bar{v} \in (\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C}))$, takže je $\bar{v} = \bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c})$, kde $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, $\bar{c} \in \bar{C}$ jsou vhodné prvky. Protože platí $\bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c}) = (\bar{a} \cap \bar{b}) \cap \bar{c}$ a dále $(\bar{a} \cap \bar{b}) \cap \bar{c} \in ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$, vidíme, že platí vztah $(\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C})) \subset ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$. Odtud a z předešlého výsledku a) plyne snadno, že současně platí vztah $\supset$. Tím je zjištěna platnost rovnosti c).

Tyto výsledky umožňují ukázat, že *rozklad* $(\bar{A}, \bar{B})$ *je největším společným zjemněním rozkladů* $\bar{A}, \bar{B}$.

Vskutku, podle své konstrukce je rozklad $(\bar{A}, \bar{B})$ zjemněním rozkladu $\bar{A}$ a podle vztahu a) je též zjemněním rozkladu $\bar{B}$. Je tedy společným zjemněním rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$. Dále budiž $\bar{Y}$ libovolné společné zjemnění rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$. Pak platí rovnosti:

$$(\bar{Y}, \bar{A}) = \bar{Y}, \quad (\bar{Y}, \bar{B}) = \bar{Y}.$$

Odtud podle vztahu c) je

$$(\bar{Y}, (\bar{A}, \bar{B})) = ((\bar{Y}, \bar{A}), \bar{B}) = (\bar{Y}, \bar{B}) = \bar{Y},$$

a tím je zjištěno, že $\bar{Y}$ je zjemněním rozkladu $(\bar{A}, \bar{B})$.

Každé společné zjemnění rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$ je tedy zjemněním jejich společného zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$. Tím je ukázáno, že zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$ je největším společným zjemněním rozkladů $\bar{A}, \bar{B}$.

3.6. Vztahy mezi nejmenším společným zákrytem a největším společným zjemněním dvou rozkladů

Nechť $\bar{A}, \bar{B}$ značí libovolné rozklady na G.

Ukážeme, že *mezi nejmenším společným zákrytem* $[\bar{A}, \bar{B}]$ *a největším společným zjemněním* $(\bar{A}, \bar{B})$ *rozkladů* A, B *platí tyto rovnosti*:

$$[\bar{A}, (\bar{A}, \bar{B})] = \bar{A}, \quad (\bar{A}, [\bar{A}, \bar{B}]) = \bar{A}.$$

Vskutku, tyto rovnosti vyjadřují vztahy $\bar{A} \geqq (\bar{A}, \bar{B})$ a $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{A}$ (**3.4**; **3.5**).

3.7. Cvičení

1. Pro libovolné rozklady $\bar{A}, \bar{B}$ na množině G odvoďte z platnosti vztahů $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, $\mathbf{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B}) = \mathbf{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{A}) = \bar{u}$ vztah $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$.

2. Pro každé tři rozklady $\bar{A}, \bar{B}, \bar{X}$, přičemž $\bar{X} \geqq \bar{A}$, platí a) $[\bar{X}, \bar{B}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$, $(\bar{X}, \bar{B}) \geqq (\bar{A}, \bar{B})$; b) $(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) \geqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$.

3. Vymyslete příklad, na němž ukážete, že za předpokladů uvedených v předcházejícím cvičení, nemusí ve vzorci b) platit rovnost.

4. Dva rozklady v množině G mají vždycky nejmenší společný zákryt, ale nemají nutně největší společné zjemnění. Pro nejmenší společné zákryty rozkladů $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ v množině G platí vzorce **3.4** a) b) c).