6. Když v nějaké konečné grupě řádu N ($\geqq 2$) existuje podgrupa řádu $\frac{1}{2}N$, pak tato podgrupa jest v ní invariantní. Na př. v diedrické grupě řádu $2\,n$ ($n \geqq 3$) máme invariantní podgrupu řádu n, která se skládá ze všech prvků grupy odpovídajících otočením vrcholů pravidelného n-úhelníka okolo jeho středu (v. cvič. 2. v odst. 11.).

7. V úplné grupě euklidovských pohybů na přímce nebo v rovině jest ona podgrupa, která se skládá ze všech euklidovských pohybů $\boldsymbol{f}[a]$ nebo $\boldsymbol{f}[\alpha;\, a, b]$ invariantní (v. cvič. 1. v odst. 11.). Příslušná grupa tříd má právě dva prvky; jeden se skládá ze všech euklidovských pohybů $\boldsymbol{f}[a]$ nebo $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$, druhý pak z $\boldsymbol{g}[a]$ nebo $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$.

14. Deformace a věty o isomorfismu grup.

Deformace grup. Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí grupoidy a předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Když jeden z grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ jest grupa, co se dá říci o druhém?

Když $\mathfrak{G}$ jest grupa, pak také $\mathfrak{G}^*$ jest grupa. Mimoto obraz v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}$ jest jednotka grupy $\mathfrak{G}^*$ a obraz prvku inversního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ jest prvek inversní vzhledem k obrazu prvku a. Abychom tato tvrzení dokázali, uvažme, že podle cvič. 2. v odst. 7. jest grupoid $\mathfrak{G}^*$ asociativní. Nechť $\underline{1}^*$ značí obraz jednotky $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$ v deformaci $\boldsymbol{d}$, takže $\underline{1}^* = \boldsymbol{d}\underline{1}$. Podle cvič. 4. v odst. 10. jest $\underline{1}^*$ jednotkou grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Nechť dále a^* značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}^*$. Protože $\boldsymbol{d}$ jest zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$, existuje alespoň jeden prvek $a \in \mathfrak{G}$ takový, že $a^* = \boldsymbol{d}a$. Z rovnosti $aa^{-1} = \underline{1}$ plyne $\boldsymbol{d}(aa^{-1}) = \boldsymbol{d}\underline{1}$, t. j. $a^*\boldsymbol{d}a^{-1} = \underline{1}^*$ a podobně z rovnosti $a^{-1}a = \underline{1}$ rovnost $\boldsymbol{d}(a^{-1}a) = \boldsymbol{d}\underline{1}$, t. j. $\boldsymbol{d}a^{-1} . a^* = \underline{1}^*$ a odtud vychází, že prvek $\boldsymbol{d}a^{-1}$ jest inversní vzhledem k a^*, takže $\boldsymbol{d}a^{-1} = (\boldsymbol{d}a)^{-1}$. Dále vidíme, že obraz v $\boldsymbol{d}$ prvku inversního vzhledem k libovolnému prvku $a \in \mathfrak{G}$ jest prvek inversní vzhledem k obrazu prvku a a tím jsou naše tvrzení dokázána. Stručně můžeme říci, že každá deformace zobrazuje grupu opět na grupu a zachovává v obou grupách jednotky a inversní prvky.

Z tohoto výsledku zejména vychází, že *jsou-li nějaké dva grupoidy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorfní a jeden z nich jest grupa, pak také druhý jest grupa.* Neboť jsou-li $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ isomorfní, pak existuje isomorfismus grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ a současně existuje isomorfismus (inversní) grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$. Tedy jest každý z obou grupoidů $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ obrazem druhého v jistém isomorfismu a tedy, je-li jeden z nich grupa, pak také druhý jest grupa, jakožto isomorfní obraz grupy. Každý isomorfismus zachovává ovšem v obou grupách, jako každá deformace, jednotky a inversní prvky; dále zachovává podgrupy a jak se snadno přesvědčíme, i invariantní podgrupy.

O grupoidu $\mathfrak{G}$ nečiňme nyní dalších předpokladů, ale o grupoidu $\mathfrak{G}^*$

předpokládejme, že jest grupou. Podle první věty o isomorfismu grupoidů jest grupa $\mathfrak{G}^*$ isomorfní ($\boldsymbol{i}$) s jistým faktoroidem $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$; a sice $\overline{\mathfrak{G}}$ přísluší k vytvořujícímu rozkladu patřícímu k deformaci $\boldsymbol{d}$ a v isomorfismu $\boldsymbol{i}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}^*$ jest každý prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$ zobrazen na onen prvek grupy $\mathfrak{G}^*$, z jehož vzorů v $\boldsymbol{d}$ se skládá. Podle předcházejícího výsledku jest $\overline{\mathfrak{G}}$ grupa, protože $\mathfrak{G}^*$ jest grupa. Isomorfismus $\boldsymbol{i}$ zachovává v obou grupách jednotky a inversní prvky; proto jest jednotka $\overline{\underline{1}}$ grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ v isomorfismu $\boldsymbol{i}$ zobrazena na jednotku $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$, takže $\boldsymbol{i}\overline{\underline{1}} = \underline{1}^*$, a každé dva inversní prvky $\bar{a}$, $\bar{a}^{-1}$ v $\overline{\mathfrak{G}}$ jsou zobrazeny na dva inversní prvky v $\mathfrak{G}^*$: $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^*$, $\boldsymbol{i}\bar{a}^{-1} = a^{*-1}$. Protože každý prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ vždy téhož prvku $a^* \in \mathfrak{G}^*$ a sice onoho prvku, pro nějž platí $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^*$, skládá se jednotka $\overline{\underline{1}}$ grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ prvku $\underline{1}^*$ a podobně dva inversní prvky $\bar{a}, \bar{a}^{-1}$ v $\overline{\mathfrak{G}}$ se skládají ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ dvou inversních prvků a^*, a^{*-1} v $\mathfrak{G}^*$. Platí tedy tato věta: *Když $\mathfrak{G}^*$ jest grupa, pak faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$, patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$ jest grupa a jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$. Jednotka grupy $\overline{\mathfrak{G}}$ jest množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ a každé dva inversní prvky v $\overline{\mathfrak{G}}$ jsou množiny všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ dvou inversních prvků v $\mathfrak{G}^*$.*

Na jednoduchém příkladě ukážeme, že je-li $\mathfrak{G}^*$ grupa, pak nejenom že $\mathfrak{G}$ nemusí býti grupa, nýbrž může býti jakýkoli grupoid. Skutečně, nechť $\mathfrak{G}^*$ značí grupu skládající se z jediného prvku $\underline{1}^*$, takže $\underline{1}^*\underline{1}^* = \underline{1}^*$, a nechť $\mathfrak{G}$ značí libovolný grupoid. Máme ukázati, že existuje deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$. Jest zřejmé, že zobrazení, které ke každému prvku v $\mathfrak{G}$ přiřazuje prvek $\underline{1}^*$, jest deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$.

Cayleyova věta a realisace abstraktních grup. Nechť $\mathfrak{G}$ značí libovolnou grupu a a libovolný prvek v $\mathfrak{G}$. Přiřadíme-li ke každému prvku $x \in \mathfrak{G}$ prvek $ax \in \mathfrak{G}$, obdržíme jisté zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ do sebe; protože rovnice $ax = b$, v níž b značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$, má jediné řešení $x \in \mathfrak{G}$, jest to prosté zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ na sebe, t. j. permutace grupy $\mathfrak{G}$. Tato permutace grupy $\mathfrak{G}$ se nazývá *levá translace* určená prvkem a a označuje se ${}_a\boldsymbol{t}$. Levá translace určená prvkem $\underline{1}$ jest zřejmě identický automorfismus na $\mathfrak{G}$. Když a, b jsou různé prvky v $\mathfrak{G}$, pak obě levé translace ${}_a\boldsymbol{t}$, ${}_b\boldsymbol{t}$ jsou různé, neboť prvek $\underline{1}$ se v ${}_a\boldsymbol{t}$ zobrazí na prvek a a v ${}_b\boldsymbol{t}$ se zobrazí na prvek b. Složíme-li libovolnou levou translaci ${}_a\boldsymbol{t}$ s libovolnou levou translací ${}_b\boldsymbol{t}$, obdržíme zřejmě levou translaci určenou prvkem ba, takže platí rovnost ${}_b\boldsymbol{t}{}_a\boldsymbol{t} = {}_{ba}\boldsymbol{t}$.

Uvažujme nyní o grupoidu, jehož pole jest množina všech levých translací určených jednotlivými prvky grupy $\mathfrak{G}$ a násobení jest definováno vzorcem ${}_a\boldsymbol{t} \cdot {}_b\boldsymbol{t} = {}_{ab}\boldsymbol{t}$, v němž ${}_a\boldsymbol{t}$, ${}_b\boldsymbol{t}$ značí dva libovolné prvky toho grupoidu. Označme tento grupoid $\mathfrak{T}_l$. Přiřadíme-li ke každému prvku $a \in \mathfrak{G}$ prvek ${}_a\boldsymbol{t} \in \mathfrak{T}_l$, obdržíme zřejmě zobrazení grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{T}_l$ a toto zobrazení jest prosté, protože každé dva různé prvky $a, b \in \mathfrak{G}$ jsou zobrazeny na dva různé prvky ${}_a\boldsymbol{t}, {}_b\boldsymbol{t} \in \mathfrak{T}_l$; protože součin ab libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ jest zobrazen na ${}_{ab}\boldsymbol{t} \in \mathfrak{T}_l$, t. j. na součin ${}_a\boldsymbol{t} \,.\, {}_b\boldsymbol{t}$ obrazu ${}_a\boldsymbol{t}$ prvku a s obrazem ${}_b\boldsymbol{t}$ prvku b, jest toto zobrazení deformace a tedy isomorfismus grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{T}_l$. Grupoid $\mathfrak{T}_l$ jest tedy grupa a sice permutační grupa a máme tuto t. zv. Cayleyovu větu: *Každá grupa jest isomorfní s jistou permutační grupou.* Důležitost tohoto výsledku záleží v tom, že se v teorii grup, pokud jde o studium vlastností společných isomorfním grupám, můžeme omeziti na grupy permutační.

S těmito úvahami úzce souvisí tato otázka: Když jest dána nějaká abstraktní grupa $\mathfrak{G}$, zda existuje nějaká permutační grupa, která se dá na ni deformovati? O každé takové permutační grupě pravíme, že *realisuje* abstraktní grupu $\mathfrak{G}$, takže naše otázka zní, zda se každá abstraktní grupa dá realisovati permutacemi. Z hořejších úvah vyplývá, že odpověď na tuto otázku jest kladná, neboť každá abstraktní grupa jest (dokonce) isomorfní s příslušnou grupou levých translací $\mathfrak{T}_l$, takže grupa $\mathfrak{T}_l$ grupu $\mathfrak{G}$ realisuje. Na př. realisujme abstraktní grupu řádu 4., jejíž multiplikační tabulka jest napsána jako druhá na str. 56.! Příslušné levé translace určené jednotlivými prvky jsou podle té tabulky tyto permutace:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ \underline{1} & a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ a & \underline{1} & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ b & c & \underline{1} & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & a & b & c \\ c & b & a & \underline{1} \end{pmatrix}$$

a tvoří spolu s násobením, které definujeme tím, že součinem $\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{q}$ rozumíme složenou permutaci $\boldsymbol{pq}$, permutační grupu, která realisuje naši abstraktní grupu 4. řádu.

Podobně jako jsme definovali levé translace na nějaké grupě $\mathfrak{G}$, definujeme pravé translace: Když a značí libovolný prvek v $\mathfrak{G}$ a když ke každému prvku $x \in \mathfrak{G}$ přiřadíme prvek $xa \in \mathfrak{G}$, obdržíme permutaci grupy $\mathfrak{G}$, t. zv. *pravou translaci* $\boldsymbol{t}_a$ určenou prvkem a. O pravých translacích na $\mathfrak{G}$ platí podobné výsledky jako o translacích levých a doporučujeme čtenáři, aby si je odvodil.

Věty o isomorfismu grup. V odst. 9. jsme pojednali o větách o isomorfismu grupoidů a nyní si všimneme těchto vět v případě, že jde o grupy. Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí libovolné grupy.

Předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Jak jsme výše ukázali, jest faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$ isomorfní s $\mathfrak{G}^*$. Podle odst. 13. jest $\overline{\mathfrak{G}}$ grupa tříd vytvořená jistou invariantní podgrupou v $\mathfrak{G}$ a sice jest pole této invariantní podgrupy onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje jednotku $\underline{1}$ grupy $\mathfrak{G}$. Protože $\underline{1}$ jest vzorem v $\boldsymbol{d}$ jednotky $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$, vidíme, že onen prvek faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}$, který obsahuje $\underline{1}$, skládá se ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$. Vychází tedy, že množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ jest polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a grupa tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$.

Předpokládejme nyní naopak, že grupa $\mathfrak{G}^*$ jest isomorfní s grupou tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{G}$ vytvořenou nějakou podgrupou $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$. Pak existuje isomorfismus $\boldsymbol{i}$ grupy tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ na grupu $\mathfrak{G}^*$. Podle odst. 9. jest zobrazení $\boldsymbol{d}'$ grupy $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ definované tím, že pro $a \in \mathfrak{G}$ jest $\boldsymbol{d}'a$ onen prvek v $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, v němž a leží, deformace grupy $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Odtud plyne, že $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{d}'$ jest deformace grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Podle odst. 13. jest jednotkou grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ pole A invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$. Protože v $\boldsymbol{i}$ jest na jednotku $\underline{1}^*$ grupy $\mathfrak{G}^*$ zobrazena právě jenom jednotka grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, jsou v $\boldsymbol{d}$ zobrazeny na $\underline{1}^*$ právě jenom ony prvky v $\mathfrak{G}$, které leží v A. Vychází tedy, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ taková, že $\mathfrak{A}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$.

Tyto výsledky vyjadřuje *první věta o isomorfismu grup*:

Dá-li se grupa $\mathfrak{G}$ deformovati ($\boldsymbol{d}$) na grupu $\mathfrak{G}^*$, pak množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$ tvoří invariantní podgrupu $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a grupa tříd na $\mathfrak{G}$, vytvořená invariantní podgrupou $\mathfrak{A}$ jest isomorfní s $\mathfrak{G}^*$, t. j. $\mathfrak{G}/\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}^*$. Naopak, je-li grupa $\mathfrak{G}^*$ isomorfní s grupou tříd na $\mathfrak{G}$, vytvořenou nějakou podgrupou $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, pak existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ taková, že $\mathfrak{A}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotky grupy $\mathfrak{G}^*$.

Nechť nyní $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ značí podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{B}$ a že jest zaměnitelná s $\mathfrak{C}$. Podle druhé věty o isomorfismu grupoidů jest obal $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ podgrupy $\mathfrak{C}$ v grupě tříd $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ isomorfní s průsekem $\mathfrak{B}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$ grupy tříd $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ s podgrupou $\mathfrak{C}$, t. j. $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$, a sice jest isomorfismus zobrazení, v němž jest ke každému prvku obalu $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ přiřazen s ním incidentní prvek průseku $\mathfrak{B}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C}$. Podle odst. 13. jest $\mathfrak{A}$ invariantní podgrupa v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ a platí vzorce: $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/\mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \sqcap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$. Odtud vychází *druhá věta o isomorfismu grup*:

Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ podgrupy v grupě $\mathfrak{G}$ takové, že $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{B}$ a jest zaměnitelná s $\mathfrak{C}$, pak $\mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ a platí vztah

$$(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \simeq (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}),$$

při čemž isomorfismus jest dán incidencí prvků.

Důsledkem této věty (pro $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$) jest tato věta:

Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ podgrupy v $\mathfrak{G}$ a je-li $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, pak $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jest invariantní podgrupa v $\mathfrak{C}$ a platí vztah

$$\mathfrak{C}\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}),$$

při čemž isomorfismus jest dán incidencí prvků.

Jak víme z teorie grupoidů (odst. 9.), máme ještě třetí větu o grupoidech a ta se týká zákrytu faktoroidu. Nechť $\mathfrak{A}_1$ značí libovolnou invariantní podgrupu v $\mathfrak{G}$ a $\overline{\mathfrak{A}}_2$ libovolnou invariantní podgrupu v grupě tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$. Podle třetí věty o isomorfismu grupoidů jest grupa tříd $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1)/\overline{\mathfrak{A}}_2$ isomorfní se zákrytem $\overline{\mathfrak{G}}_2$ grupy tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ vynuceným grupou tříd $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1)/\overline{\mathfrak{A}}_2$, t. j. $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1)/\overline{\mathfrak{A}}_2 \simeq \overline{\mathfrak{G}}_2$ a sice jest isomorfismus zobrazení, v němž jest ke každému prvku $\overline{\overline{a}} \in (\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1)/\overline{\mathfrak{A}}_2$ přiřazen součet $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}_2$ všech prvků $\bar{a}_1 \in \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ ležících v $\overline{\overline{a}}$. Podle odst. 13. jest součet všech prvků grupy tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ ležících v $\overline{\mathfrak{A}}_2$ polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}_2$ v $\mathfrak{G}$ a $\overline{\mathfrak{G}}_2$ jest grupa tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_2$; mimoto máme $\overline{\mathfrak{A}}_2 = \mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_1$. Odtud plyne *třetí věta o isomorfismu grup*:

Je-li $\mathfrak{A}_1$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$ a $\overline{\mathfrak{A}}_2$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$, pak součet prvků grupy tříd $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ ležících v $\overline{\mathfrak{A}}_2$ jest polem jisté invariantní podgrupy $\mathfrak{A}_2$ v $\mathfrak{G}$ a platí vztah

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1)/(\mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_1) \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_2,$$

při čemž isomorfismus přiřazuje ke každému prvku $\overline{\overline{a}}$ grupy tříd na levé straně součet všech prvků grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ ležících v $\overline{\overline{a}}$.

Cvičení. 1. Realisujte permutacemi abstraktní grupu 4. řádu, jejíž multiplikační tabulka jest napsána jako první na str. 56.!

2. Když jest dána multiplikační tabulka nějaké konečné grupy $\mathfrak{G}$, pak symboly levých translací na $\mathfrak{G}$ obdržíme, když pokaždé opíšeme vodorovné záhlaví a pod ně napíšeme jeden řádek tabulky. Podobně sestavíme ze svislého záhlaví a jednotlivých sloupců symboly pravých translací na $\mathfrak{G}$.

3. Pravidelný osmistěn má celkem 13 os souměrnosti (3 procházejí vždy dvěma protějšími vrcholy, 6 prochází středy vždy dvou protějších hran a 4 středy vždy dvou protějších stěn). Všechna otočení osmistěnu okolo os souměrnosti, která osmistěn převádějí v sebe, tvoří grupu 24. řádu, t. zv. grupu *oktaedrickou* (při tom se otočení okolo téže osy o úhly lišící se o celé násobky 360^0 považují za stejná); označme pro okamžik tuto grupu $\mathfrak{O}$. Každému otočení, které jest prvkem v $\mathfrak{O}$, odpovídá jistá permutace 3 os souměrnosti procházejících vždy dvěma protějšími vrcholy. Když ke každému prvku v $\mathfrak{O}$ přiřadíme příslušnou permutaci, obdržíme deformaci grupy $\mathfrak{O}$ na symetrickou permutační grupu $\mathfrak{S}_3$. Použijte této deformace a dokažte pomocí první a třetí věty o isomorfismu grup, že grupa $\mathfrak{O}$ obsahuje invariantní podgrupy řádů 4, 12!

15. Cyklické grupy.

Libovolná grupa $\mathfrak{G}$ se nazývá *cyklická*, když v ní existuje prvek, t. zv. *základní*, který se vyznačuje tím, že každý prvek v $\mathfrak{G}$ jest jeho mocninou. Když $\mathfrak{G}$ jest cyklická grupa a a její základní prvek, pak grupu