I. MNOŽINY

1. Základní pojmy o množinách

Především uvedeme některé základní pojmy z teorie množin a na nich založíme další úvahy.

1.1. Pojem množiny

V matematickém názvosloví užíváme slova *množina* náhradou za slovo množství, které má v šesti různých pádech stejnou koncovku a proto je po jazykové stránce méně vhodné. V naší matematické literatuře slovo množina zdomácnělo a označuje jeden z nejdůležitějších pojmů moderní matematiky.

Množinou rozumíme souhrn jakýchkoli vzájemně rozlišitelných věcí. Tyto věci, z nichž se množina skládá, nazýváme *prvky* nebo též *body* množiny. *Každá množina je svými prvky jednoznačně určena.* Dvě množiny, které se skládají z týchž prvků, považujeme za *identické.*

Všude kolem nás vidíme příklady množin. Uveďme např. tyto:
[1] množina skládající se ze znaku a;
[2] množina všech slov obsažených v této knize;
[3] množina všech přirozených čísel.

Ve svých úvahách budeme často jednat o množinách množin, tj. o množinách, jejichž prvky jsou opět množiny; z jazykových důvodů říkáme raději *systém množin* místo *množina množin.*

V případě systému množin se vyskytují jednak prvky systému, tedy množiny, a jednak prvky těchto množin. V takových případech mluvíme zpravidla o prvcích systému a o bodech těchto prvků.

Příkladem systému množin je

[4] množina, jejíž prvky jsou množiny přirozených čísel, z nichž jedna se skládá ze všech prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, ..., další ze všech součinů vždy dvou prvočísel, další ze všech součinů vždy tří prvočísel atd.

1.2. Označení množin

Množiny budeme zpravidla označovat velkými latinskými písmeny, např. A, a prvky množin latinskými písmeny malými, např. a. V případě systémů množin vede toto pravidlo k označování jak systémů množin, tak i jejich prvků velkými latinskými písmeny, a proto se od něho odchýlíme; systémy množin budeme označovat velkými latinskými písmeny s pruhem, např. $\bar{A}$, a jejich prvky, tedy opět množiny, malými latinskými písmeny s pruhem, např. $\bar{a}$.

Když a, b značí touž věc, pravíme, že se věci a, b *rovnají*, a píšeme $a = b$ nebo $b = a$. Opačný případ, tedy nerovnost věcí a, b, vyjadřujeme vzorcem $a \neq b$ nebo $b \neq a$. Když se např. množiny A, B skládají z týchž prvků, je $A = B$ a v opačném případě $A \neq B$. Když je věc a prvkem množiny A, píšeme $a \in A$.

Když je nějaká množina A souhrnem věcí, které jsme označili $a, b, c, \ldots$, píšeme $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Např. $\{a\}$ je symbol hořejší množiny [1] a $\{1, 2, 3, \ldots\}$ je symbol množiny [3]. Také si jednou provždy stanovíme, že se zavedených názvů nebudeme držet vždycky doslovně, nýbrž v duchu jazyka si dovolíme odchylky, pokud ovšem nebudou na újmu přesnosti výkladu. Tak např. místo „množina A je souhrn prvků $a, b, c, \ldots$“ můžeme říci: „množina A se skládá z prvků $a, b, c, \ldots$“ anebo „množina A má prvky $a, b, c, \ldots$ a žádné jiné“; místo „a je prvek množiny A“ můžeme říci, „a je prvek v množině A“ nebo „a patří do množiny A“, atp.

1.3. Další pojmy

Jako množinu zavádíme také tzv. *prázdnou množinu*, která je charakterizována vlastností, že nemá žádné prvky. Protože každá množina je svými prvky jednoznačně určena, je jenom jedna prázdná množina. Budeme ji označovat symbolem $\emptyset$. Při další četbě poznáme, že zavedení pojmu prázdné množiny je výhodné při formulaci úvah.

Každá množina, jejímiž prvky jsou nějaké symboly, např. písmena, jejichž význam není blíže vymezen, nazývá se *abstraktní*; např. hořejší množina [1] je abstraktní.

Každá množina, která se skládá jenom z konečného počtu prvků, se nazývá *konečná*, kdežto v opačném případě *nekonečná*; např. množiny [1], [2] jsou konečné, kdežto množiny [3], [4] jsou nekonečné.

Řádem libovolné konečné neprázdné množiny rozumíme počet jejích prvků. Např. množina [1] má řád 1. Dále je pro náš účel vhodné přisoudit každé nekonečné množině řád 0. Prázdné množině řád nepřisuzujeme.

1.4. Podmnožina a nadmnožina

Nechť A, B značí nějaké množiny. Když je každý prvek v A současně prvkem v B, pravíme, že A je *podmnožina v B* nebo B je *nadmnožina na A*. Někdy tento vztah vyjadřujeme také tím, že A je *část* množiny B nebo B *obsahuje* množinu A. Píšeme pak $A \subset B$ anebo $B \supset A$. Prázdná podmnožina se považuje za část každé množiny; zejména $\emptyset \subset \emptyset$.

Když $A \subset B$, množina B může (ale nemusí) obsahovat prvky, které do A nepatří. Obsahuje-li B alespoň jeden prvek, který nepatří do A, vyjadřujeme tuto okolnost přívlastkem *vlastní* a říkáme, že A je *vlastní* podmnožina v B nebo že B je *vlastní* nadmnožina na A. V opačném případě je A (B) *nevlastní* podmnožina (nadmnožina) v B (na A) a vidíme, že se rovná množině B (A): $A = B$ ($B = A$).

Např. množina všech prvočísel je vlastní podmnožina v množině [3], neboť každé prvočíslo je prvkem množiny [3], a tato množina obsahuje také čísla, jako např. číslo 4, která prvočísla nejsou. Když je A podmnožina v B, ale nikoli vlastní, pak nejenom je každý prvek v A také prvkem v B, nýbrž i každý prvek v B je prvkem v A, tj. platí současně oba vztahy $A \subset B$, $B \subset A$. Je zřejmé, že tyto vztahy dohromady vyjadřují rovnost $A = B$.

Vidíme, že každá podmnožina v B je buď vlastní nebo je identická s B. Při této příležitosti si všimněme, že rovnost $A = B$ je ekvivalentní se vztahy $A \subset B$, $B \subset A$, a to v tom smyslu, že když platí, pak platí současně tyto vztahy, a naopak. Nejčastěji seznáme rovnost dvou množin právě tím způsobem, že o každé z nich zjistíme, že je podmnožinou v druhé.

1.5. Součet (sjednocení) množin

Součtem neboli *sjednocením množiny A a množiny B* rozumíme množinu všech prvků, které patří do množiny A nebo do B.

Protože touto definicí jsou vymezeny všechny prvky, které patří do součtu množiny A a množiny B, a protože každá množina je svými prvky jednoznačně určena, je jenom jeden součet množiny A a množiny B; označujeme jej symbolem $A \cup B$. Z naší definice plyne, že $A \cup B = B \cup A$. Vzhledem k této skutečnosti mluvíme obvykle o součtu množin A, B a nerozlišujeme, zda jde o součet množiny A a množiny B nebo množiny B a množiny A. Vidíme, že součet množin A, B je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z nich. Každá z obou množin A, B je podmnožinou v $A \cup B$, neboť každý prvek např. množiny A patří alespoň do jedné z množin A, B, a to do A; můžeme tedy psát $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$. Např. součet množiny všech kladných sudých čísel a množiny všech kladných lichých čísel je množinou [3]; je totiž $\{2, 4, 6, \ldots\} \cup \{1, 3, 5, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Součet množiny skládající se z jediného slova a a množiny [2] je opět množinou [2].

Pojem součtu dvou množin se dá snadno rozšířit na pojem součtu systému množin: *Součtem* neboli *sjednocením libovolného systému množin* $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin, které jsou prvky systému $\bar{A}$.

Opět platí, že systém $\bar{A}$ má právě jeden součet a že každá množina, která je prvkem systému $\bar{A}$, je podmnožinou v součtu systému $\bar{A}$. Součet systému $\bar{A}$ označujeme zpravidla symbolem $\mathbf{s}\bar{A}$ a jestliže jsme prvky systému $\bar{A}$ označili písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$, označujeme jej symbolem $\bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \ldots$, stručněji $\bigcup \bar{a}$, nebo podobně, jak vždycky bude z výkladu patrné.

1.6. Průnik množin. Množiny incidentní a disjunktní

Průnikem množiny A a množiny B rozumíme množinu všech prvků, které patří do množiny A a rovněž do množiny B.

Podobně jako u součtu zjistíme, že je jenom jeden průnik množiny A a B; označujeme jej symbolem $A \cap B$. Dále vidíme, že $A \cap B = B \cap A$. Vzhledem k této skutečnosti mluvíme obvykle o průniku množin A, B a nerozlišujeme, zda jde o průnik množiny A a množiny B nebo množiny B a množiny A. Vidíme, že průnik množin A, B je množina všech prvků, které patří do obou množin A, B. Průnik $A \cap B$ je částí každé z obou množin A, B, neboť každý prvek v $A \cap B$ patří např. do množiny A. Všimněme si, že i když množiny A, B nemají společné prvky, má definice průniku množin A, B smysl, a to ten, že v tom případě je $A \cap B$ prázdná množina. Zde již poznáváme, že zavedení pojmu prázdné množiny je výhodné, neboť jinak bychom mohli mluvit o průniku jenom u některých množin. Přesto je účelné, abychom měli zvláštní název pro množiny, které mají společné prvky, a pro množiny, které je nemají.

Mají-li množiny A, B společné prvky, nazývají se *incidentní*, kdežto v opačném případě se nazývají *disjunktní*. První případ je charakterizován nerovností $A \cap B \neq \emptyset$, kdežto druhý rovností $A \cap B = \emptyset$.

Příkladem incidentních množin je množina skládající se z jediného slova a a množina [2], jejichž průnikem je první množina. Příkladem disjunktních množin je množina všech kladných sudých čísel a množina všech kladných lichých čísel; jejich průnik je zřejmě $\emptyset$.

Pojem průniku dvou množin se dá opět rozšířit na pojem průniku systému množin: *Průnikem libovolného systému množin* $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří do každé z množin, které jsou prvky systému $\bar{A}$.

Opět platí, že systém $\bar{A}$ má právě jeden průnik, a že tento průnik je podmnožinou v každém prvku systému $\bar{A}$. Průnik systému $\bar{A}$ označujeme symbolem $\mathfrak{p}\bar{A}$ nebo symbolem $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$, stručněji $\bigcap \bar{a}$, atp., jestliže jsme označili prvky systému $\bar{A}$ písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$

1.7. Posloupnosti

Posloupností na (neprázdné) *množině A*, stručněji *posloupností*, rozumíme množinu A, jejíž prvky jsou očíslovány. To znamená, že právě jeden prvek množiny A je označen jako první, právě jeden jako druhý, atd., přičemž je každý prvek množiny A očíslován alespoň jednou. Prvek očíslovaný (přirozeným) číslem γ se nazývá *γ-tý člen posloupnosti*, popříp. *člen s indexem γ* nebo *člen hodnosti γ*. Hodnost členu se zpravidla vyznačuje příslušným indexem; např. pro počáteční členy posloupnosti takto: $a_1, a_2, \ldots$ Dva různé členy posloupnosti, tj. členy s různými indexy, např. a_1, a_2, mohou znamenat týž prvek množiny A očíslovaný jednou číslem 1 a po druhé číslem 2.

Když nějaká posloupnost má poslední člen a_α, nazývá se *konečná*, podrobněji *α-členná*, a číslo α je její *délka*. V tomto případě je ke každému číslu $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ přiřazen právě jeden člen a_γ hodnosti γ, avšak členy s hodností převyšující α v posloupnosti neexistují. V souhlase s tím se používá k označení takové posloupnosti symbolu $(a_\gamma)_{\gamma=1}^{\alpha}$ nebo $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ apod. Když posloupnost nemá poslední člen, nazývá se *nekonečná*; v tom případě také říkáme, že její délka je nekonečná. Když jde o nekonečnou posloupnost, je ke každému přirozenému číslu γ přiřazen právě jeden člen hodnosti γ; Označení: $(a_\gamma)_{\gamma=1}^{\infty}$, $(a_1, a_2, \ldots)$ apod. Když posloupnost obsahuje konečně mnoho vzájemně různých prvků, pak je konečná nebo nekonečná; v opačném případě je nekonečná.

Nechť $(a) = (a_1, a_2, \ldots)$ je konečná nebo nekonečná posloupnost. Každá posloupnost $(a'_1, a'_2, \ldots)$ vzniklá z (a) vypuštěním některých členů a_γ se nazývá *částečná posloupnost* nebo *část posloupnosti* (a). Posloupnost (a) se počítá ke svým částem. Částečná posloupnost $(a_1, \ldots, a_\gamma)$ skládající se z prvních γ členů posloupnosti (a) se nazývá *γ-tá hlavní částečná posloupnost* nebo *γ-tá hlavní část posloupnosti* (a); γ značí libovolné přirozené číslo, které v případě α-členné posloupnosti nepřevyšuje číslo α. Když posloupnost (a) je α-členná, pak pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha - 1$, patří k její hlavní části $(a_1, \ldots, a_\gamma)$ právě jedna *následovnice*, tj. o jednotku delší hlavní část $(a_1, \ldots, a_\gamma, a_{\gamma+1})$ posloupnosti (a); α-tá hlavní část posloupnosti (a) splývá ovšem s (a). Když posloupnost (a) je nekonečná, má každá její hlavní část právě jednu následovnici.

Posloupnosti $(a) = (a_1, a_2, \ldots)$, $(b) = (b_1, b_2, \ldots)$ se považují za rovné tehdy a jenom tehdy, když mají tutéž délku a tytéž členy se stejnými indexy: $(a) = (b)$ značí $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ...

Nyní si všimněme, jak se tyto pojmy uplatňují v případě množin posloupností.

Nechť $\mathscr{A}$ je neprázdná množina skládající se z konečných, např. α-členných posloupností. Hlavní části délky γ prvků množiny $\mathscr{A}$, kde $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, tvoří neprázdnou množinu, kterou nazýváme *γ-tá množina hlavních částí příslušná k $\mathscr{A}$*; označujeme ji $\mathscr{A}_\gamma$. K množině $\mathscr{A}$ patří tedy množiny hlavních částí $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_\alpha$, přičemž ovšem $\mathscr{A}_\alpha$ splývá s $\mathscr{A}$, tj. $\mathscr{A}_\alpha = \mathscr{A}$. Dále v případě $\gamma < \alpha$ přísluší ke každému prvku $a^{(\gamma)} \in \mathscr{A}_\gamma$ neprázdná množina následovnic prvku $a^{(\gamma)}$. Ta se skládá z hlavních částí délky $\gamma + 1$ všech prvků množiny $\mathscr{A}$, které začínají hlavní částí $a^{(\gamma)}$; označení např. $N(a^{(\gamma)})$. Zřejmě platí: $N(a^{(\gamma)}) \subset \mathscr{A}_{\gamma+1}$.

Důležitým příkladem množiny skládající se z α-členných posloupností je neprázdná množina bodů v α-rozměrném souřadnicovém prostoru. V tomto případě je libovolný bod a identický s jistou α-člennou posloupností $(a_1, \ldots, a_\alpha)$, přičemž „souřadnice" $a_1, \ldots, a_\alpha$ jsou reálná nebo komplexní čísla. γ-tá hlavní část $(a_1, \ldots, a_\gamma)$, kde $1 \leqq \gamma < \alpha$, je „průmět" bodu a do γ-rozměrného prostoru daného rovnicemi $a_{\gamma+1} = \ldots = a_\alpha = 0$.

1.8. Kartézský součin množin Kartézské mocniny

Kartézským součinem množiny A s množinou B rozumíme množinu skládající se z dvojčlenných posloupností (a, b), přičemž a probíhá všechny prvky množiny A a b všechny prvky množiny B. Když některá z množin A, B je prázdná, definuje se příslušný kartézský součin jako prázdná množina.

Touto definicí je určen právě jeden kartézský součin množiny A s množinou B. Tento kartézský součin se označuje symbolem $A \times B$. Přitom je A (B) první (druhý) *činitel* neboli *faktor* kartézského součinu $A \times B$; a (b) je první (druhá) *souřadnice* jeho prvku (a, b). Z uvedené definice vidíme, že obecně je $A \times B \neq B \times A$.

Kartézskou druhou mocninou neboli *kartézským čtvercem* množiny A rozumíme kartézský součin $A \times A$. Kartézský čtverec množiny A se tedy skládá z dvojčlenných posloupností (a, b), přičemž a, b probíhají všechny prvky množiny A. Když je množina A prázdná, pak totéž platí o kartézském čtverci $A \times A$. Např. kartézský čtverec množiny $[3]$ splývá s množinou všech dvojčlenných posloupností, které jsou tvořeny vždy dvěma stejnými nebo různými přirozenými čísly; tento kartézský čtverec je tedy množinou bodů (ve smyslu rovinné analytické geometrie), jejichž obě souřadnice jsou přirozená čísla.

Rozšíření pojmu kartézského součinu na víc než dva činitele a pojmu kartézské druhé mocniny na kartézské mocniny vyšší je snadné a může se přenechat čtenáři. Těmito obecnějšími pojmy se zde zabývat nebudeme, protože je v dalších úvahách neuplatníme.

Všimněme si, že kartézské součiny patří k množinám skládajícím se z konečných posloupností.

1.9. α-stupňové množinové útvary

V dalších úvahách se setkáme i se složitějšími útvary založenými na pojmu množiny. Půjde zejména o tzv. α-stupňové množinové útvary.

Nechť α ($\geqq 1$) je libovolné přirozené číslo a $(A) = (A_1, \ldots, A_\alpha)$ posloupnost neprázdných množin.

α-stupňovým množinovým útvarem vzhledem k posloupnosti (A), stručněji *α-stupňovým útvarem* rozumíme neprázdnou množinu $\tilde{A}$ tohoto složení: Každý prvek $\bar{\bar{a}} \in \tilde{A}$ je α-členná posloupnost $(\bar{a}) = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, přičemž každý člen $\bar{a}_\gamma$ této posloupnosti je neprázdnou částí množiny A_γ; $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$.

V našich úvahách se vyskytne zejména případ, že se množiny $A_1, \ldots, A_\alpha$ skládají z neprázdných množin, takže každá množina A_γ představuje neprázdný systém $\bar{A}_\gamma$ neprázdných množin; $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$. Takové α-stupňové útvary $\tilde{A}$ mají tedy toto složení: Každý prvek $a \in \tilde{A}$ je α-členná posloupnost, $(\bar{a}) = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha)$, přičemž každý člen $\bar{a}_\gamma$ této posloupnosti je neprázdný systém neprázdných množin, který je částí systému $\bar{A}_\gamma$; $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$.

1.10. Cvičení

1. $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$.
2. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.
3. Když $A \subset B$, pak $A \cup B = B$, $A \cap B = A$; naopak, když platí jedna z těchto rovností, pak $A \subset B$.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
6. Když má množina A konečný počet n ($\geqq 0$) prvků, pak má 2^n podmnožin.
7. Kartézský součin množiny o m ($\geqq 0$) prvcích a množiny o n ($\geqq 0$) prvcích se skládá z $m \cdot n$ prvků.
8. Část kartézského součinu $A \times B$ není nutně kartézským součinem části množiny A s částí množiny B.