13. Racionální funkce v maticích

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971. pp. 84--87.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401341

13. RACIONÁLNÍ FUNKCE V MATICÍCH

13.1. Definice. 1. Je-li $\boldsymbol{A}$ libovolná čtvercová matice stupně n, pak pro k celé nezáporné definujeme

a) $\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{A} \ldots \boldsymbol{A}}_{k}$, je-li $k > 0$ (přirozené) ;

b) $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$, je-li $k = 0$.

2. Je-li matice $\boldsymbol{A}$ regulární stupně n, takže existuje inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, pak pro k přirozené klademe

$$\boldsymbol{A}^{-k} = \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \,.\, \boldsymbol{A}^{-1} \ldots \boldsymbol{A}^{-1}}_{k} = (\boldsymbol{A}^{-1})^k \,.$$

Matice $\boldsymbol{A}^m$, m celé, je tzv. *m-tá mocnina matice* $\boldsymbol{A}$.

13.2. Věta o mocninách matice. 1. Je-li $\boldsymbol{A}$ čtvercová matice stupně n, pak pro celá nezáporná čísla p, r platí vztah

$$\boldsymbol{A}^p \,.\, \boldsymbol{A}^r = \boldsymbol{A}^{p+r} \,. \tag{47}$$

2. Je-li matice $\boldsymbol{A}$ regulární, pak vztah (47) platí i v případě, že p, r jsou libovolná celá čísla.

3. Pro libovolné celé číslo k platí

$$\boldsymbol{E}^k = \boldsymbol{E} \,.$$

Důkaz: 1. První tvrzení plyne z asociativního zákona pro násobení matic.

2. Předpokládejme, že oba exponenty p, r jsou záporné. Položme

$$p = -\tilde{p} \,, \quad r = -\tilde{r} \,,$$

kde $\tilde{p} > 0$, $\tilde{r} > 0$. Odtud plyne

$$\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{A}^r = \boldsymbol{A}^{-\tilde{p}}\boldsymbol{A}^{-\tilde{r}} = \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \dots \boldsymbol{A}^{-1}}_{\tilde{p}} \,.\, \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \dots \boldsymbol{A}^{-1}}_{\tilde{r}} = \boldsymbol{A}^{-(\tilde{p}+\tilde{r})} =$$
$$= \boldsymbol{A}^{p+r} \,.$$

Je-li $p < 0$, kdežto $r > 0$, a je-li např. $-p = \tilde{p} < r$, pak je

$$\boldsymbol{A}^p \,.\, \boldsymbol{A}^r = \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \dots \boldsymbol{A}^{-1}}_{\tilde{p}} \underbrace{\boldsymbol{A} \dots \boldsymbol{A}}_{r} = \boldsymbol{A}^{-1} \dots \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\, \boldsymbol{A} \dots \boldsymbol{A} =$$
$$= \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \dots \boldsymbol{A}^{-1}}_{\tilde{p}-1} \underbrace{\boldsymbol{A} \dots \boldsymbol{A}}_{r-1} = \dots = \underbrace{\boldsymbol{A} \dots \boldsymbol{A}}_{r-\tilde{p}} = \boldsymbol{A}^{r-\tilde{p}} = \boldsymbol{A}^{r+p} \,.$$

Analogicky je tomu v ostatních případech.

3. Zřejmé.

13.3. Věta. Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice stupně n, k celé číslo a $x \neq 0$ libovolná konstanta. Existuje-li matice $\boldsymbol{A}^k$, platí vztahy

$$1.\ (x\boldsymbol{A})^k = x^k\boldsymbol{A}^k \,,$$
$$2.\ (\boldsymbol{A}^k)' = (\boldsymbol{A}')^k \,,$$
$$3.\ |\boldsymbol{A}^k| = |\boldsymbol{A}|^k \,.$$

Důkaz je snadný; přenecháváme jej čtenáři jako cvičení.

13.4. Definice polynomu v matici. Nechť

$$g(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$$

značí polynom stupně $m \geqq 0$, přičemž $a_0, a_1, \dots, a_m$ jsou komplexní čísla, z nichž aspoň $a_0 \neq 0$.

Je-li $\boldsymbol{A}$ libovolná čtvercová matice stupně n, pak matici

$$a_0\boldsymbol{A}^m + a_1\boldsymbol{A}^{m-1} + \dots + a_m\boldsymbol{A}^0$$

nazýváme *polynomem v matici* $\boldsymbol{A}$ a značíme ji stručně $g(\boldsymbol{A})$.

Všimněme si, že ke každému polynomu $g(x)$ nad tělesem komplexních čísel a ke každé čtvercové matici $\boldsymbol{A}$ můžeme definovat matici $g(\boldsymbol{A})$ způsobem uvedeným v předešlé definici.

13.5. Věta o polynomech v matici $\boldsymbol{A}$. Nechť $g(\boldsymbol{A})$, $h(\boldsymbol{A})$ jsou polynomy v matici $\boldsymbol{A}$. Pak platí tvrzení

a) $[g(\boldsymbol{A})]' = g(\boldsymbol{A}')$;
b) $g(\boldsymbol{A}) \,.\, h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}) \,.\, g(\boldsymbol{A})$;
c) $g(\boldsymbol{A}) \,.\, [h(\boldsymbol{A})]^{-1} = [h(\boldsymbol{A})]^{-1}\, g(\boldsymbol{A})$, pokud $h(\boldsymbol{A})$ je regulární.

Vidíme, že matice $g(\boldsymbol{A})$, $h(\boldsymbol{A})$ jsou zaměnitelné. Podobně jsou zaměnitelné matice $g(\boldsymbol{A})$, $[h(\boldsymbol{A})]^{-1}$.

Důkaz: a) V prvním případě je

$$\begin{aligned}[g(\boldsymbol{A})]' &= (a_0\boldsymbol{A}^m + a_1\boldsymbol{A}^{m-1} + \ldots + a_m\boldsymbol{A}^0)' = \\ &= (a_0\boldsymbol{A}^m)' + (a_1\boldsymbol{A}^{m-1})' + \ldots + (a_m\boldsymbol{A}^0)' = \\ &= a_0(\boldsymbol{A}')^m + a_1(\boldsymbol{A}')^{m-1} + \ldots + a_m(\boldsymbol{A}')^0 = g(\boldsymbol{A}')\,.\end{aligned}$$

b) Jsou-li

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{A}) &= a_0\boldsymbol{A}^m + \ldots + a_m\boldsymbol{A}^0\,, \\ h(\boldsymbol{A}) &= b_0\boldsymbol{A}^r + \ldots + a_r\boldsymbol{A}^0 \end{aligned}$$

dané polynomy v matici $\boldsymbol{A}$, pak je každá z matic $a_k\boldsymbol{A}^{m-k}$ zaměnitelná s každou maticí $b_j\boldsymbol{A}^{r-j}$, a proto polynom $g(\boldsymbol{A})$ je zaměnitelný s polynomem $h(\boldsymbol{A})$.

c) Protože $g(\boldsymbol{A})$, $h(\boldsymbol{A})$ jsou zaměnitelné, jsou podle věty 6.10.2 zaměnitelné též matice $g(\boldsymbol{A})$, $[h(\boldsymbol{A})]^{-1}$.

13.6. Definice racionální funkce v matici. Jsou-li $g(\boldsymbol{A})$, $h(\boldsymbol{A})$ polynomy v matici $\boldsymbol{A}$, přičemž $h(\boldsymbol{A})$ je regulární, pak matice

$$f(\boldsymbol{A}) = \frac{g(\boldsymbol{A})}{h(\boldsymbol{A})}$$

je definována a nazývá se *racionální funkce v matici* $\boldsymbol{A}$.

O racionálních funkcích v matici platí tato tvrzení:

13.7. Věta o transponování racionální funkce v matici $\boldsymbol{A}$. Platí vztah

$$\left[\frac{g(\boldsymbol{A})}{h(\boldsymbol{A})}\right]' = \frac{g(\boldsymbol{A}')}{h(\boldsymbol{A}')}\,.$$

Důkaz plyne ze vztahů

$$\left[\frac{g(\mathbf{A})}{h(\mathbf{A})}\right]' = [g(\mathbf{A}) \, . \, [h(\mathbf{A})]^{-1}]' = [[h(\mathbf{A})]^{-1}]' \, . \, [g(\mathbf{A})]' =$$

$$= [h(\mathbf{A}')]^{-1} \, g(\mathbf{A}') = \frac{g(\mathbf{A}')}{h(\mathbf{A}')}.$$

Přitom ovšem předpokládáme, že matice $h(\mathbf{A})$ je regulární.

13.8. Věta o zaměnitelnosti racionálních funkcí v maticích. 1. Jsou-li matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ zaměnitelné, je každá racionální funkce $f_1(\mathbf{A})$ v matici $\mathbf{A}$ zaměnitelná s každou racionální funkcí $f_2(\mathbf{B})$ v matici $\mathbf{B}$, tj.

$$f_1(\mathbf{A}) \, . \, f_2(\mathbf{B}) = f_2(\mathbf{B}) \, . \, f_1(\mathbf{A}) \, .$$

2. Důsledek. Každé dvě racionální funkce v téže matici $\mathbf{A}$ jsou zaměnitelné.

Důkaz: Jsou-li matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ zaměnitelné, je $\mathbf{A}^j$ zaměnitelná s maticí $\mathbf{B}^k$ pro všechna celá nezáporná čísla j, k. Je totiž

$$\mathbf{A}^j\mathbf{B}^k = \underbrace{\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}(\mathbf{A}}_{j}\underbrace{\mathbf{B}) \, \mathbf{B} \ldots \mathbf{B}}_{k} = \underbrace{\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}}_{j-1} (\mathbf{B}\mathbf{A}) \underbrace{\mathbf{B} \ldots \mathbf{B}}_{k-1} =$$

$$= \underbrace{\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}}_{j-2} (\mathbf{B}\mathbf{A}) \, \mathbf{A} \, . \, \underbrace{\mathbf{B} \ldots \mathbf{B}}_{k-1} = \ldots = \mathbf{B}\underbrace{\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}}_{j}\underbrace{\mathbf{B} \ldots \mathbf{B}}_{k-1} =$$

$$= \mathbf{B}^2\underbrace{\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}}_{j}\underbrace{\mathbf{B} \ldots \mathbf{B}}_{k-2} = \ldots = \mathbf{B}^k\mathbf{A}^j \, .$$

Proto každý polynom v matici $\mathbf{A}$ je zaměnitelný s každým polynomem v matici $\mathbf{B}$. Jsou-li tedy

$$f_1(\mathbf{A}) = \frac{g_1(\mathbf{A})}{h_1(\mathbf{A})}, \quad f_2(\mathbf{B}) = \frac{g_2(\mathbf{B})}{h_2(\mathbf{B})}$$

libovolné racionální funkce v příslušných maticích, je každý z polynomů $g_1(\mathbf{A})$, $h_1(\mathbf{A})$ zaměnitelný s každým z polynomů $g_2(\mathbf{B})$, $h_2(\mathbf{B})$. Tedy též každá z matic $g_1(\mathbf{A})$, $[h_1(\mathbf{A})]^{-1}$ je zaměnitelná s každou z matic $g_2(\mathbf{B})$, $[h_2(\mathbf{B})]^{-1}$. Proto $g_1(\mathbf{A}) \, [h_1(\mathbf{A})]^{-1}$ je zaměnitelná s maticí $g_2(\mathbf{B}) \, . \, [h_2(\mathbf{B})]^{-1}$.