Příklad zákrytu $\overline{G}_2$ a zjemnění $\overline{G}_1$ jest znázorněn na obr. 3. G jest množina všech bodů na obvodě a uvnitř větší kružnice, $\overline{G}_2$ se skládá ze dvou prvků, totiž z množiny bodů na obvodě větší kružnice a uvnitř mezikruží a z množiny bodů na obvodě a uvnitř menší kružnice a konečně $\overline{G}_1$ se skládá z množin bodů ve výsecích mezikruží a menší kružnice, při čemž body na hranicích se počítají vždy jenom k jednomu výseku, jak jest čárkováním vyznačeno.

Cvičení. 1. $\mathrm{s}\overline{A} \sqsubset \overline{A} = \overline{A} = \mathrm{s}\overline{A} \sqcap \overline{A}$.

2. $\mathrm{s}(B \sqsubset \overline{A}) \sqsubset \overline{A} = B \sqsubset \overline{A}$;
$\mathrm{s}(B \sqcap \overline{A}) \sqcap \overline{A} = B \sqcap \overline{A}$;
$\mathrm{s}(B \sqsubset \overline{A}) \sqcap \overline{A} = B \sqsubset \overline{A} = \mathrm{s}(B \sqcap \overline{A}) \sqsubset \overline{A}$.

3. Když $B \sqsubset \overline{A} = B \sqcap \overline{A}$, pak pro každý prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ platí buď $\bar{a} \subset B$ anebo $\bar{a} \cap B = \emptyset$; a naopak.

4. Když $B \supset C$, pak $(C \sqsubset \overline{A}) \sqcap B = C \sqsubset (\overline{A} \sqcap B)$;
$(B \sqsubset \overline{A}) \sqcap C = \overline{A} \sqcap C$.

5. Pro každé tři rozklady $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3$ na G platí: 1. $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_1$; 2. když $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 \geqq \overline{G}_1$, pak $\overline{G}_1 = \overline{G}_2$; 3. když $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 \geqq \overline{G}_3$, pak $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_3$.

6. Když a jen když $\overline{G}_1 \geqq \overline{G}_2$, pak ze vztahů $\bar{a}_1 \in \overline{G}_1, \bar{a}_2 \in \overline{G}_2, \bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \neq \emptyset$ plyne $\bar{a}_1 \supset \bar{a}_2$.

3. O zobrazeních.

V denním životě setkáváme se napořád se zjevy, které souvisí s matematickým pojmem zobrazení. V nejjednodušším případě mají takové zjevy toto schema: Máme dvě neprázdné množiny G, G^* a mezi prvky obou množin nějaký vztah, jímž jest ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^*. Na př. [1] mezi diváky při určitém divadelním představení a mezi vstupenkami pro to představení vydanými jest vztah daný tím, že každý divák jest přítomen na základě právě jedné vstupenky; [2] mezi žáky určité školy a jejími třídami jest vztah daný tím, že každý žák patří právě do jedné třídy; [3] určení počtu n nějakých věcí záleží v tom, že ke každé věci přiřadíme právě jedno přirozené číslo $1, 2, \ldots, n$ a sice obvykle tím způsobem, že vezmeme vždy jednu z nich do rukou a současně ji označíme (znakem anebo jenom v mysli) jedním z čísel $1, 2, \ldots, n$.

Nechť tedy G, G^* značí neprázdné množiny. *Zobrazením* množiny G do G^* rozumíme nějaký vztah mezi prvky obou množin, jímž jest ke každému prvku množiny G přiřazen právě jeden prvek množiny G^*; jinak řečeno, jímž jest každý prvek množiny G *zobrazen* právě na jeden prvek množiny G^*. Zobrazení množiny G do G^* nazývá se také *funkce* na množině G do množiny G^*. Zobrazují-li nějaká zobrazení $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ množiny G do G^* každý prvek v G vždy na stejný prvek v G^*, nazýváme je *rovná* a píšeme $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$; v opačném případě je nazýváme *různá* a píšeme $\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{h}$.

Uvažujme o libovolném zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G do G^*! K libovolnému prvku $a \in G$ jest zobrazením $\boldsymbol{g}$ přiřazen jistý prvek $a^* \in G^*$. Prvek a nazýváme *vzor* prvku a^* a prvek a^* *obraz* prvku a v zobrazení $\boldsymbol{g}$ a píšeme $a^* = \boldsymbol{g}(a)$ anebo jenom $a^* = \boldsymbol{g}a$; někdy také říkáme, že a^* jest *hodnota* funkce $\boldsymbol{g}$ v prvku a. Jiný způsob označení jest $\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$; symbolem $\begin{pmatrix} a & b & \ldots \\ a^* & b^* & \ldots \end{pmatrix}$ pak vyjadřujeme rovnosti $a^* = \boldsymbol{g}a$, $b^* = \boldsymbol{g}b, \ldots$ Když A značí nějakou podmnožinu v G a A^* podmnožinu v G^* skládající se z obrazů v zobrazení $\boldsymbol{g}$ jednotlivých prvků množiny A, píšeme $A^* = \boldsymbol{g}(A)$ anebo jenom $A^* = \boldsymbol{g}A$. Když $A \neq \emptyset$, můžeme ke každému prvku $a \in A$ přiřaditi prvek $\boldsymbol{g}a \in G^*$ a tím obdržíme jisté zobrazení množiny A do G^*; toto zobrazení nazýváme *částečné zobrazení* (*funkce*) určené zobrazením $\boldsymbol{g}$ a označujeme je symbolem $\boldsymbol{g}_A$.

Podle definice zobrazení množiny G do G^* má sice v zobrazení $\boldsymbol{g}$ každý prvek v G jistý obraz v G^*, ale naopak nemá nutně každý prvek v G^* vzoru v G. Když zobrazení $\boldsymbol{g}$ jest takové, že každý prvek v G^* má vzor, pak pravíme, že $\boldsymbol{g}$ jest zobrazení množiny G *na* množinu G^*, anebo že funkce $\boldsymbol{g}$ zobrazuje množinu G *na* množinu G^*. Když $\emptyset \neq A \subset G$, jest $\boldsymbol{g}_A$ zřejmě zobrazení množiny A na množinu $\boldsymbol{g}A$. Výše jsme uvedli tři příklady zobrazení; z nich [2] a [3] jsou příklady zobrazení množiny na množinu: ke každé třídě patří alespoň jeden žák, který jest k ní v onom zobrazení přiřazen a podobně, když máme n věcí, pak při určování jejich počtu byla každým z čísel $1, 2, \ldots, n$ jedna věc označena. Naproti tomu jest [1] příkladem zobrazení množiny na množinu jenom tehdy, když připustíme, že divadlo jest vyprodané; v opačném případě zbyly v pokladně vstupenky, pro které není diváků.

V pojmu zobrazení množiny G do G^* jest ještě další nesouměrnost vzhledem k oběma množinám: V zobrazení $\boldsymbol{g}$ má každý prvek v G právě jeden obraz v G^*, kdežto naopak týž prvek v G^* může míti několik a třeba i nekonečně mnoho vzorů v G. Má-li každý prvek v G^* v zobrazení $\boldsymbol{g}$ nejvýše jeden vzor, pak se $\boldsymbol{g}$ nazývá *prosté* zobrazení množiny G do G^*. Zřejmě jest $\boldsymbol{g}$ prosté zobrazení množiny G na G^* když a jen když má každý prvek v G^* právě jeden vzor. Z hořejších příkladů jest [3] příkladem prostého zobrazení množiny na množinu; [2] jest příkladem prostého zobrazení množiny na množinu jenom (v teoretickém případě) když by každá třída měla jenom jednoho žáka; [1] jest příkladem prostého zobrazení množiny na množinu jenom v tom případě, že divadlo jest vyprodáno a v každé lóži sedí jenom jeden divák (obvykle lóžová vstupenka opravňuje k návštěvě představení několik diváků).

K pojmu prostého zobrazení množiny na množinu připínají se dva důležité pojmy: pojem inversního zobrazení a pojem ekvivalentních množin. Předpokládejme, že $\boldsymbol{g}$ jest prosté zobrazení množiny G na G^*. V tom případě můžeme definovati jisté zobrazení množiny G^* na množinu G, které značíme symbolem $\boldsymbol{g}^{-1}$ a nazýváme *inversní* zobrazení vzhledem k $\boldsymbol{g}$, a sice takto: Ke každému prvku $a^* \in G^*$ jest v zobrazení $\boldsymbol{g}^{-1}$ přiřazen onen prvek $a \in G$, jehož obraz v $\boldsymbol{g}$ jest a^*. Na př. když divadlo jest vyprodané a v každé lóži sedí jenom jeden divák, pak v zobrazení inversním vzhledem k tomu, o němž byla řeč, jest přiřazen ke každé vstupence onen divák, který ji má v rukou. Jest zřejmé, že inversní zobrazení vzhledem k $\boldsymbol{g}^{-1}$ jest opět zobrazení $\boldsymbol{g}$. Když jsou dány neprázdné množiny G, G^*, pak vůbec nemusí existovati zobrazení množiny G *na* G^*, jak jest zřejmé na př. v případě, že G má jeden a G^* dva prvky a tedy ovšem neexistuje vždycky ani prosté zobrazení jedné množiny na druhou. Když mezi množinami G, G^* prosté zobrazení jedné na druhou existuje, pravíme, že množiny G, G^* jsou *ekvivalentní*. Na př. každá množina A skládající se z n (> 0) prvků a množina $\{1, 2, \ldots, n\}$ jsou ekvivalentní, neboť označíme-li prvky množiny A na př. symboly $a_1, a_2, \ldots, a_n$, při čemž libovolně stanovíme, který prvek označíme kterým symbolem, jest tím dáno prosté zobrazení množiny A na množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ a sice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Když jest dáno prosté zobrazení množiny A na množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$, pravíme, že množina A jest *uspořádaná*. *Uspořádanou skupinou prvků* $a_1, \ldots, a_n \in G$ ($n > 1$) rozumíme množinu těchto prvků uspořádanou tím, že prvek a_1 jest zobrazen na číslo 1, atd., prvek a_n na číslo n. Tento pojem závisí tedy na pořádku, v němž jména jednotlivých prvků vyslovujeme anebo vypisujeme. *Opačně uspořádanou skupinou prvků* rozumíme pak uspořádanou skupinu prvků $a_n, \ldots, a_1$.

Nechť nyní $\boldsymbol{g}$ značí libovolné zobrazení množiny G na G^*! Všimli jsme si již, že libovolný prvek $a^* \in G^*$ může míti v zobrazení $\boldsymbol{g}$ několik vzorů v G. Uvažujme o systému $\overline{G}$ všech podmnožin $\bar{a}$ v G, z nichž každá se skládá ze všech vzorů v zobrazení $\boldsymbol{g}$ vždy téhož prvku $a^* \in G^*$! Jednotlivé prvky systému $\overline{G}$ jsou tedy podmnožiny v G skládající se ze všech prvků, které se v $\boldsymbol{g}$ zobrazí vždy na týž prvek množiny G^*. Protože množina G^* obsahuje alespoň jeden prvek a^*, není systém $\overline{G}$ prázdný, neboť obsahuje množinu $\bar{a}$ vzorů prvku a^*; protože $\boldsymbol{g}$ jest zobrazení množiny G *na* G^*, má každý prvek $a^* \in G^*$ alespoň jeden vzor a tedy množina $\bar{a}$ vzorů libovolného prvku $a^* \in G^*$ není prázdná. $\overline{G}$ jest tedy neprázdný systém neprázdných podmnožin v G. Dále jest patrné, že systém $\overline{G}$ jest disjunktní, t. j. každé jeho dva prvky jsou disjunktní, a že pokrývá G, neboť každý prvek $a \in G$ má právě jeden obraz $a^* \in G^*$ a tedy leží právě v jednom prvku $\bar{a} \in \overline{G}$ a sice v množině vzorů prvku a^*. Vychází tedy, že systém $\bar{G}$ všech podmnožin v G, z nichž každá se skládá ze všech vzorů v zobrazení $\boldsymbol{g}$ vždy téhož prvku v G^*, jest rozklad množiny G. O tomto rozkladu pravíme, že *přísluší* anebo *patří* k zobrazení $\boldsymbol{g}$. Když ke každému prvku $\bar{a} \in \bar{G}$ přiřadíme onen prvek $a^* \in G^*$, z jehož vzorů se skládá, obdržíme jisté zobrazení $\bar{\boldsymbol{g}}$ rozkladu $\bar{G}$ na množinu G^* a jest zřejmé, že $\bar{\boldsymbol{g}}$ jest zobrazení prosté. Odtud plyne, že rozklad $\bar{G}$ množiny G, příslušný k zobrazení $\boldsymbol{g}$, a množina G^* jsou ekvivalentní množiny. Všimněme si zejména těchto krajních případů: Když množina G^* se skládá z jediného prvku, pak příslušný rozklad $\bar{G}$ jest $\bar{G}_{\max}$; když $\boldsymbol{g}$ jest zobrazení prosté, pak příslušný rozklad jest $\bar{G}_{\min}$. Na př. když jde o zobrazení, které jsme výše popsali v příkladě [2], skládá se rozklad příslušný k tomu zobrazení z jednotlivých množin žáků, kteří patří vždy do téže třídy.

V hořejších úvahách o zobrazeních nikterak nevylučujeme případ, že množina G^* jest identická s množinou G. Když $G^* = G$, pak mluvíme o zobrazení množiny G do sebe po př. na sebe. Přiřadíme-li na př. ke každému přirozenému číslu číslo o jedničku větší, obdržíme zobrazení množiny všech přirozených čísel do sebe. Nejjednodušší zobrazení libovolné neprázdné množiny G na sebe obdržíme, když ke každému prvku $a \in G$ přiřadíme opět prvek a; to jest t. zv. *identické zobrazení* množiny G a označujeme je symbolem $\boldsymbol{e}$. O prostých zobrazeních konečných množin na sebe budeme podrobněji uvažovati v následujícím odstavci 4.

Pro naše další úvahy jest důležitý pojem skládání zobrazení. Nechť G, H, K značí nějaké neprázdné množiny, nechť $\boldsymbol{g}$ značí nějaké zobrazení množiny G do H a $\boldsymbol{h}$ nějaké zobrazení množiny H do K. Pak jest ke každému prvku $a \in G$ v zobrazení $\boldsymbol{g}$ přiřazen jistý prvek $\boldsymbol{g}a \in H$ a k tomuto prvku $\boldsymbol{g}a$ jest v zobrazení $\boldsymbol{h}$ přiřazen jistý prvek $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$. Když ke každému prvku $a \in G$ přiřadíme prvek $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$, máme jisté zobrazení množiny G do K. Toto zobrazení nazýváme *složené* ze zobrazení $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{h}$ (v tomto pořádku) a označujeme je symbolem $\boldsymbol{hg}$. $\boldsymbol{hg}$ jest tedy zobrazení množiny G do K charakterisované tím, že pro $a \in G$ platí rovnost $(\boldsymbol{hg})a = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a)$. Všimněme si několika zvláštních případů! Když $\boldsymbol{g}$ zobrazuje množinu G *na* H a $\boldsymbol{h}$ množinu H *na* K, pak $\boldsymbol{hg}$ jest zřejmě zobrazení množiny G *na* K. Když $\boldsymbol{g}$ i $\boldsymbol{h}$ jsou zobrazení prostá, pak také zobrazení $\boldsymbol{hg}$ jest prosté, neboť pak dva různé prvky v G mají v zobrazení $\boldsymbol{g}$ dva různé obrazy v H a tyto mají v zobrazení $\boldsymbol{h}$ opět dva různé obrazy v K. Dále jest zřejmé, že je-li množina K identická s G, takže $\boldsymbol{h}$ jest zobrazení množiny H do G, pak jest $\boldsymbol{hg}$ zobrazení množiny G do sebe a v případě, že $\boldsymbol{g}$ zobrazuje množinu G na H a $\boldsymbol{h}$ množinu H na G, jest $\boldsymbol{hg}$ zobrazení množiny G na sebe; je-li zejména zobrazení $\boldsymbol{g}$ prosté a $\boldsymbol{h}$ inversní zobrazení $\boldsymbol{g}^{-1}$, pak jest $\boldsymbol{hg}$ identické zobrazení množiny G. Dále si všimněme, že jsou-li množiny H, K obě identické s G, takže $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{h}$ jsou zobrazení množiny G do sebe, pak jest i $\boldsymbol{hg}$ zobrazení množiny G do sebe, a v případě, že $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$

zobrazují množinu G na sebe, pak také $\boldsymbol{hg}$ zobrazuje množinu G na sebe. Konečně si všimněme, že pro identické zobrazení $\boldsymbol{e}$ množiny G a pro libovolné zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G do sebe platí tyto rovnosti: $\boldsymbol{eg} = \boldsymbol{ge} = \boldsymbol{g}$. Jako příklad složeného zobrazení můžeme uvésti toto: Když $\boldsymbol{g}$ značí zobrazení množiny diváků do množiny vstupenek, které jsme popsali v hořejším příkladě [1] a $\boldsymbol{h}$ značí zobrazení této množiny vstupenek do množiny barev, které jest dáno tím, že ke každé vstupence jest přiřazena její barva, pak složené zobrazení $\boldsymbol{hg}$ přiřazuje ke každému diváku jistou barvu a sice barvu jeho vstupenky.

Uvažujme nyní o třech zobrazeních $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{k}$ značí libovolné zobrazení množiny K do nějaké další množiny L (při čemž opět nevylučujeme případ, že množina L jest identická s některou množinou G, H, K). Důležitá vlastnost skládání zobrazení záleží v tom, že platí rovnost

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg}) = (\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g},$$

kterou označujeme jako *asociativní zákon* o skládání zobrazení. Tato rovnost vyjadřuje, že každý prvek v G má v zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$ týž obraz v L, jako v zobrazení $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$. Abychom dokázali že platí, uvažujme o obrazu libovolného prvku $a \in G$ v zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$! Podle definice zobrazení $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{hg})$ jest obraz prvku a v tomto zobrazení obrazem prvku $(\boldsymbol{hg})a$ v zobrazení $\boldsymbol{k}$ a tedy jej obdržíme, když k prvku $\boldsymbol{g}a \in H$ přiřadíme obraz $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a) \in K$ a k tomuto určíme obraz v $\boldsymbol{k}$. Avšak obraz prvku $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}a)$ v zobrazení $\boldsymbol{k}$ jest podle definice zobrazení $\boldsymbol{kh}$ týž, jako obraz prvku $\boldsymbol{g}a$ v zobrazení $\boldsymbol{kh}$ a podle definice $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$ jest tento současně obrazem prvku a v zobrazení $(\boldsymbol{kh})\boldsymbol{g}$, takže skutečně platí hořejší rovnost. Zobrazení vyskytující se na obou stranách hořejší rovnosti označujeme stručněji $\boldsymbol{khg}$.

Cvičení. 1. Čtenář nechť si uvědomí příklady funkcí, s nimiž se setkal na střední škole; na př. $y = ax + b$, $y = x^2$, atp.

2. Nechť $A \subset G$ a nechť $\boldsymbol{g}[A]$ značí zobrazení množiny G do množiny $\{0, 1\}$, definované takto: Pro $a \in G$ jest $\boldsymbol{g}[A]a = 1$ anebo $= 0$ podle toho, zda a leží anebo neleží v A. Dokažte, že platí tyto vztahy:

$\boldsymbol{g}[A \cap B]a = (\boldsymbol{g}[A]a) \, . \, (\boldsymbol{g}[B]a) =$ nejmenšímu z obou čísel $\boldsymbol{g}[A]a$, $\boldsymbol{g}[B]a$;

$\boldsymbol{g}[A \vee B]a =$ největšímu z obou čísel $\boldsymbol{g}[A]a$, $\boldsymbol{g}[B]a$;

když $A \cap B = \emptyset$, pak jest $\boldsymbol{g}[A \vee B]a = \boldsymbol{g}[A]a + \boldsymbol{g}[B]a$.

3. Dvě konečné neprázdné množiny jsou ekvivalentní, když a jen když mají týž řád.

4. Nechť $\boldsymbol{g}$ značí nějaké zobrazení množiny G na G^* a $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ nějaký rozklad na G. $\{\boldsymbol{g}\bar{a}, \boldsymbol{g}\bar{b}, \ldots\}$ jest rozklad na G^*, když a jen když $\{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ jest zákryt rozkladu příslušného k $\boldsymbol{g}$.

5. Nechť $\boldsymbol{f}[a]$ značí zobrazení přímky na sebe, definované tím, že ke každému bodu na přímce o souřadnici x jest přiřazen bod na přímce

o souřadnici $x' = x + a$, při čemž a značí nějaké reální číslo. Podobně, nechť $g[a]$ značí zobrazení přímky na sebe dané vzorcem $x' = -x + a$. Vzdálenost libovolných dvou bodů na přímce x_1, x_2, t. j. číslo*) $|x_1 - x_2|$ a vzdálenost jejich obrazů v každém zobrazení $f[a]$ a $g[a]$ jsou stejné. V zobrazení $f[a]$ nezobrazí se žádný bod na přímce na sebe, leč když $a = 0$ a v tomto případě máme identické zobrazení přímky na sebe; v zobrazení $g[a]$ se zobrazí na sebe právě jeden bod. Pro skládání zobrazení $f[a]$, $g[a]$ platí tyto vzorce:

$$f[b]\,f[a] = f[a + b]; \quad g[b]\,f[a] = g[-a + b];$$
$$f[b]\,g[a] = g[a + b]; \quad g[b]\,g[a] = f[-a + b].$$

Poznámka. Zobrazení $f[a]$ a $g[a]$ se nazývají *euklidovské pohyby na přímce.*

6. Nechť $f[\alpha; a, b]$ značí zobrazení roviny na sebe definované tím, že ke každému bodu v rovině o souřadnicích x, y jest přiřazen bod v rovině o souřadnicích x', y', při čemž

$$x' = x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \sin\alpha + a,$$
$$y' = -x \,.\, \sin\alpha + y \,.\, \cos\alpha + b,$$

a α; a, b značí nějaká reální čísla. Podobně, nechť $g[\alpha; a, b]$ značí zobrazení roviny na sebe dané vzorci

$$x' = x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \sin\alpha + a,$$
$$y' = x \,.\, \sin\alpha - y \,.\, \cos\alpha + b.$$

Vzdálenost libovolných dvou bodů v rovině x_1, y_1; x_2, y_2, t. j. číslo $|\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}|$ a vzdálenost jejich obrazů v každém zobrazení $f[\alpha; a, b]$ a $g[\alpha; a, b]$ jsou stejné. V zobrazení $f[\alpha; a, b]$, když α jest celý násobek čísla 2π, nezobrazí se na sebe žádný bod v rovině, leč když $a = b = 0$ a v tomto případě máme identické zobrazení roviny na sebe; když α není celý násobek čísla 2π, pak se na sebe zobrazí právě jeden bod v rovině. V zobrazení $g[\alpha; a, b]$ nezobrazí se na sebe žádný bod v rovině, vyjímajíc případ, že mezi čísly α; a, b jest vztah $a \,.\, \cos\frac{1}{2}\alpha + b \,.\, \sin\frac{1}{2}\alpha = 0$; v tomto případě tvoří všechny body v rovině, které se zobrazí na sebe, jistou přímku. Pro skládání zobrazení $f[\alpha; a, b]$, $g[\alpha; a, b]$ platí tyto vzorce:

$$f[\beta; c, d]\,f[\alpha; a, b] =$$
$$= f[\alpha + \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, -a \,.\, \sin\beta + b \,.\, \cos\beta + d],$$
$$g[\beta; c, d]\,f[\alpha; a, b] =$$
$$= g[\alpha + \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, a \,.\, \sin\beta - b \,.\, \cos\beta + d],$$
$$f[\beta; c, d]\,g[\alpha; a, b] =$$
$$= g[\alpha - \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, -a \,.\, \sin\beta + b \,.\, \cos\beta + d],$$

*) Je-li x libovolné reálné číslo, pak $|x|$ značí t. zv. *absolutní hodnotu* čísla x, t. j. nezáporné z obou čísel x, $-x$.

$$\boldsymbol{g}[\beta; c, d]\,\boldsymbol{g}[\alpha; a, b] =$$
$$= \boldsymbol{f}[\alpha - \beta; a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \sin\beta + c, a \,.\, \sin\beta - b \,.\, \cos\beta + d].$$

Poznámka. Zobrazení $\boldsymbol{f}[\alpha; a, b]$ a $\boldsymbol{g}[\alpha; a, b]$ se nazývají *euklidovské pohyby v rovině.*

4. O permutacích.

Permutací množiny G rozumíme prosté zobrazení množiny G na sebe. V tomto odstavci se omezíme na úvahy o permutacích *konečné* množiny. Nechť tedy G značí libovolnou množinu o konečném počtu n (≥ 1) prvků. Z předpokladu, že množina G jest konečná, vyplývá, že každé prosté zobrazení $\boldsymbol{p}$ množiny G do sebe jest její permutace. Neboť pak množina G a její část $\boldsymbol{p}G$, skládající se ze všech obrazů v $\boldsymbol{p}$ jednotlivých prvků množiny G, jsou ekvivalentní množiny a tedy, protože jsou konečné, mají týž počet prvků; odtud plyne $G = \boldsymbol{p}G$ a tato rovnost vyjadřuje, že každý prvek množiny G má v zobrazení $\boldsymbol{p}$ vzor, takže $\boldsymbol{p}$ jest zobrazení množiny G na sebe.

Prvky množiny G si myslíme označeny písmeny $a, b, \ldots, m$. Ke každé permutaci $\boldsymbol{p}$ množiny G můžeme pak jednoznačně přiřaditi symbol tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & m \\ a^* & b^* & \ldots & m^* \end{pmatrix},$$

při čemž $a^*, b^*, \ldots, m^*$ jsou písmena, jimiž jsou označeny prvky $\boldsymbol{p}a$, $\boldsymbol{p}b, \ldots, \boldsymbol{p}m$; pod každým písmenem v prvním řádku stojí tedy v druhém řádku písmeno označující obraz toho prvku v permutaci $\boldsymbol{p}$. Protože $\boldsymbol{p}G = G$, jsou $a^*, b^*, \ldots, m^*$ opět písmena $a, b, \ldots, m$ napsaná v jistém pořádku. Naopak, každým symbolem toho tvaru, v němž $a^*, b^*, \ldots, m^*$ jsou opět písmena $a, b, \ldots, m$ napsaná v jistém pořádku, jest dána jistá permutace množiny G, která každý prvek v prvním řádku zobrazí na prvek stojící pod ním v druhém řádku. Všimněme si, že tutéž permutaci $\boldsymbol{p}$ můžeme podobně vyjádřiti i jinými symboly, z nichž každý obdržíme, když písmena $a, b, \ldots, m$ napíšeme v prvním řádku v nějakém jiném pořádku a pod každé z nich napíšeme totéž písmeno jako dříve. Zejména jest ovšem identické zobrazení množiny G permutace množiny G a nazývá se *identická permutace*; její symbol jest $\begin{pmatrix} a & b & \ldots & m \\ a & b & \ldots & m \end{pmatrix}$ anebo kterýkoli z jiných symbolů, jako na př. $\begin{pmatrix} b & a & \ldots & m \\ b & a & \ldots & m \end{pmatrix}$, atp.

Uvedeme nejprve několik jednoduchých příkladů permutací množin o $n = 1, 2, 3, 4$ prvcích.

$n = 1$. Nechť G značí množinu, která se skládá z jediného bodu a v rovině. V tomto případě existuje ovšem právě jenom jedna permutace množiny G a sice permutace identická $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$.