Otakar Borůvka

# Dílo Matyáše Lercha v theorii funkce gamma

In: Otakar Borůvka (editor): Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analýzy. (Czech). Praha: Nakladatelství československé akademie věd, 1957. pp. 455–501.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401319

[11]) Poznamenejme na tomto místě, že práce [156] vyšla r. 1889 a nikoli 1899, jak je chybně uvedeno ve ŠKRÁŠKOVĚ Seznamu.

[12]) Vzorce (11) a (12) jsou citovány v knize E. T. WHITTAKER - G. N. WATSON, Modern Analysis, Cambridge 1920 (3. vyd.), str. 280.

[13]) Metoda důkazu pochází od RIEMANNA, l. c. sub 4) a LERCH ji ve svých pracích používá častěji, na př. [93].

[14]) Ch. HERMITE et T. STIELTJES, Correspondence str. 280: ... Mais il y a autre chose, je dois vous apprendre que M. Lerch lui-mème a été devancé, il y a quarante années, par M. Lipschitz, et que j'ai été chargé par l'éminent analyste de lui faire savoir qu'il a traité le mêmes sujet et trouvé les mêmes résultats ..." HERMITE pravděpodobně na tuto okolnost upozornil také LERCHA, protože mimo práci [28] je vzorec (11) LERCHEM označován jako LIPSCHITZŮV.

[15]) L. KRONECKER, Zur Theorie der ell. Functionen, *Sitzungsber. der kön. preuss. Akademie* (1883, 1885).

[16]) Příspěvky k teorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 4 (1895), 1—55, č. 115 ŠKRÁŠKOVA Seznamu.

[17]) [144], str. 58.

[18]) O. BORŮVKA, l. c. sub 9).

[19]) [101], str. 13.

[20]) T. J. STIELTJES, Sur le développement du log $\Gamma$ $(a)$, *Journ. de Math.* 5 (1889).

[21]) Pro ilustraci uvádím úvodní větu práce [144]: „Nous allons établir, par la vois du calcul, quelques propositions que nous avons trouvées autrefois dans nos recherches sur les séries Malmsténiennes."

[22]) T. J. STIELTJES, l. c. sub 20).

[23]) A. HURWITZ, l. c. sub 5), str. 95.

[24]) Jedna taková věta je citována v knize E. T. WHITTAKER - G. N. WATSON, Modern Analysis, str. 81.

[25]) Srov. na př. E. T. WHITTAKER - G. N. WATSON, Modern Analysis, str. 265.

[26]) Srov. LERCHOVU poznámku o RIEMANNOVĚ reciprocitě (25) v úvodu k práci [82], str. 1.

[27]) Byla také obsahem jeho nástupní přednášky na Masarykově universitě v Brně.

[28]) A. PRINGSHEIM, *Sitzungsberichte der München. Ak.* 29 (1900).

[29]) P. APPELL, l. c. sub 7).

[30]) Práce obsahuje také některé výsledky z číselné teorie, o nichž se zde nebudeme zmiňovat.

[31]) L. SCHENDEL, Zur Theorie der Fnctionen, *J. f. reine uu. angew. Math.* 84.

[32]) I. BENDIXSON, Sur l'extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss, *Acta Math.* 9 (1885). Viz také závěrečné poznámky LERCHOVY v [64].

OTAKAR BORŮVKA

# DÍLO MATYÁŠE LERCHA V THEORII FUNKCE GAMMA

## A. Seznam Lerchových prací týkajících se theorie funkce gamma

Tento seznam je vypsán z úplného Seznamu prací prof. Matyáše Lercha od JOS. ŠKRÁŠKA (*Čas. pro pěst. mat.*, 78 (1953), 139—148)

[24] Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale Eulérienne de première espèce, *Bull. SM France* 15 (1887), 173—178.

[28] Note sur la fonction $\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2kx\pi i}}{(w+k)^s}$, *Acta* 11 (1887), 19—24.

[34] Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe, *Giorn.* 26 (1888), 39—40.

[41] Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques, *Acta* 12 (1888), 51—55.

[48] O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových, *Věst. KČSN* 1889, 188—222.

[58] O jistých výrazech příbuzných integrálům Eulerovým, *Věst. KČSN* 1890, 137—141.

[65] Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 1 (1891), č. 8, 135—148.
[67] Sur une série, *Jorn de Teix.* 10 (1891), 103—105.
[72] Odvození některých vzorců z počtu integrálního, *Čas.* 21 (1892), 218—231.
[82] Základové theorie Malmsténovských řad, *Rozpr. ČA* 1 (1892), č. 27, 1—70.
[90] Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 23, 1—42.
[91] Studie v oboru Malmsténovských řad a invariantů forem kvadratických, *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 4, 1—12.
[93] Sur une fonction transcendante, *Věst. KČSN* 1893, č. 24, 1—7.
[94] Sur une intégrale définie, *Giorn.* 31 (1893), 171—172.
[96] Sur un point concernant la théorie de la fonction gamma, *Věst. KČSN* 1893, č. 26, 1—8.
[98] Theorie funkce gamma, *Věst. ČA* 2 (1893), 238—247, 305—317, 382—398, 462—472.
[101] Další studie v oboru Malmsténovských řad, *Rozpr. ČA* 3 (1894), č. 28, 1—61.
[104] Poznámka o integrálu Binetově, *Čas.* 23 (1894), 274—277.
[105] Sur la différentiation des séries trigonométriques, *CR* 119 (1894), 725—728.
[115] Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 4 (1895), č. 1, 1—55.
[116] Sur la différentiation d'une classe de séries trigonométriques, *Ann. Ec. norm.* (3), 12 (1895), 351—361.
[118] Sur une relation ayant rapports avec la théorie de la fonction gamma, *Bull. ČA* 2 (1895), 214—218.
[124] Pravidla o derivování jisté kategorie řad trigonometrických, *Věst. ČA* 5 (1896), 71—80.
[125] Různé výsledky v theorii funkce gamma, *Rozpr. ČA* 5 (1896), č. 14, 1—37.
[131] Expressions nouvelles de la constante d'Euler, *Věst. KČSN* 1897, č. 42, 1—5.
[132] Remarque élémentaire sur la constante d'Euler, *Jorn. de Teix* 13 (1897), 129—133.
[134] Sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les intégrales Eulériennes, *Věst. KČSN* 1897, č. 28, 1—11.
[135] Sur quelques formules relatives au nombre des classes, *Bull. Darboux* (2), 21 (1897), 290—304.
[137] Über eine Formel aus der Theorie, der Gammafunktion, *Monatsh.* 8 (1897), 187—192.
[144] Sur quelques propriétés d'une transcendante uniforme, *Compte rendu du quatrième Congrès scientifique international des catholiques tenu à Fribourg (Suisse)*, Fribourg 1898, 58—69.
[149] Nouvelle formule pour la différentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques, *Atti* 35 (1899), 54—59.
[150] O některých integrálech omezených, *Čas.* 28 (1899), 32—36.
[151] O některých konstantách z theorie harmonických řad, *Rozpr. ČA* 8 (1899), č. 35, 1—9.
[154] Poznámky o některých integrálech z theorie funkce gamma, *Rozpr. ČA* 8 (1899), č. 37, 1—5.
[155] Rychle konvergentní vyjádření některých limit, *Rozpr. ČA* 8 (1899), č. 36, 1—9.
[156][1]) Sur certains développements en séries trigonométriques, *Ann. de Toulouse* 3 (1889), C, 1—11.
[160] Uwagi o rózvnaniu Gaussa w teoryi funkcyi gamma, *Prace* 10 (1899), 1—7, 269—270.
[161] Theorie funkce gamma, *Věst. ČA* 8 (1899), 308—324.
[179] Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental, *Journ. de Liouv.* (5), 9 (1903), 377—401.
[185] O liczbie klas form kwadratowych dwójkowych wyróżniku zasadniczym dodatnim, *Prace* 15 (1904), 91—113.
[191] Einige Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion, *Crelles Journ.* 130 (1905), 47—65.
[192] Einiges über den Integrallogarithmus, *Monatsh.* 16 (1905), 125—134.
[195] Über einige Entwicklungen auf dem Gebiete der unvollständigen Eulerschen Integrale zweiter Art, *Crelles Journ.* 128 (1905), 211—221.
[197] Bemerkungen über eine Formel aus der Theorie der unvollständigen Gammafunktion und Integrallogarithmus, *Archiv* (3), 11 (1906), 42—51.
[199] Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers, *Mém. Ac. France* 33 (1906), č. 2, 1—244.
[202] Über die Berechnung der Summen diskontierten Zahlen für eine nach dem Makeham'schen Gesetz fortschreitende Sterbetafel, *Zeitschr.* 53 (1906), 168—176.

[203] Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale, *Monatsh.* 17 (1906), 3—18.

[204] Sur une application de la théorie de la fonction $R(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^s}$, *Ann. do Porto*, 2 (1907), 193—197.

[205] Sur une série qui se présente dans la théorie du logarithme intégral, *Giorn.* 45 (1907), 88—92.

[210] Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale, *Monatsh.* 19 (1908), 119—147.

[217] Poznámky o počtu tříd kvadratických forem, *Věst. ČA* 20 (1911), 120—144.

[233] Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního, *Čas.* 48 (1919), 1—9, 166—188, 312—320; *Čas.* 49 (1920), 31—37. 81—91, 209—214.

[235] Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního, *Čas.* 50 (1921), 89—93, 264—277; *Čas.* 51 (1922), 77—85, 178—188.

## B. Obsah a metoda

Matyáš LERCH vystoupil na veřejnost v oboru funkce gamma svou prací [24] v r. 1887. V tom čase byly již základy theorie funkce gamma položeny pracemi EULERA (1707—1783), LEGENDREA (1752—1833), GAUSSE (1777—1855), BINETA (1786—1856), CAUCHYHO (1789—1857), KUMMERA (1810—1893) a WEIERSTRASSE (1815—1897) a začínalo období systematického budování teorie a prohlubování a rozšiřování nalezených výsledků. Z bezprostředních předchůdců a vrstevníků, s jejichž pracemi se LERCH ve svých úvahách o funkci gamma setkává, jest uvésti: A. HURWITZE, H. KINKELINA, M. KRAUSEA, R. LIPSCHITZE, N. NIELSENA, F. E. PRYMA, J. RAABEA, W. SCHAEFFERA, L. SCHEEFFERA, L. SCHENDELA, O. SCHLÖMILCHA, E. SCHRÖDERA, T. J. STIELTJESE, J. TANNERYHO, CH. J. DE LA VALLÉE POUSSINA a ovšem CH. HERMITEA, s nímž byl po dlouhá léta v čilé vědecké korespondenci.

LERCHOVY spisy o funkci gamma zabírají asi třetinu jeho díla z matematické analysy a vykazují bohatou rozmanitost po všech stránkách tvůrčí práce. Vedle obsáhlých pojednání didaktického rázu, věnovaných systematickému výkladu vlastností funkce gamma nebo jiných útvarů s ní souvisících, nacházíme spisy věnované jednotlivým otázkám nebo souborům otázek vzájemně blízkých nebo vzdálenějších, a též krátké stati nebo poznámky zabývající se drobnými jednotlivostmi. Asi třetina těchto spisů, mezi nimi též zmíněná pojednání didaktického rázu, jsou sepsána česky, ostatní většinou francouzsky a německy.

LERCHŮV přínos k teorii funkce gamma po stránce obsahové je dán objevem mnoha nových vlastností funkce gamma a jiných prvků této teorie (logaritmus funkce gamma, logaritmická derivace, PRYMOVY funkce $P$, $Q$, EULEROVA konstanta, neúplná funkce beta). Objevené vlastnosti se týkají vyjádření zmíněných prvků a jim blízkých útvarů nejrozmanitějšími způsoby (integrály, mocninnými, trigonometrickými nebo jinými řadami, řetězovými zlomky), zpravidla za účelem poznání jejich funkční povahy či možnosti výhodných numerických výpočtů, nebo se týkají souvislostí s jinými teoriemi (malmsténovské řady, eliptické a besselovské funkce). Z těchto výkonů je zvláště vyzvednout objev souvislostí mezi funkcí gamma a malmsténovskými řadami, jejichž teorii LERCH založil a vybudoval, který umožňuje nejkratší a nejpohodlnější cestu do samého středu teorie funkce gamma. Rovněž základního významu jsou LERCHOVY výsledky o PRYMOVĚ funkci $Q$, které představují vrcholné výkony v tomto oboru.

LERCHŮV přínos k teorii funkce gamma po stránce metodické rovněž zasluhuje největší pozornosti. Jeho práce vykazují bohaté zkušenosti v oboru funkcí komplexní proměnné, podložené dřívějšími publikacemi. LERCHOVI přísluší zásluha o původní aplikace klasických metod v konkretních případech a o popisy nových metodických principů značného dosahu (princip nejrychlejší konvergence, zavedení parametru při vyšetřování meromorfních funkcí). Z účinných metodických prostředků je dlužno uvésti vyšetřování podílu studované funkce a další funkce zvolené, určení a využití charakteristických vlastností studovaných funkcí a časté aplikace vyšších diferencí utvořených z čísel dané posloupnosti. Jinak se u LERCHA vyskytují nejrozmanitější metody, které byly již v jeho době běžné u funkcí komplexní proměnné (integrace po křivkách, aplikace CAUCHYOVY věty a věty o residuích a pod.) a v integrálním počtu (substituce, částečná integrace, derivování a integrování integrálů podle parametru, a j.). Řada otázek je studována různými metodami a na různých místech; podle LERCHA přirovnání metod nejvíce přispívá k vypěstění ducha matematického ([98], 393).

Soubor prací týkajících se funkce gamma představuje nejvýznamnější část LERCHOVA díla v klasické analyse a současně důležitou složku světové tvorby. Nelze říci, že by tyto LERCHOVY výkony, přes pokročilý časový odstup, zatím došly náležitého rozšíření ve světové literatuře. Je pravda, že jsou disertace a vědecká díla starší i moderní (GODEFROY[2]), HERMITE-STIELTJES[3]), NIELSEN[4]), WHITTAKER-WATSON[5])), které uvádějí LERCHOVY výsledky o funkci gamma na významných místech, často s nemalou chválou jeho talentu. Avšak rovněž je pravda, že v těchto případech jde o nepatrný zlomek LERCHOVÝCH výkonů a že LERCHŮV význam v teorii funkce gamma unikl i kompetentním odborníkům někdy naprosto. V *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* z let 1899—1916, ve stati o omezených integrálech, v níž je zahrnuta též teorie funkce gamma, z péra G. BRUNELA[6]), je LERCH citován málo, a to na místech spíše podřadných. Poznání LERCHOVA významu v plném rozsahu je věcí budoucnosti. Můžeme-li z některých známek usuzovat na oživení činnosti na tomto úseku klasické analysy, předvídáme rostoucí význam LERCHOVA díla v širokém měřítku v budoucnosti nedaleké.

V tomto článku jsou probrány LERCHOVY výsledky v oboru funkce gamma s naznačením nebo podrobnějším popisem cest k nim vedoucích. Na četných místech LERCHOVA díla se setkáváme s úvahami velmi výhodně založenými a obratně vedenými, které pronikají nikoli k jednomu, nýbrž hned k několika výsledkům příbuzným, někdy ovšem v důsledku druhotných transformací v různých směrech odlišným. V takových případech se kvůli přehlednosti zpravidla omezujeme na popis věcí základních. Jednotlivé LERCHOVY výsledky jsou v tomto článku zpracovány globálně, t. j. se zřetelem k celému dílu a s uvedením souvislostí s jinými výsledky též v ostatních oborech LERCHOVY tvorby. Látka je rozdělena do šesti kapitol, které jsou věnovány jednotlivým úsekům teorie funkce gamma:

I. Vyjádření funkce gamma. Asymptotické a charakteristické vlastnosti. Složitější útvary závislé na funkci gamma.
II. Logaritmus funkce gamma. BINETOVA funkce a její zobecnění.
III. Logaritmická derivace funkce gamma.
IV. Neúplné funkce gamma, integrállogaritmus a Krampova transcendenta $L$.
V. EULEROVA konstanta.
VI. Neúplná funkce beta.

Toto rozdělení látky a způsob zpracování umožňují orientaci v LERCHOVĚ díle v oboru funkce gamma po stránce obsahové a metodické a činí snáze přístupnou jeho bohatou literární tvorbu.

## C. Popis a rozbor výsledků

### I. *Vyjádření funkce gamma. Asymptotické a charakteristické vlastnosti. Složitější útvary závislé na funkci gamma*

1. Klasická teorie vychází od jednoduchých definic funkce gamma EULEROVÝM integrálem nebo nekonečným součinem. Jakožto základní prvek teorie jeví se funkce gamma málo ohebnou ([98], 241; [192], 133), neboť reaguje obtížně a složitě na rozmanité transformace vyplývající z teorie. Příkladem je poměrně nesnadný přechod od nekonečného součinu k integrálnímu vyjádření funkce gamma ([98], 305) nebo k integrálnímu vyjádření PRYMOVY funkce $Q$ ([203], 8). Přístupnějšími prvky jsou logaritmus funkce gamma a logaritmická derivace. Explicitní jednoduchá vyjádření funkce gamma bez použití logaritmu, pokud neplynou bezprostředně z klasických definic, jsou řídká a jsou i v poslední době předmětem zájmu matematiků[7].

Na několika místech u LERCHA (na př. [82], [101], [203]) se setkáváme s formulemi plynoucími z rozmanitých pramenů, které obsahují funkci gamma ve vazbě s jinými funkcemi rozličných druhů a umožňují její explicitní vyjádření pomocí těchto funkcí. Takové vzorce je zajisté třeba považovat spíše za popisy vlastností oněch funkcí než za užitečná vyjádření funkce gamma. Příkladem jsou vzorce ([101], [203]):

$$\lim_{z \to 1} (1 - z)^s \sum_{n=0}^{\infty} (w + n)^{s-1} z^{w+n} = \Gamma(s), \tag{1}$$

$$(0 < w, z < 1; \operatorname{Re} s > 0);$$

$$\lim_{z \to 1} \sqrt[a]{1 - z} \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^a} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), \tag{2}$$

$$(0 < z < 1, a \text{ přirozené});$$

$$\Gamma(s)^2 = \int_0^{\infty} x^{s-1}\, dx \left[2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)}{m!\, m!} x^m - \log x \cdot E(x, 0)\right], \tag{3}$$

$$\left(\operatorname{Re} s > 0;\ \psi(m+1) = \Gamma'(m+1) : m!;\ E(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!\, m!}\right).$$

2. V práci [98] odvozuje LERCH dvě nová asymptotická vyjádření absolutní hodnoty funkce gamma. První vychází snadno z WEIERSTRASSOVA součinu pro funkci gamma a je dáno vzorcem:

$$|\Gamma(\xi + i\eta)| = \varphi(\eta) \cdot \frac{\Gamma(\xi + 1)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sqrt{\frac{\eta\pi}{\operatorname{Sinh} \eta\pi}}, \tag{4}$$

při čemž je $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \neq \eta$ (reální), $1 < \varphi(\eta) < \sqrt{1 + \eta^2}$, a v případech

$\xi = 0{,}1$ má funkce $\varphi$ hodnoty 1, $\sqrt{1 + \eta^2}$. Zvláštní případ vzorce (4) s hodnotou $\xi = 0$ nachází se již u STIELTJESE.[8])

Druhé LERCHOVO asymptotické vyjádření absolutní hodnoty funkce gamma plyne z klasického vzorce GUDERMANNOVA vyjadřujícího logaritmus funkce gamma [II ($a$)] a má tento tvar:

$$|\Gamma(\xi + i\eta)| = \sqrt{2\pi}\,(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{2}\right)} \,.\, e^{-\xi - \eta\,.\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\eta}{\xi}} \cdot (1 + \delta_\eta), \tag{5}$$

při čemž je $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \neq \eta$ (reální), $\delta_\eta \to 0$ pro $|\eta| \to \infty$.

Tento vzorec vyjadřuje povahu funkce $|\Gamma(\xi + i\eta)|$ pro $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ a velká $|\eta|$ přesněji než předcházející.[9])

3. WEIERSTRASS charakterisoval funkci gamma jako řešení diferenční rovnice $F(z + 1) = z \cdot F(z)$ splňující podmínku:[10])

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(z + n)}{(n - 1)!\, n^z} = 1. \tag{$a$}$$

V práci [98] odvodil LERCH novou charakteristickou vlastnost funkce gamma, která je k aplikacím vhodnější než vlastnost ($a$), poněvadž tato „. . klade pro chování se funkce $\Gamma$ proti nekonečně rostoucí proměnné podmínku příliš podrobnou . . . “ ([98], 241). LERCHŮV výsledek je dán touto větou:

*Je-li $F(z)$ jednoznačná analytická funkce bez jiných singularit kromě pólů prvního řádu $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$, hoví hořejší diferenční rovnici a pro $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ a dosti velká $|\eta|$ splňuje nerovnost*

$$|F(\xi + i\eta)| \leqslant A\,|\xi + i\eta|^p \,.\, e^{\alpha\pi|\eta|}, \tag{6}$$

*při čemž $A$, $p$, $\alpha$ jsou libovolné kladné konstanty, $\alpha < \frac{3}{2}$, pak podíl $F(z) : \Gamma(z)$ je konstantní.*

Při důkazu této věty LERCH vychází z toho, že v důsledku platnosti hořejší diferenční rovnice je podíl $f(z) = F(z) : \Gamma(z)$ celá periodická funkce s periodou 1, takže připouští rozvoj tvaru $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \exp(2\nu z\pi i)$, konvergentní pro všechna $z$. Z uvedené nerovnosti a s použitím vzorce (4) vychází, že veličina $|f(z)| \cdot \cdot \exp(-2|\eta|\pi)$ je při dosti velkém $|\eta|$ libovolně malá. Tyto poznatky spolu s klasickým odhadem čísel $|A_\nu|$ vedou k výsledku $A_\nu = 0$ pro $\nu \neq 0$, takže vychází $f(z) = A_0$.

LERCH si velmi cenil tohoto výsledku, jak je patrno z této pasáže jeho textu ([98], 241):

V theorii funkcí důležitou úlohu mají t. zv. charakteristické vlastnosti funkcí, které tyto úplně definují, aniž záležejí v nějakém jich způsobu aproximace. Hledajíc takových vlastností charakteristických, hledí se analysis přibližiti vědám popisným, kteréž individua v přírodě se vyskytující určují na základě jistých znaků. Veliká cena řečených výsledků, jež nejsou dosud nikterak četné, věží nejen v eleganci, jež se tím zavádí do úvah analytických, které jimi rázem pozbývají unavujícího vlivu početních detailů a razí cestu myšlénce na úkor mnohdy zbytečných formalismů, ale cena funkcionalných vlastností charakteristických spočívá hlavně v tom, že ony jsou to především, jež podporují invenci, jak toho theorie funkcí elliptických podává velkolepé doklady. Budeme také v průběhu úvah těchto se snažiti, bychom pro jednotlivé útvary poskytli vlastnosti charakteristické, pokud toho připouští materiál málo ohebný.“

V téže práci LERCH aplikuje svoji větu na odvození GAUSSOVA multiplikačního theorému a na přechod od součinového vyjádření funkce gamma k vyjádření integrálnímu.

Po téměř třiceti letech od uveřejnění této LERCHOVY práce byla zjištěna nová charakteristická vlastnost funkce gamma (logaritmická konvexita) a s jejím použitím byla vyvinuta teorie popisující základní vlastnosti funkce gamma, výborně vyhovující účelům didaktickým.[11])

[4]. Práce [233] obsahuje rozvoj funkce $v^{-a}\,\Gamma(a+v):\Gamma(v)$ v nekonečnou řadu, jehož je možno použít k numerickým výpočtům hodnot $\Gamma(a)$ ($\operatorname{Re} a > 0$, $v > 2$).

V pracích [65], [90], [101] zabývá se LERCH útvary definovanými nekonečnými, většinou trigonometrickými řadami nebo nevlastními integrály, jejichž členy nebo integrované funkce závisí na několika parametrech a jsou dány hodnotami funkce gamma. Zmíněné útvary jsou velmi pozoruhodné svou strukturou a vlastnostmi; většinou úzce souvisí s eliptickými funkcemi a v jednom případě mají překvapující numerické použití v pojistné matematice.

V práci [65] odvozuje LERCH zejména tyto vzorce ($0 < t$):

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti)\, e^{2nu\pi i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)} : \left[1 + e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right]^{a}, \tag{7}$$

$$\left(0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a;\ -\frac{t}{2} < \operatorname{Im} u < \frac{t}{2}\right);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(s+nti)}{\Gamma(a+s+nti)}\, e^{2nu\pi i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2s\pi}{t}(n+u)} \left[1 - e^{-\frac{2\pi}{t}(n+u)}\right]^{a-1}, \tag{8}$$

$$(0 < \operatorname{Re} s,\ \operatorname{Re} a;\ 0 < u \leq 1 \text{ nebo } 0 < \operatorname{Re} s,\ 1 < \operatorname{Re} a,\ u = 0);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(s+nti)\, e^{2nu\pi i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\exp \frac{2\pi}{t}(n-u)}\, e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)} \tag{9}$$

$$\left(0 < \operatorname{Re} s;\ -\frac{t}{4} < \operatorname{Im} u < \frac{t}{4}\right).$$

Vychází od integrálních vyjádření funkcí $\Gamma(s)\,\Gamma(a-s):\Gamma(a)$, $\Gamma(s)\Gamma(a): :\Gamma(s+a)$, $\Gamma(s)$ v číslech $s + nti$ klasickými vzorci, násobí vždy příslušnou rovnici funkcí $\exp(2nu\pi i)$ a provede součtovou operaci pro $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Vzorce (7), (8) vedou pro celočíselné hodnoty parametru $a$ na vztahy mezi eliptickými funkcemi. Vzorec (7) obsahuje na př. ($a = 1$) JACOBIOVO vyjádření funkce $\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3.\ \vartheta_0(u+s):\vartheta_0(u)\,\vartheta_1(s)$ trigonometrickou řadou, jehož přímé odvození nacházíme již v práci [41]; po dalších transformacích plyne ze vzorce (7) několik dalších důsledků, zejména ($a = 1$) integrální vyjádření nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1:[1 + \exp 2\pi t\,(n-u)]$ a zvláště ($u = i : 2t$) LAMBERTOVY řady eliptickými funkcemi. Vzorec (9) má neočekávané použití v pojistné matematice při výpočtu součtů diskontovaných čísel ([202]).

V průběhu úvah týkajících se hořejších výsledků odvozuje LERCH též vzorce vyjadřující hodnoty integrálů některých útvarů závislých na funkci gamma; na př.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s + xi)\,\Gamma(a - s - x\,i)\,e^{vxi}\,dx = 2\pi\Gamma(a)\,.\,e^{-vs} : (1 + e^{-v})^{a} \tag{10}$$

$$(0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a;\ -\pi < \operatorname{Im} v < \pi);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s + xi)\,e^{vxi}\,dx = 2\pi \cdot e^{-\exp(-v)} \cdot e^{-sv}, \tag{11}$$

$$\left(0 < \operatorname{Re} s;\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} v < \frac{\pi}{2}\right).$$

Podobnou metodou jako v práci [65] postupuje LERCH ve spise [101] při odvození vzorců:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + c + m)}{m!} \frac{e^{2mv\pi i}}{(a + m)^{s}} = e^{(a-b)(1-2v)\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(c + b + ix) \times$$

$$\times \Gamma(a - b - ix)\,e^{(1-2v)x\pi} \frac{dx}{(b + ix)^{s}} \tag{12}$$

$$(0 < b < \operatorname{Re} a;\quad 0 < \operatorname{Re} c;\quad 0 < \operatorname{Re} v < 1;\quad 0 \leqslant \operatorname{Im} v),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + c + m)}{m!} \frac{e^{2mv\pi i}}{[(a + m)^{2} + u^{2}]^{\frac{s}{2}}} = \tag{13}$$

$$= e^{(a-b)(1-2v)\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(c + b + ix)\,\Gamma(a - b - ix)\,e^{(1-2v)x\pi}\,dx}{[(b + ix)^{2} + u^{2}]^{\frac{s}{2}}};$$

vzorec (13) platí za týchž předpokladů jako (12) a za další podmínky: $-b < \operatorname{Im} u < b$.

LERCH vychází od integrálního vyjádření funkce $\Gamma(u)\,\Gamma(v) : \Gamma(u + v)$ v číslech $u = b + c + ix$, $v = a - b - ix$ klasickým vzorcem, násobí příslušnou rovnici funkcí $(b + ix)^{-s}$ a integruje v mezích $-\infty$, $+\infty$; vzniklou relaci transformuje několika dalšími operacemi na tvar (12). Vzorec (13) plyne z předcházejícího tím, že se $s$ nahradí číslem $s + 2k$, vzniklá rovnice se násobí funkcí $\binom{-\frac{1}{2}}{k} u^{2k}$ a provede se součtová operace pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

Vzorec (13) je východiskem k řadě dalších výsledků, zejména pokud jde o vyjádření integrálů

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{\pm cxi}}{(u^{2} + x^{2})^{\frac{s}{2}}}\,dx$$

a koeficientů $A_n$ trigonometrického rozvoje

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2mv\pi i}}{[(a+m)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2a\pi i(n-v)}$$

besselovskými funkcemi.

V práci [90] se LERCH zabývá funkcí

$$F(a, b, c; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(a+n) [\Gamma(b-n\tau) \Gamma(c-b+n\tau) -$$
$$- \Gamma(b+a\tau+n\tau) \Gamma(c-b-a\tau-n\tau)],$$

jejíž parametry $a$, $b$, $c$; $\tau$ jsou tak voleny, že všechny póly funkce $f(s) = \Gamma(s) \Gamma(a-s) \Gamma(b+\tau s) \Gamma(c-b-\tau s)$ jsou jednoduché a $\operatorname{Im} \tau \neq 0$. Funkce $F$ splňuje relaci

$$F(a, b, c; \tau) = -\frac{1}{\tau} F\left(c, a+\frac{b}{\tau}, a; -\frac{1}{\tau}\right). \tag{14}$$

V případě $a = 1$ je tato relace důsledkem vzorce (7) s hodnotou parametru $u = \frac{1}{2}$.

LERCH dochází k formuli (14) aplikací věty o residuích na integrál $\int f(s)\, ds$ podél uzavřené křivky, která je nekonečně vzdálená.

## II. *Logaritmus funkce gamma, Binetova funkce a její zobecnění*

5. Logaritmus funkce gamma a BINETOVA funkce $\tilde{\omega}$ spolu souvisí klasickým vztahem GUDERMANNOVÝM[12])

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \log\sqrt{2\pi} + \tilde{\omega}(a). \tag{a}$$

Podle STIELTJESE je funkce $\tilde{\omega}$ jednoznačná v celé komplexní rovině opatřené řezem $(-\infty, 0]$.[13])

6. Hlavní LERCHŮV přínos k teorii těchto funkcí spočívá na objevu vztahů, které je poutají k malmsténovským řadám, jejichž teorii LERCH založil a vybudoval ([82], [91], [101]). Tyto souvislosti se uplatňují na četných místech obou teorií. S hlediska teorie funkce gamma jsou nejvýznamnějšími poznatky, které se týkají povahy funkce $R(w, s)$, určené řadou

$$R(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1),$$

v okolí bodů $s = 1$ a $s = 0$. V tomto směru platí, že $R(w, s) - 1 : (s-1)$ je celá transcendentní funkce proměnné $s$ a že mocninné rozvoje funkce $R(w, s)$ v okolí bodů $s = 1$ a $s = 0$ jsou tvaru:

$$R(w, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \ldots, \tag{1}$$

$$R(w, s) = \left(\frac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \ldots \tag{2}$$

Tyto vzorce obsahují množství výsledků známých z teorie eulerovských funkcí a ukazují, že teorie malmsténovských řad otevřela nejpřímější a současně nejjednodušší cestu k teorii funkce gamma ([144], 58).

Z rozvoje (2) máme zejména vzorec:

$$\log \Gamma(w) = \log \sqrt{2\pi} + D_{s=0} R(w, s), \tag{3}$$

„který pro $\log \Gamma(w)$ poskytne tolik tvarů, kolik výrazů platných v okolí místa $s = 0$ máme pro funkci $R(w, s)$." ([101], 13).

Vzorec

$$\Gamma(w) = \exp D_{s=0} [R(w, s) - \zeta(s)], \tag{4}$$

ekvivalentní se vzorcem (3), označuje se v novější literatuře jako LERCHOVA definice funkce gamma.[14])

V LERCHOVÝCH spisech se s rozvoji (1), (2) setkáváme na četných místech ([101], [125], [134], [144], [155], [160], [179], [185], [217]) jako s předměty studia nebo za účelem aplikací v oboru funkce gamma nebo v otázkách o počtu tříd kvadratických forem. LERCH k těmto rozvojům došel v rámci široce založených úvah o malmsténovských řadách bez znalosti toho, že oba rozvoje byly jednotlivě uveřejněny mnoho let před ním H. KINKELINEM a E. SCHRÖDEREM ([155], 7).

LERCH hořejší výsledky rozšířil ([101]) na funkci $R(a, u, s)$ určenou řadou

$$R(a, u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+n)^2 + u^2]^s}$$

$$\left(0 < \operatorname{Re} a < 1;\ 0 < u;\ \frac{1}{2} < \operatorname{Re} s\right),$$

vyšetřením její povahy v okolí bodů $s = 1$ a $s = 0$. V tomto případě je rozdíl $R(a, u, s) - \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} : 2\, \Gamma(s)\, u^{2s-1}$ celou transcendentní funkcí proměnné $s$ a mocninné rozvoje funkce $R(a, u, s)$ v okolí bodů $s = 1$ a $s = 0$ jsou tvaru

$$R(a, u, s) = \frac{1}{2ui} \left[\frac{\Gamma'(a+ui)}{\Gamma(a+ui)} - \frac{\Gamma'(a-ui)}{\Gamma(a-ui)}\right] + A_1 (s-1) + {}$$

$$+ A_2 (s-1)^2 + \ldots, \tag{5}$$

$$R(a, u, s) = \left(\frac{1}{2} - a\right) + \log \frac{\Gamma(a+ui) \, . \, \Gamma(a-ui)}{2\pi} \cdot s + B_2 s^2 + \ldots \tag{6}$$

Z rozvoje (6) vychází vztah:

$$\log \Gamma(a+ui)\, \Gamma(a-ui) = \log 2\pi + D_{s=0} R(a, u, s). \tag{7}$$

7. Pomocí formule (3) LERCH odvodil zejména vzorec ([101]):[15])

$$\log \Gamma(u+v) - u \, . \log u + u + \left(v - \frac{1}{2}\right) \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \frac{\sin v\pi}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left[\frac{\log(z - 2u\pi i)}{e^{z+2v\pi i} - 1} - \frac{\log(z + 2u\pi i)}{e^{z-2v\pi i} - 1}\right] dz \tag{8}$$

$$(0 < \operatorname{Re} u,\ 0 < \operatorname{Re} v < 1),$$

a jeho obměny

$$\log \Gamma(u + v) - \left(u + v - \frac{1}{2}\right)\log u + u - \log \sqrt{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left[\frac{\log(1 - e^{-z+2v\pi i})}{z + 2u\pi i} - \frac{\log(1 - e^{-z-2v\pi i})}{z - 2u\pi i}\right] dz \tag{9}$$

a

$$\log \Gamma(u + v)\cdot\Gamma(u - v) + \log(u - v) - 2u\cdot\log u + 2u + \log\frac{\sin v\pi}{\pi} =$$

$$= -4\int_0^\infty \frac{e^{2x\pi}\cos 2v\pi - 1}{e^{4x\pi} - 2e^{2x\pi}\cos 2v\pi + 1}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{x}\,dx, \tag{10}$$

z nichž plyne řada důsledků nových i starších.[16]) Dále z rovnice (8) máme $\left(v = \frac{1}{2}\right)$:

$$\log \Gamma\left(u + \frac{1}{2}\right) - u\cdot\log u + u - \frac{1}{2}\log\pi = \int_0^\infty \frac{2\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{x}}{e^{2x\pi} + 1}\,dx. \tag{11}$$

Jedním z důsledků vzorce (8) je (STIELTJESOVA)[17]) formule:

$$\log \Gamma(u + v).\Gamma(u + 1 - v) - 2u.\log u + 2u - 2.\log\sqrt{2\pi} =$$

$$= -\frac{u}{\pi}\int_0^\infty \log(1 - 2e^{-2x\pi}.\cos 2v\pi + e^{-4x\pi})\,\frac{dx}{u^2 + x^2}.$$

Později ([154]) LERCH použil tohoto výsledku k výpočtu integrálu

$$\int_0^\infty e^{-au}\log\Gamma(u + v)\,\Gamma(u + 1 - v)\,du = -2\,\frac{C + \log a}{a^2} + \frac{\log 2\pi}{a} +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty \frac{4\cos 2nv\pi}{a^2 + 4n^2\pi^2}\log\frac{2n\pi}{a} + a\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2nv\pi}{n(a^2 + 4n^2\pi^2)}\ (C = -\Gamma'(1);\ a > 0), \tag{12}$$

metodami integrálního počtu, zejména rozvojem logaritmu vpravo ve Fourierovu řadu.

Poznamenejme, že v této práci [154] LERCH odvodil též jiné vyjádření onoho integrálu, na základě CAUCHYOVA vzorce 8 (b) a porovnáním obou výsledků dospěl k rovnici:

$$\int_0^\infty \left[\frac{e^{(1-v)t} + e^{vt}}{e^t - 1}\cdot\frac{1}{a + t} - \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{e^t - 1} + \frac{2 - a}{a^2}e^{-t}\right]\frac{dt}{t} = -2\,\frac{C + \log a}{a^2} +$$

$$+\frac{\log 2\pi}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos 2n v\pi}{a^2+4n^2\pi^2}\log\frac{2n\pi}{a}+a\,.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n v\pi}{n\,(a^2+4n^2\pi^2)},\qquad(13)$$

a její integrací podle $v$ v mezích 0,1 nebo derivováním podle $v$, k dalším vztahům, zejména k novému vyjádření EULEROVY konstanty $C$ [srov. V (9)].

Vedle uvedených vyjádření funkce $\log \Gamma\,(u)$ pomocí integrálů odvodil LERCH, opíraje se o vzorec (3), též její vyjádření pomocí nekonečné řady ([125]):

$$\log \Gamma\,(u)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{u-1}{\nu}\,(\triangle^{\nu-1}\log x)_{x=1},\ (\mathrm{Re}\ u>1);\qquad(14)$$

diference vpravo jsou počítány z členů posloupnosti $\log x$, $\log\,(x+1)$, $\log\,(x+2)$, ... LERCH přitom vychází ze vzorce:

$$\Gamma\,(s)\,[\zeta\,(s)-R\,(u,s)]=\int_0^1\frac{1-x^{u-1}}{1-x}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{s-1}dx$$

$$(\mathrm{Re}\ s>0),$$

načež integrál vpravo transformuje substitucí $x'=1-x$ a rozvojem funkce $1-(1-x)^{u-1}:x$ v maclaurinovskou řadu.

Konečně uveďme LERCHŮV vzorec, odvozený s použitím vztahu (7) ([101]):

$$\log\frac{\Gamma\,(a+ui)\,.\,\Gamma\,(a-ui)\,.\,\sqrt{e^{2u\pi}+e^{-2u\pi}-2\,.\cos 2a\pi}}{2\pi}$$

$$=-\sin 2a\pi\int_0^{\infty}\frac{\log|x^2-u^2|}{\mathrm{Cosh}\,2x\pi-\cos 2a\pi}\,dx\qquad(15)$$

$$(0<a<1).$$

8. Jiného druhu jsou LERCHOVA vyjádření funkce $\log \Gamma\,(u)$ z CAUCHYOVA integrálu

$$\log \Gamma\,(u)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ux}-e^{x}}{e^{x}-1}-(u-1)\,e^{x}\right]\frac{dx}{x}\qquad(\mathrm{b})$$

vhodnou změnou integrační cesty. Tímto způsobem došel LERCH ku dvěma vzorcům vyjadřujícím funkci $\log \Gamma\,(u)$ pomocí hlavních hodnot jistých integrálů. Jednodušším z nich je vzorec ([125]):

$$\log\left[\Gamma\,(u)\sqrt{\frac{\sin u\pi}{\pi}}\right]=hl\,.\,h\,.\int_0^{\infty}\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)\cos x-\frac{\sin\left(u-\frac{1}{2}\right)x}{2\cdot\sin\frac{1}{2}x}\right]\frac{dx}{x}\qquad(16)$$

$$(0<u<1).$$

9. Pozoruhodnou jednotlivostí v okruhu těchto úvah jsou LERCHOVY způsoby odvození RAABEOVA vzorce:

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+u)\,dx = u \,.\log u - u + \log \sqrt{2\pi}, \quad (u>0) \tag{c}$$

jež bylo četnými autory provedeno již před LERCHEM, po prvé RAABEM v letech 1843/44.[18]) LERCH odvodil vzorec (c) jednak transformací integrálu substitucí $x' = x + u$ a derivováním podle $u$ ([34], [48], [98]) a jednak na základě formule (2) ([160]). LERCHŮV důkaz vzorce (c) prvním způsobem našel pro svoji jednoduchost rychlé rozšíření: HERMITE jej přejal do svých přednášek konaných na Sorbonně,[19]) byl přeložen do portugalštiny[20]) a přešel do učebnice F. G. TEXEIRY o integrálním počtu.[21]) Částečně byl též uveden v 1. vydání PETROVA integrálního počtu z r. 1915, avšak ve 2. vydání z r. 1931 byl příslušný odstavec vypuštěn. Poznamenejme, že ve své práci [48] LERCH odvodil stejnou metodou (transformací integrálu a derivováním podle $u$) toto rozšíření RAABEOVA vzorce:

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+u) \cos 2m\pi(x+u)\,dx = \frac{1}{2m\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \sin 2mu\pi \,.\log u - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2mu\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx\right) (0 < m \text{ celé}, u > 0); \tag{17}$$

později, v práci [233], určil analogický integrál v němž funkce $\cos 2m\pi(x+u)$ je nahražena funkcí $\sin 2m\pi(x+u)$.

10. LERCHŮV přínos k theorii BINETOVY funkce $\tilde{\omega}$ jsou především její nová vyjádření ve tvaru

$$\tilde{\omega}(u) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma'(u+x)}{\Gamma(u+x)}\,dx \tag{18}$$ [22])

a

$$\tilde{\omega}(u) = \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)} R(u, \nu) \; (\operatorname{Re} u > 1 \text{ nebo } |\operatorname{Im} u| > 1). \tag{19}$$

První plyne snadno z RAABEOVA vzorce transformací $x = x' + \frac{1}{2}$ integrálu a částečnou integrací ([96], [98]), kdežto druhé hlubší analysou vlastností funkce $R(w, s)$ a s použitím RAABEOVA vzorce ([144]).

Dalším LERCHOVÝM přínosem k theorii BINETOVY funkce je vzorec ([94]), [104]):

$$\tilde{\omega}(u) + \tilde{\omega}(v) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log\left(1 - e^{2\pi(\alpha x - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta})}\right) \tag{20}$$

a jeho obměna:

$$\left(u - \frac{1}{2}\right) \log u + \left(v - \frac{1}{2}\right) \log v - 2\alpha - \log \Gamma(u) \,.\Gamma(v) + \log 2\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log\left(1 - e^{2\pi(\alpha x - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta})}\right), \tag{21}$$

při čemž značí $u > 0$, $v > 0$ kořeny kvadratické rovnice $\omega^2 - 2\alpha\omega + \beta = 0$.
LERCH došel k těmto výsledkům na základě klasického vztahu

$$\tilde{\omega}(u) = \int_0^\infty \frac{2 \,.\, \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{u}}{e^{2x\pi} - 1} dx \quad (\operatorname{Re} u > 0)$$

a s použitím adičního theorému pro funkci arc tg.

Ze vzorce (20) plyne (pro $u = v > 0$) nové vyjádření funkce $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega}(u) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log\left(1 - e^{2u\pi(x - \sqrt{x^2+1})}\right). \tag{22}$$

Podobným postupem, vycházeje ze vztahů (11) a (10), našel LERCH několik dalších vzorců, které se podobají rovnici (21) ([101]).

11. Pozoruhodné jsou LERCHOVY výsledky týkající se zobecněné BINETOVY funkce. Přihlížeje ke klasickému vzorci

$$\tilde{\omega}(u) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ux} \,.\, \frac{dx}{x},$$

definuje LERCH obecnější funkce $\tilde{\omega}(u, s)$ a $\tilde{\omega}_p(u, s)$ formulemi ([101]):

$$\tilde{\omega}(u, s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ux} \,.\, x^{s-1} dx \tag{23}$$

$$(\operatorname{Re} u > 0; \ \operatorname{Re} s > -1),$$

$$\tilde{\omega}_p(u, s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} B_\nu \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu)!}\right) \times$$

$$\times\, e^{-ux} \,.\, x^{s-1} dx \tag{24}$$

$$(\operatorname{Re} u > 0; \ \operatorname{Re} s > -2p - 1);$$

přitom značí $B_1, B_2, \ldots$ bernoulliská čísla, definovaná mocninným rozvojem

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} B_\nu \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu)!}.$$

Pro tyto funkce platí vztahy (pro všechny hodnoty $s$, které jsou ve společné části existenčních oborů obou stran):

$$\tilde{\omega}(u, s) = \Gamma(s) R(u, s) - \frac{\Gamma(s-1)}{u^{s-1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(s)}{u^s}, \tag{25}$$

$$\tilde{\omega}_p(u, s) = \Gamma(s) R(u, s) - \frac{\Gamma(s-1)}{u^{s-1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(s)}{u^s} - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(s + 2\nu - 1)}{u^{s+2\nu-1}}, \tag{26}$$

a dále rozvoje v nekonečné řady, zobecňující klasickou řadu GUDERMANNOVU,

$$\tilde{\omega}(u, s) = \Gamma(s-1) \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \left( \frac{u + \nu + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s}{(u + \nu + 1)^s} - \frac{u + \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} s}{(u + \nu)^s} \right), \tag{27}$$

$$(\mathrm{Re}\, s > -1),$$

$$\tilde{\omega}_p(u, s) = \Gamma(s-1) \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \left( \frac{\left(u + \nu + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s\right)(u + \nu + 1)^{2p} + \varphi_p(u + \nu + 1, s)}{(u + \nu + 1)^{s+2p}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(u + \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} s\right)(u + \nu)^{2p} + \varphi_p(u + \nu, s)}{(u + \nu)^{s+2p}} \right), \tag{28}$$

$$(\mathrm{Re}\, s > -2p - 1);$$

přitom značí:

$$\varphi_p(x, s) = \sum_{\mu=1}^{p}{}' (-1)^{\mu-1} B_\mu \binom{s + 2\mu - 2}{2\mu} x^{2p-2\mu+1}.$$

Vzorec (26) jest obdobou STIRLINGOVA vzorce pro funkci $R(u, s)$; může se psáti ve tvaru:

$$R(u, s) = \frac{1}{(s-1)\, u^{s-1}} + \frac{1}{2u^s} + \sum_{\nu=1}^{p}{}' (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} \binom{s + 2\nu - 2}{2\nu - 1} \frac{1}{u^{s+2\nu-1}} +$$

$$+ \frac{\tilde{\omega}_p(u, s)}{\Gamma(s)}. \tag{29}$$

Předcházející výsledky LERCH zobecnil v tuto větu ([101], 27):

*Budiž $f(x)$ funkce reální, pro niž existuje integrál*

$$F(u) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-ux}\, dx.$$

*Této funkci $f(x)$ nechť odpovídá řada*

$$c_0 x^{\alpha_0} + c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + \ldots, \quad (\alpha_\nu > -1),$$

*konvergentní nebo divergentní, mající tu vlastnost, že rozdíl*

$$f(x) - \sum_{\nu=0}^{p-1}{}' c_\nu x^{\alpha_\nu}$$

*jest při všech kladných $x$ ve své absolutní hodnotě menší než první vynechaný člen $c_p x^{\alpha_p}$.*

*Pak platí semikonvergentní rozvoj:*

$$F(u) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{c_\nu \,.\, \Gamma(\alpha_\nu + 1)}{u^{1+\alpha_\nu}} + R_p,$$

*v němž zbytek $R_p$ jest absolutně menší než první vynechaný člen* $\dfrac{c_p\, \Gamma(\alpha_p + 1)}{u^{1+\alpha_p}}$.

Aplikací této věty na funkci

$$f(x) = \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) x^{s-1}$$

vychází v případě $s = 0$ vzorec STIRLINGŮV ([101], [204]) a v případě $s > 0$ vzorec (29) s dodatkem, že zbytek $R_p = \tilde{\omega}_p(u, s) : \Gamma(s)$ je absolutně menší než první vynechaný člen $\dfrac{B_{p+1}}{2p+2}\dbinom{s+2p}{2p+1}\dfrac{1}{u^{s+2p+1}}$ $(u > 0)$ ([101]).

Poznamenejme, že v práci [115], v rámci složitých úvah o funkci

$$P(u; v_1, v_2, \ldots, v_p; c_1, c_2, \ldots, c_p; s) = \sum_{m_1, m_2, \ldots m_p} \frac{e^{2\pi i (m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_p v_p)}}{(u + c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_p m_p)^s}$$

$$(m_1, m_2, \ldots, m_p = 0, 1, 2, \ldots)$$

(v. též [93]), zabývá se LERCH funkcemi

$$R(u \,|\, c_1, c_2; s) = \sum_{m_1, m_2}^{(0 \ldots \infty)} \frac{1}{(u + c_1 m_1 + c_2 m_2)^s},$$

$$\tilde{\omega}(u \,|\, c_1, c_2; s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1 - e^{-c_1 x})(1 - e^{-c_2 x})} - \frac{1}{c_1 c_2 x^2} - \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2 x} - \right.$$
$$\left. - \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12 c_1 c_2}\right) e^{-ux} \,.\, x^{s-1}\, dx$$

$$(\operatorname{Re} u, c_1, c_2 > 0;\ \operatorname{Re} s > 2)$$

a odvozuje pro ně výsledek, který jest obdobný vzorcům (25), (26):

$$\tilde{\omega}(u \,|\, c_1, c_2; s) = \Gamma(s)\, R(u \,|\, c_1, c_2; s) - \frac{\Gamma(s-2)}{c_1 c_2 u^{s-2}} - \frac{(c_1 + c_2)\, \Gamma(s-1)}{2 \,.\, c_1 c_2 u^{s-1}} -$$
$$- \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12 c_1 c_2} \cdot \frac{\Gamma(s)}{u^s}. \tag{30}$$

### III. *Logaritmická derivace funkce gamma.*

12. LERCHOVY výsledky týkající se logaritmické derivace $(\psi(u) \equiv)\, \Gamma'(u) : \Gamma(u)$ funkce $\Gamma(u)$ pramení z převážné části rovněž z theorie malmsténovských řad a řadí se k jeho nejznamenitějším výkonům v analyse. Jejich zdrojem v teorii malmsténovských řad jest jednak formule II (1) a její přímý důsledek

$$\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} = [\zeta(s) - R(w, s)]_{s=1} + \Gamma'(1), \tag{1}$$

který jest obdobou vzorce II (3) pro funkci $\Gamma'(w) : \Gamma(w)$, a jednak LERCHOVA formule[23]) ([101], [118]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi i(v+n)}}{v+n} = -\log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \frac{\pi i}{2} - \log x - $$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{x+k}{k} \tag{2}$$
$$(0 < x < 1;\ 0 < v < 1),$$

představující limitní případ staršího vztahu LIPSCHITZOVA.[24])

13. V pracích [67], [72] vychází LERCH z klasického vzorce

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx \qquad (a > 0, b > 0),$$

který převádí substitucí $x = z \,.\, \exp(i\varphi)$ ($\varphi$ reální) a dalšími elementárními operacemi na tvar

$$B(a, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a-b}{\nu} \left( \frac{e^{(a+\nu)i\varphi}}{a+\nu} + \frac{e^{-(b+\nu)i\varphi}}{b+\nu} \right), \tag{3}$$
$$(a + b \leqq 1;\ -\pi < \varphi < \pi).$$

Odtud plyne vyjádření funkce $\psi$ porovnáním konstantních členů v rozvojích obou stran podle mocnin $b$:

$$\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -i\varphi + \frac{e^{ai\varphi}}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{-a}{\nu} \left( \frac{e^{(a+\nu)i\varphi}}{a+\nu} - \frac{e^{-\nu i\varphi}}{\nu} \right). \tag{4}$$

14. Rovnice II (1) použil LERCH ([134], [179], [185]) k vyjádření funkce $\psi$ integrály, které jsou utvořeny pomocí eliptické funkce

$$\vartheta_3(v \,|\, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \pi i (n^2 \tau + 2nv),$$

ve tvaru

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} + \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} = \Gamma'(1) - \log 4\pi + \log a -$$
$$- \int_0^a \frac{\vartheta_3(u \,|\, iz)}{z}\, dz - \int_a^\infty \frac{\vartheta_3(u \,|\, iz) - 1}{z}\, dz. \tag{5}$$

Tento vzorec má krásnou aplikaci v LERCHOVÝCH úvahách o počtu tříd binárních kvadratických forem s kladným hlavním diskriminantem ([179], [185]; srov. [199], 50). Mimo to vede k několika vyjádřením EULEROVY konstanty pomocí integrálů závislých na eliptických funkcích $\vartheta_0(0 \,|\, iz)$, $\vartheta_2(0 \,|\, iz)$, $\vartheta_3(0 \,|\, iz)$ [v. V (5), (6), (7)].

Jednoduchou transformací vzorce (5) vychází formule ([134]):

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} + \frac{\pi}{2} \operatorname{cotg} u\,\pi = \frac{1}{2}\,[\Gamma'(1) - \log 4\,\pi] + \frac{1}{8\,\pi} \int\limits_0^\infty \vartheta_3''(u \mid iz) \log z\, dz. \qquad (6)$$

Integrací podle $u$ plyne odtud KUMMERŮV rozvoj funkce $\log \Gamma(u)$.

Týmž postupem, jímž došel ku vzorci II (14), odvodil LERCH vyjádření funkce $\psi$ nekonečnou řadou ([125]):

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} = \Gamma'(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{u-1}{n} \qquad (7)$$

$$(\operatorname{Re} u > 0).$$

15. Významné LERCHOVY výsledky v teorii funkce $\psi$ vznikly z problému, který LERCHOVI předložil HERMITE: Nalézti derivaci KUMMEROVY řady a podobných trigonometrických řad, pro něž tehdy známá pravidla vedla k řadám divergentním.

LERCH rozřešil tento problém, pokud se týká řady KUMMEROVY, po prvé v r. 1894 ve své práci [101] o malmsténovských řadách, v níž na základě formule (2) odvodil svůj proslulý vzorec:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(2\,k+1)\, v\,\pi \,.\, \log \frac{k}{k+1} = (\log 2\,\pi - \Gamma'(1)) \sin v\,\pi +$$
$$+ \frac{\pi}{2} \cos v\,\pi + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} \sin v\,\pi \qquad (8)$$
$$(0 < v < 1).$$

Tuto část theorie malmsténovských řad LERCH uveřejnil v r. 1895 jako zvláštní pojednání [118].

16. S těmito pracemi úzce souvisí LERCHOVY obecné věty o derivování jistých trigonometrických řad, jež jsou obsaženy ve spisech [105], [116), [124]. O jejich vzniku LERCH píše ([124], 71):

„Svého času předložil mi pan HERMITE úkol, vyhledati methodu pro differencování řad trigonometrických, u nichž dosavadní pravidla vedou k řadám divergentním, jako zvláště u známé řady Kummerovy, vyjadřující funkci $\log \Gamma(x)$. Nalezl jsem řešení pro tento zvláštní případ na základě theorie malmsténovských řad, jež mají zajímavé vztahy k theorii funkce gamma.
Dosáhnuv žádaného výsledku ve zvláštním tomto případě, přišel jsem pak verifikací na cestu k řešení problému za podmínek velmi obecných.“

Spokojíme se s formulací jenom jedné z těchto vět:

*Derivace součtu $f(x)$ konvergentní trigonometrické řady*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\,\nu\,x\,\pi$$

*je dána rovnicí:*

$$f'(x) \cdot \frac{\sin x\,\pi}{\pi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\,\nu+1)\,x\,\pi, \quad c_0 = 0, \qquad (9)$$

*jestliže řada vpravo stejnoměrně konverguje.*

Další věty jsou obdobné a týkají se řad, jejichž obecný člen má některý z těchto tvarů:

$$\frac{c_\nu}{\nu}\cos 2\nu x\pi, \quad \frac{2c_\nu}{2\nu-1}\sin(2\nu-1)x\pi, \quad \frac{2c_\nu}{2\nu-1}\cos(2\nu-1)x\pi,$$

$$\frac{c_\nu}{u+\nu}\sin 2x\pi(u+\nu), \quad \frac{c_\nu}{u+\nu}\cos 2x\pi(u+\nu), \quad \frac{c_\nu}{u+\nu}e^{\pm 2x\pi i(u+\nu)}.$$

Důkaz hořejší věty jest jednoduchý. Nechť $g(x)$ značí součet řady (9) násobený veličinou $\pi : \sin x\pi$. Pak platí:

$$\frac{1}{\pi}g(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu - c_{\nu+1})\frac{\sin(2\nu+1)x\pi}{\sin x\pi}$$

a dále po transformaci pravé strany pomocí ABELOVY identity,

$$\frac{1}{\pi}g(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{n-1}c_{\nu+1}\,2\,.\cos(2\nu+2)x\pi - c_{n+1}\frac{\sin(2n+1)x\pi}{\sin x\pi}\right].$$

Z tohoto vztahu plyne integrací v mezích $x_0$, $x \in (0,1)$:

$$\int_{x_0}^{x}g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{c_\nu}{\nu}(\sin 2\nu x\pi - \sin 2\nu x_0\pi) + R_n\right],$$

$$-R_n = c_{n+1}\int_{x_0}^{x}\frac{\pi\sin(2n+1)t\pi}{\sin t\pi}\,dt.$$

Integrál vpravo se přetvoří částečnou integrací a z výsledku se usoudí na platnost vztahu

$$\lim_{n\to\infty}R_n = 0,$$

takže máme

$$\int_{x_0}^{x}g(t)\,dt = f(x) - f(x_0).$$

Tím je důkaz proveden.

Aplikací věty (9) na KUMMEROVU řadu vychází okamžitě vzorec (8). Dále aplikací obdobné věty pro řady s obecným členem $\frac{c_\nu}{u+\nu}\exp[\pm 2x\pi i(u+\nu)]$ na funkce dané trigonometrickými řadami

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+\nu)}{\Gamma(u+\nu)}\cdot\frac{e^{2x\pi i(u+\nu)}}{u+\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma'(u-\nu-1)}{\Gamma(u-\nu-1)}\cdot\frac{e^{-2x\pi i(1-u+\nu)}}{1-u+\nu},$$

LERCH dochází ke vzorci

$$\int_0^1 \log\sin x\pi\,.\,e^{-2ux\pi i}\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-u\pi i}\sin u\pi}{2u\pi}\left[2\,.\log 2 + \frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)} + \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} - 2\,\Gamma'(1)\right] \quad (10)$$

a s jeho použitím k trigonometrickému rozvoji:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)} e^{2v\pi i(u+n)} =$$

$$= -\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left[-\Gamma'(1) + \pi \operatorname{cotg} u\pi + \log(2\sin v\pi) + \pi i\left(v - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (11)$$

$$0 < u,\, v < 1).$$

17. Vzorec (8) odvodil LERCH ještě na dvou dalších místech. Především ve spise [125] na základě rovnice (10), v níž integrál, po vhodné transformaci, rozvinul ve Fourierovu řadu. Dále v pozdější práci [137], v níž opět vyšel z rovnice (2) a obdržel vzorec (8) postupem jednodušším než v původních pracích [101], [118].

V úzké souvislosti se vzorcem (8) je další LERCHOVA formule [125], [137]):

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\cos 2kv\pi =$$

$$= \log 2 + \frac{\pi}{2}\sin 2v\pi + 2\,.\sin^2 v\pi \cdot \left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right] \quad (12)$$

$$(0 \leqslant v \leqslant 1)$$

a rovnice:

$$\int_0^{\infty} [\vartheta_3(v\,|\,ix) - 1 - 2\,.\cos 2v\pi \cdot e^{-\pi x}]\frac{e^{x\pi} - 1}{x}\,dx =$$

$$= 2\log 2 + \pi \sin 2v\pi + 4\,.\sin^2 v\pi\left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right] \quad (13)$$

jejímž oborem platnosti je vnitřek čtverce o vrcholech 0, $\frac{1-i}{2}$, 1, $\frac{1+i}{2}$.

Práce [125] obsahuje řadu dalších nových vztahů, které jsou svojí strukturou a důsledky zajímavé, avšak většinou dosti složité.

Úvahy se soustřeďují zejména kolem studia integrálů

$$\int_0^1 \log \sin x\pi \cdot \cos(1 - 2x)\,u\pi\,dx,\; 2\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin x\pi\,.\sin(1 - 2x)\,u\pi\,dx$$

a vedou ke vzorcům:

$$\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sin u\pi - \sin 2uz\pi)\operatorname{tg} z\pi\,dz - \frac{\sin u\pi}{2u} =$$

$$= \sin u\left[\log 2 - \Gamma'(1) + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg} u\pi + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right], \quad (14)$$

$$\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\cos 2 z u \pi - \cos u \pi) \operatorname{tg} z \pi \, dz - \frac{\sin^2 \frac{u \pi}{2}}{u} = (\Gamma'(1) - 2 . \log 2) \cos u\pi +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sin u \pi + \sin^2 \frac{u \pi}{2} \psi \left(\frac{u}{2}\right) - \cos^2 \frac{u \pi}{2} \psi \left(\frac{u+1}{2}\right), \tag{15}$$

a dále, pomocí rozvojů jejich levých stran ve Fourierovy řady, k rovnici (8) a k rovnici

$$(\Gamma'(1) - \log \pi) \cos u \pi + \frac{\pi}{2} \sin u \pi + \sin^2 \frac{u \pi}{2} \psi \left(\frac{u}{2}\right) -$$

$$- \cos^2 \frac{u \pi}{2} \psi \left(\frac{u+1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)} \cos (2n+1) u \pi \tag{16}$$

$$(0 \leqq u \leqq 1).$$

Ze vzorce (14) vidíme, že funkce $\psi(u)$ je racionálně složena z racionální funkce $1 : u$, z funkcí $\sin u \pi$, $\cos u \pi$ a z integrálů trigonometrických funkcí.[25])

Stojí za zmínku, že v průběhu těchto úvah došel LERCH k novému vyjádření t. zv. CATALANOVY konstanty $G$, která je dána součtem nekonečné řady $\sum_{\lambda} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} : \lambda^2$ $(\lambda = 1, 3, 5, \ldots)$, ve tvaru:

$$G = \pi \left[\log \frac{8}{\pi} + \sum_{\lambda} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda . \log \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\right], \quad (\lambda = 3, 5, \ldots). \tag{17}$$

Další úvahy v práci [125] souvisí s vlastnostmi integrálu

$$J = \int_0^u \frac{u^{a-1} - x^{a-1}}{u - x} \frac{1}{(1+x)^a} dx \quad (u > 0, \operatorname{Re} a > 0,)$$

pro nějž LERCH nachází několik nových vyjádření a rozvojů v nekonečné řady. Porovnáním dvou takových rozvojů dochází zejména k vzorci:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu+x}}{\nu+x} = z^{x-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \binom{x-1}{\nu} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\nu} - \log(1-z) - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \tag{18}$$

$$(|z-1| < |z| < 1),$$

kterého v pozdějších pracích [197], [205] používá zejména při studiu integrállogaritmu [srov. IV (30)].

V práci [205] LERCH tento vzorec transformuje na tvar

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m+x}}{m+x} = z^{x-1} \sum_{m=1}^{\infty} s_m \binom{x-1}{m} \left(\frac{1-z}{z}\right)^m - \log(1-z) - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \Gamma'(1) \tag{19}$$

$$\left(s_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right).$$

Zde řada vlevo konverguje jenom pro $|z| < 1$, kdežto řada vpravo konverguje, když $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$; při vhodné volbě větve mocniny $z^x$ a logaritmu je funkce na pravé straně analytickým pokračováním funkce vlevo.

Mimo některých důsledků pro integrállogaritmus odvozuje LERCH ze vzorce (19) elementárními operacemi tyto vztahy:[26])

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s_m}{m} \left(\frac{z-1}{z}\right)^m - \log z . \log (1-z) + \frac{\pi^2}{6}, \tag{20}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^3} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{s_m s_{m-1}}{m} \left(\frac{z-1}{z}\right)^m - \frac{1}{2} (\log z)^2 \cdot \log (1-z) + \frac{\pi^2}{6} \log z + \zeta(3). \tag{21}$$

Při této příležitosti LERCH píše ([205], 92):

„Ainsi l'équation (19), tout en étant de nature complétement élémentaire est liée aux fonctions de catégories différentes, comme logarithme intégral, fonction gamma et la transcendante dilogarithmique."

Práce [235] obsahuje několik drobnějších výsledků týkajících se funkce $\varphi(x) = \psi(x) - \psi(1)$, které jsou v souvislosti s rozvoji funkcí $\varphi(a+x)\,\varphi(b+x) - \varphi(a)\,\varphi(b)$, $\varphi(a+x)\,\varphi(b-x) - \varphi(a)\,\varphi(b)$ v nekonečné řady.

18. V souvislosti s theorií malmsténovských řad odvodil LERCH pro funkci $\psi$ ještě další výsledky.

Ve své práci [82] ukázal, že funkci $Z(u, s)$, určenou nekonečnou řadou

$$Z(u, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2 n u \pi}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1,\ 0 < u < 1)$$

lze vyjádřit vzorcem

$$Z(u, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^x \cdot \cos 2 u \pi - 1}{e^{2x} - 2 e^x \cdot \cos 2 u \pi + 1} x^{s-1}\, dx \tag{22}$$

a našel první členy jejího maclaurinského rozvoje vzhledem k proměnné $s$:

$$Z(u, s) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[ -2 . \log 2\pi + 2 \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} - \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} \right] s + \ldots \tag{23}$$

Na základě těchto poznatků odvodil vzorec ([91]):

$$2 \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} - \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} = 4 \int_0^\infty \left( \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1 - e^x \cos 2 u \pi}{1 - 2 e^x \cos 2 u \pi + e^{2x}} \right) \frac{dx}{x} \tag{24}$$

19. Vedle výše uvedených rozvojů funkce $\psi$ obsahujících nekonečné řady, jejichž význam je ryze theoretický, našel LERCH formuli, která je velmi vhodná k numerickým výpočtům hodnot oné funkce. Její původ je rovněž v theorii malmsténovských řad ([82], [135]), ale LERCH ji odvodil též přímo ([161]) na základě trigonometrického rozvoje funkce

$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(u+n)^2 + v]^s}.$$

LERCHOVA formule zní:

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} + \frac{\pi}{2} \operatorname{cotg} u\pi - \Gamma'(1) + 2 \,.\log 2 =$$

$$= -2 \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\cos 2u\pi - e^{-\lambda\pi}}{\operatorname{Cosh} \lambda\pi - \cos 2u\pi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n+u|} \cdot \frac{1}{e^{2\pi|n+u|}+1}, \qquad (25)$$

$$(0 < u < 1; \quad \lambda = 1, 3, 5, \ldots).$$

Tento rozvoj je výhodný jednak pro rychlou konvergenci, která jest jako u geometrické řady o poměru $e^{-\pi}$, jednak pro jednoduchost operací, které se v něm vyskytují; konstanty $e^{\pm\pi}$, $e^{\pm 2\pi}$, ..., $\operatorname{Cosh} \pi$, $\operatorname{Cosh} 3\pi$, ... se vypočtou jednou pro vždy, načež se pro jednotlivá $u$ vypočte hodnota $\Gamma'(u) : \Gamma(u)$ pomocí hodnot $\operatorname{cotg} u\pi$, $\cos 2u\pi$, $e^{u\pi}$, $e^{(1-u)\pi}$, které se určí na př. pomocí tabulek, prostým násobením a dělením.

IV. *Neúplné funkce gamma, integrállogaritmus a Krampova transcendenta L.*

20. Funkce $P$, $Q$ určené vzorci

$$P(a, \omega) = \int_0^{\omega} e^{-x} x^{a-1} \, dx, \quad Q(a, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1} \, dx$$

se označují jako *neúplné funkce gamma*[27]) nebo též jako PRYMOVY *funkce P, Q*.[28]) S funkcí gamma souvisí vztahem:

$$\Gamma(a) = P(a, \omega) + Q(a, \omega).$$

Funkce $Q$ je v úzké souvislosti s integrállogaritmem $li$ a s KRAMPOVOU transcendentou $L$:

$$li(e^{-\omega}) = -Q(0, \omega); \quad L(\omega) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{2}, \omega^2\right).$$

Od dob EULERA a LEGENDREA[29]) byly funkce $P$, $Q$ hojně studovány, zejména v souvislosti s analytickou povahou funkce gamma a dále za účelem explicitního vyjádření a numerických výpočtů.[30]) Ve vztahu k LERCHOVI je vhodné připomenout HERMITEOVU snahu po explicitním vyjádření funkce $Q$. HERMITE píše STIELTJESOVI (v dopise ze dne 12. října 1888):[31])

„Permettez-moi de rapprocher votre expression

$$\mathcal{G}(a) = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \text{ v. p.} \int_0^{\infty} \frac{x^{-a} \,.\, e^{-x}}{1-x} \, dx$$

d'un résultat que m'a communiqué M. Lerch.

Soit

$$Q(a) = \int_{\omega}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx$$

la fonction holomorphe de M. Prym, on a

$$e^{\omega} \,.\, Q(a) = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega x} x^{-a}}{1+x} \, dx.$$

Ces fonctions $\mathcal{G}(a)$, $Q(a)$ sont d'une nature très mystérieuse, bien qu'holomorphes, et, quelque mal que je me suis donné pour y parvenir, je n'ai pas, à mon gré, réussi à trouver une expression suffisement explicite pour $Q(a)$."

21. LERCHŮV přínos k teorii funkce $P$ je převážně metodického rázu. Základním prvkem v teorii této funkce jest její vyjádření LEGENDREOVÝM vzorcem:

$$P(a, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{a+n}}{n!\,(a+n)}.$$

Na několika místech ([48], [192], [203]) se u LERCHA setkáváme s t. zv. EULEROVOU rovnicí:[32])

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^n}{n!\,(a+n)} = e^{-\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^\nu}{a\,(a+1)\dots(a+\nu)}, \tag{a}$$

k níž LERCH dochází rozmanitými způsoby, zpravidla na okraji šíře založených úvah.

V práci [192] LERCH odvozuje na základě elementárních poznatků o funkci $\Gamma$ vzorec pro součin řad

$$F(x, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u+\nu)} x^\nu, \quad F(-x, v) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu \Gamma(v)}{\Gamma(v+\mu)} x^\mu$$

ve tvaru:

$$F(x, u)\,F(-x, v) = (v-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)\,x^n}{(u+v+n-2)\,\Gamma(u+n)} +$$

$$+ (u-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v)\;(-x)^n}{(u+v+n-2)\,\Gamma(v+n)}, \tag{1}$$

z něhož EULEROVA rovnice plyne pro $v = 1$; $x = \omega$, $u = a + 1$ ($\omega > 0$, $a > 0$).

22. Hlavní LERCHOVY úvahy o funkci $P$ jsou obsaženy v práci [210] a týkají se rozvojů této funkce v řetězové zlomky. Takovými rozvoji se před LERCHEM zabývali BJÖRLING[33]) a SCHLÖMILCH.[34])

LERCH odvozuje pro funkci $P$ dva nové rozvoje v řetězové zlomky:

$$\omega^{-a} e^{\omega} \cdot P(a, \omega) = \frac{1|}{|a} - \frac{\omega\, a|}{|\omega + a + 1} - \frac{\omega\,(a+1)|}{|\omega + a + 2} - \frac{\omega\,(a+2)|}{|\omega + a + 3} - \dots, \tag{2}$$

$$\omega^{1-a} e^{\omega} P(a, \omega) = -1 + \frac{a-1|}{|a-1-\omega} + \frac{\omega|}{|a-\omega} + \frac{2\,\omega|}{|a+1-\omega} +$$

$$+ \frac{3\,\omega|}{|a+2-\omega} + \dots. \tag{3}$$

Vzorec (2) je zobecněním BJÖRLINGOVA vzorce ($\omega = 1$)[35]). Jeho důkaz záleží v tom, že sblížené zlomky $P_\nu : Q_\nu$ řetězového zlomku (2) jsou současně částečnými součty EULEROVY řady pro funkci $\omega^{-a} e^{\omega} P(a, \omega)$:

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{1}{a} + \frac{\omega}{a\,(a+1)} + \frac{\omega^2}{a\,(a+1)\,(a+2)} + \dots + \frac{\omega^{\nu-1}}{a\,(a+1)\dots(a+\nu-1)}.$$

LERCH dále ukazuje, že v případě $a > 0$ $(\omega > 0)$ platí vzorec:

$$P(a, \omega) = \omega^a e^{-\omega} \frac{P_\nu}{Q_\nu - \omega_1^\nu}, \quad (0 < \omega_1 < \omega). \tag{4}$$

Vzorec (3) zasluhuje zvláštní pozornosti pokud jde o metodu důkazu.

LERCH zde použil nového principu, který nazývá „princip nejrychlejší konvergence" a který popisuje slovy ([210], 126): „... aus einer (linearen stetigen) Mannigfaltigkeit von Funktionen eine bestimmte Funktion durch die Forderung auszusondern, daß ihre Entwicklung in einem ausgedehnteren Gebiete konvergiere als diejenigen aller übrigen Funktionen der Mannigfaltigkeit ..."

V daném případě LERCH vychází z diferenciální rovnice

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = (x - a + 1) z + x, \tag{b}$$

jejíž obecný integrál je dán vzorcem:

$$z(x) = e^x x^{1-a} \{C + P(a, x)\}$$

neboli

$$z(x) = Ce^x x^{1-a} + e^x \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{\nu+1}}{(a+\nu)\,\nu!}; \tag{c}$$

přitom $C$ značí (integrační) konstantu. Z diferenciální rovnice (b) obdržíme metodou neurčitých koeficientů Taylorův rozvoj funkce $z$ ve tvaru:

$$z(x + \xi) = B_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{P_\nu + Q_\nu B_0}{\nu!\, x^\nu} \cdot \xi^\nu, \quad (B_0 = z(x)) \tag{d}$$

při čemž $P_\nu$, $Q_\nu$ jsou sblížení čitatelé a jmenovatelé (konvergentního) řetězového zlomku

$$\mathfrak{K} = 1 + \frac{1-a|}{|a-1-x} + \frac{x|}{|a-x} + \frac{2x|}{|a+1-x} + \frac{3x|}{|a+2-x} + \dots$$

Konvergenční poloměr mocninné řady (d) závisí na hodnotě konstanty $C$ a je konečný $(= |x|)$ nebo nekonečný podle toho, zda je $\mathfrak{K} + B_0 \neq 0$ nebo $= 0$. Z rovnice (c) vidíme, že nastane první nebo druhý případ podle toho, zda je $C \neq 0$ nebo $= 0$ (vylučujeme případ, že $a$ je celé $\leqq 1$). Odtud plynou rovnosti

$$-\mathfrak{K} = B_0 = z(x) = e^x x^{1-a} P(a, x)$$

a z nich vychází vzorec (3).

Současně LERCH dochází nepodstatnou modifikací tohoto postupu k SCHLÖMILCHOVU vzorci

$$\omega^{-a} e^{\omega} P(a, \omega) = \frac{1|}{|a-\omega} + \frac{\omega|}{|a+1-\omega} + \frac{2\omega|}{|a+2-\omega} + \frac{3\omega|}{|a+3-\omega} + \dots \tag{e}$$

a dále k rovnici

$$\frac{(\omega + \xi)^{-a} e^{\xi} P(a, \omega + \xi)}{\omega^{-a} P(a, \omega)} = 1 + q_0 \xi + q_0 q_1 \xi^2 + q_0 q_1 q_2 \xi^3 + \dots, \tag{5}$$

v níž veličiny $q_0, q_1, q_2, \ldots$ jsou dány vzorcem

$$q_{\nu-1} = \frac{1|}{|a+\nu-\omega} + \frac{(\nu+1)\,\omega|}{|a+\nu+1-\omega} + \frac{(\nu+2)\,\omega|}{|a+\nu+2-\omega} + \ldots,$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Poznamenejme, že z rovnice (5) vychází pro $a = -n$ (celé nezáporné) rozvoj:

$$\left(1 + \frac{\xi}{\omega}\right)^n e^{\xi} = 1 + q_0\,\xi + q_0\,q_1\,\xi^2 + q_0\,q_1\,q_2\,\xi^3 + \ldots, \tag{6}$$

v němž veličiny $q_0, q_1, q_2, \ldots$ mají hořejší význam (s hodnotou $a = -n$).

Další LERCHŮV přínos k této theorii je dán výsledky o SCHLÖMILCHOVĚ rozvoji funkce ($\Phi(\omega) \equiv$) $\omega^{-a}\,e^{\omega}\,P(a, \omega)$ v řetězový zlomek (e), zejména pokud jde o explicitní vyjádření příslušných sblížených čitatelů $P_n$ a jmenovatelů $Q_n$.

Východiskem k tomu jsou vytvořující funkce $F$, $f$ čísel $P_n$, $Q_n$, které LERCH definuje jakožto součty mocninných řad

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n!}\,z^n, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{n!}\,z^n,$$

a přihlížeje k definici čísel $P_n$, $Q_n$, odvozuje vzorce:

$$F(z) = (1-z)^{-a}\,e^{-\omega z} \int_0^z (1-t)^{a-1}\,e^{\omega t}\,dt,$$
$$f(z) = (1-z)^{-a}\,e^{-\omega z}.$$

Z těchto vzorců plyne řada explicitních výrazů pro čísla $P_n$, $Q_n$, které jsou v případě čísel $P_n$ složité, avšak jednoduché pro $Q_n$. Zejména platí formule:

$$P_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu+1} Q'_{\nu}\,Q_{n-\nu-1},$$
$$Q_n = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu}\,\omega^{n-\nu}\,\frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}, \tag{7}$$

při čemž veličina $Q'_{\nu}$ jest utvořena z čísel $1-a$, $-\omega$ právě tak, jako $Q_{\nu}$ z čísel $a$ a $\omega$.

V souvislosti s těmito úvahami LERCH transformuje SCHLÖMILCHŮV řetězový zlomek na tvar

$$\omega^{-a}\,e^{\omega}\,P(a, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{n!\,\omega^n}{Q_n\,Q_{n+1}}, \tag{8}$$

který se dobře hodí k numerickým výpočtům i v případě, že $\omega$ je záporné s velkou absolutní hodnotou.

Další vzorec, vhodný k numerickým výpočtům je tento:

$$\omega^{-a}\,e^{\omega}\,P(a, \omega) - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n\,\frac{n!}{Q_n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \frac{\omega^{\nu}}{a\,(a+1)\ldots(a+\nu)}. \tag{9}$$

Z něj též vychází, že zbytek $R_n = \Phi - \frac{P_n}{Q_n}$ SCHLÖMILCHOVA rozvoje funkce $\Phi$ v řetězový zlomek je dán vzorcem

$$R_n(\omega) = \frac{(-\omega)^n}{Q_n} \Phi^{(n)}(\omega),$$

při čemž $\Phi^{(n)}$ značí $n$-tou derivaci funkce $\Phi$.

23. LERCHŮV přínos k theorii funkce $Q$ je zvláště obsažný. LERCH se zabýval funkcí $Q$ a jejími zvláštními případy v několika pracích ([48], [191, [195], [203], [210]), které jsou většinou výhradně věnovány studiu těchto funkcí.

Již ve své první větší práci [48] o funkci gamma LERCH odvodil explicitní vyjádření funkce $Q$ metodou, jež byla předmětem HERMITEOVY pochvaly.[36]) LERCHŮV vzorec zní:

$$Q(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \binom{a-1}{\nu-1} \Phi(\nu)\, \Psi(a-\nu), \quad (a \text{ libov.}) \tag{10}$$

při čemž značí

$$\Phi(\nu) = \int_0^u e^t\, t^{\nu-1}\, dt, \quad \Psi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega+nu)^a}{e^{\omega+nu}} \quad (\omega > 0,\ u > 0).$$

K jeho odvození LERCH vychází z rovnice

$$\Gamma(a) . Q(1-a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega(x+1)}\, x^{a-1} dx}{e^{u(x+1)} - 1} \int_0^u e^{t(x+1)}\, dt, \quad (a > 0)$$

kterou transformuje na tvar

$$\Gamma(a) . Q(1-a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi(\nu)}{(\nu-1)!} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega(x+1)}\, x^{a+\nu-2}\, dx}{e^{u(x+1)} - 1},$$

načež s přihlédnutím ke vztahu

$$\Gamma(a) . \Psi(-a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega(x+1)}\, x^{a-1}}{e^{u(x+1} - 1}\, dx$$

dochází ke vzorci (10), za předpokladu $a < 1$. V konečné části své úvahy LERCH zjišťuje, že vzorec (10) platí pro všechna (komplexní) čísla $a$.

Vzorec (10) obsahuje jako zvláštní případ ($u = \omega = 1$) MELLINŮV rozvoj funkce $Q(x, 1)$ z r. 1883.[37]) Tento vzorec odvodil LERCH po 16 letech znova v práci [191], avšak metodou šíře založenou, která mu umožnila získat ještě další analogické rozvoje funkce $Q$ ((23), (25)).

24. Nejvýznamnější LERCHOVY práce o funkci $Q$ jsou pojednání [191], [195] z r. 1905, z nichž druhé vyšlo dříve.

Hlavním výsledkem této práce [195] je rozvoj funkce $Q$ v nekonečnou řadu

$$e^{\frac{u}{v}} \cdot Q\left(1-a, \frac{u}{v}\right) = v^a \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(v)\, \Delta^\nu u^{-a} \tag{11}$$

$$\left(\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} u > 0,\ 0 < v < \frac{1}{\log 2}\right),$$

při čemž $C_\nu(v)$ značí polynomy dané rekurentní rovnicí

$$C_\nu = v \cdot \left(C_{\nu-1} - \frac{1}{2} C_{\nu-2} + \frac{1}{3} C_{\nu-3} - \frac{1}{4} C_{\nu-4} + \ldots\right); \quad C_0 = 1$$

a symbol $\Delta^\nu u^{-a}$ $\nu$-tou diferenci funkce $f(u) = u^{-a}$ definovanou vzorcem

$$\Delta^{\nu+1} f(u) = \Delta^\nu f(u+1) - \Delta^\nu f(u) \quad (\Delta^0 f = f).$$

K odvození vzorce (11) LERCH vychází z rozvoje

$$\frac{1}{1 - v \,.\, \log(1+z)} = C_0(v) + C_1(v)\, z + C_2(v)\, z^2 + \ldots,$$

$$\left(0 < v < \frac{1}{\log 2},\ |z| \leqslant 1\right),$$

který transformuje substitucí $z = e^{-x} - 1$ $(x > 0)$, násobí funkcí $x^{a-1} \,.\, \exp(-ux)$ $(\mathrm{Re}\, u > 0,\ \mathrm{Re}\, a > 0)$ a integruje v mezích $0, \infty$. Tím dospěje ke vztahu

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-ux} \frac{x^{a-1}}{1 + vx}\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' C_\nu(v)\, \Delta^\nu u^{-a}$$

a odtud s použitím vzorce

$$\int_0^\infty e^{-\omega(x+1)} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \Gamma(a) \,.\, Q(1-a, \omega) \quad (\mathrm{Re}\, \omega > 0)$$

k rozvoji (11).

K numerickým aplikacím vzorce (11) jest účelné poznamenat, že pro funkce $C_n(v)$ a zbytky $R_n = \sum\limits_{\nu=n}^{\infty}{}' C_\nu(v)\, \Delta^\nu u^{-a}$ nekonečné řady na pravé straně vzorce (11) platí nerovnosti

$$|C_n(v)| < \frac{1}{1 - v \,.\, \log 2} \quad (= g),$$

$$|R_n| < g \,.\, |\Delta^n (u-1)^{-a}| \quad (a > 0,\ u > 1;\ n = 0, 1, \ldots).$$

Předpoklad $\mathrm{Re}\, a > 0$, jehož bylo použito při odvození vzorce (11) je nepodstatný a může býti vypuštěn, takže rozvoj (11) platí při každé hodnotě $a$.

Vycházeje ze vzorce (11) odvozuje LERCH dva nové rozvoje v nekonečné řady funkce integrállogaritmus:

$$-e^{\frac{u}{v}} \cdot \mathrm{li}\left(e^{-\frac{u}{v}}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' C_\nu(v)\, \Delta^\nu \log u \tag{12}$$

$$-\frac{u}{v} \cdot e^{\frac{u}{v}} \,.\, \mathrm{li}\left(e^{-\frac{u}{v}}\right) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^\nu \nu!\, C_\nu(v)}{(u+1)(u+2)\ldots(u+\nu)} \tag{13}$$

$$\left(\mathrm{Re}\, u > 0,\ 0 < v < \frac{1}{\log 2}\right).$$

První vychází derivováním podle $\xi$ vzorce

$$v^{\xi} \cdot e^{\frac{u}{v}} \cdot Q\left(1 + \xi, \frac{u}{v}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(v)\, \Delta^\nu u^{\xi}$$

v čísle $\xi = 0$, druhý je zvláštním případem ($a = 1$) rozvoje (11).

Další LERCHOVY rozvoje funkce $Q$, které se obdrží jednoduchým zobecněním předcházejících úvah, jsou dány vzorci:

$$\omega^a e^{\omega} Q(1 - a, \omega) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \nu!\, \Phi_\nu(a, v)}{(u + 1)(u + 2) \ldots (u + \nu)}, \tag{14}$$

$$\omega^{a-1} e^{\omega} Q(1 - a, \omega) = \sum_{\nu=1}^{\infty} v \,.\, \Psi_\nu(a, v)\, \Delta^\nu \log u; \tag{15}$$

$$\left(\omega = \frac{u}{v};\ \operatorname{Re} u > 0;\ 0 < v < \frac{1}{\log 2}\right),$$

v nichž jsou koeficienty $\Phi_\nu(a, v)$, $\Psi_\nu(a, v)$ definovány rozvoji:

$$\frac{1}{(1 - v \,.\, \log(1 + z))^a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu(a, v)\, z^\nu$$

$$\frac{\log(1 + z)}{(1 - v \,.\, \log(1 + z))^a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\nu(a, v)\, z^\nu \,.$$

Poznamenejme, že funkce $\Phi_\nu(a, v)$, $\Psi_\nu(a, v)$ jsou v těchto jednoduchých vztazích k výše definovaným polynomům $C_\nu(v)$: $\Phi_\nu(a, v)$ resp. $v \,.\, \Psi_\nu(a, v)$ vznikne z polynomu $C_\nu(v)$, když se v tomto polynomu nahradí každá mocnina $v^n$ výrazem $\binom{a + n - 1}{n} v^n$ resp. $\binom{a + n - 2}{n - 1} v^n$.

Zvláštními případy vzorce (14) ($v = 1$) a vzorce (13) ($v = 1$) jsou SCHLÖMILCHOVY rozvoje:[38])

$$\omega^a e^{\omega} Q(1 - a, \omega) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu A_\nu}{(\omega + 1)(\omega + 2) \ldots (\omega + \nu)}, \quad (A_\nu = \nu!\, \Phi_\nu(a, 1))$$

$$-\omega e^{\omega} \operatorname{li}(e^{-\omega}) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{(\omega + 1)(\omega + 2) \ldots (\omega + \nu)}; \quad (a_\nu = \nu!\, \Phi_\nu(1, 1))$$

koeficienty $a_\nu$ mají hodnoty:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 4,\ a_5 = 14,\ a_6 = 38,\ a_7 = 216,\ a_8 = 600,$$
$$a_9 = 6240, \ldots$$

25. Řadu dalších rozvojů funkce $Q$, které jsou většinou velmi vhodné k numerickým výpočtům, odvodil LERCH v práci [191].

Jedna skupina se soustřeďuje kolem vzorce

$$\omega^a Q(-a, \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \frac{\nu!}{a(a+1)\dots(a+\nu)}, \tag{16}$$

$$(\mathrm{Re}\, a > 1;\ \omega > 0)$$

v němž koeficienty $\Psi_\nu(\omega)$ jsou dány takto:

$$\Psi_0(\omega) = e^{-\omega};\quad \Psi_\nu(\omega) = e^{-\omega} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (-1)^\alpha \binom{\nu-1}{\alpha-1} \frac{\omega^\alpha}{\alpha!} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Současně platí nerovnost:

$$|\Psi_\nu(\omega)| < e^{-\frac{1}{2}\omega},$$

která jest užitečná při numerických výpočtech.

K odvození tohoto vzorce LERCH vychází z formule

$$Q(-a, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^{a+1}},$$

kterou transformuje substitucí $x = \omega : (1 - z)$, načež použije rozvoje

$$e^{-\frac{\omega}{1-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) z^\nu \quad (|z| < 1).$$

Jednoduchou transformací vzorce (16) vychází další LERCHŮV výsledek:

$$Q(1-a, \omega) = \frac{e^{-\omega}}{\omega^a} \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(\omega) \frac{\nu!}{(a+1)(a+2)\dots(a+\nu)}, \tag{17}$$

$$(\mathrm{Re}\, a > 1;\ \omega > 0)$$

v němž značí

$$G_\nu(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (-1)^{\alpha-1} \binom{\nu-1}{\alpha-1} \frac{\omega^\alpha}{\alpha!} \quad (\nu = 1, 2, \dots). \tag{18}$$

Další rozvoj funkce $Q(1-a, \omega)$ s koeficienty $G_\nu(\omega)$ je tento:

$$\frac{e^\omega Q(1-a, \omega)}{\Gamma(1-a)} = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(\omega) \binom{\nu+a-1}{\nu} \tag{19}$$

$$(\mathrm{Re}\, a < 0).$$

Východiskem k němu je rovnice

$$\Gamma(1-s)\, Q(s, \omega) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{e^{-2s\pi i} - 1} \int_{(r, 0, r)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s} (1-z)^{s-1}\, dz,$$

$$(\mathrm{Re}\, s > 1;\ 0 < r < 1).$$

Integrace se provádí v kladném směru po jednoduché uzavřené křivce, jejíž začátek a konec je v bodě $z = r$ a která obchází úsečku s koncovými body $0$, $r$; integrovaná funkce je definována jednoznačně vhodnou volbou větví funkcí $z^{-s}$, $(1 - z)^{s-1}$. Vzorec (19) vyjde z této rovnice tím, že se použije hořejšího rozvoje pro funkci $\exp(-\omega : (1 - z))$ a pak se provede (delikátní) přechod $r \to 1$.

Druhá skupina LERCHOVÝCH rozvojů funkce $Q$ se soustřeďuje kolem rovnice

$$\frac{2\pi}{t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2m\pi}{t}(c+it\xi)} Q\left(a, \omega e^{\frac{2m\pi}{t}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a + c + itn + it\xi)}{(c + itn + it\xi)\,\omega^{c+itn+it\xi}}, \quad (20)$$

$$(\omega > 0,\ t > 0,\ c > 0,\ \operatorname{Re}(a + c) > 0,\ \operatorname{Im}\xi = 0),$$

která vyjadřuje trigonometrický rozvoj funkce $F(\xi)$, definované pravou stranou. LERCH vychází z trigonometrického rozvoje této funkce:

$$F(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m\, e^{2m\xi\pi i}$$

a zjišťuje, že koeficienty mají hodnoty uvedené ve vzorci (20).

Ze vzorce (20) vychází (pro $\xi = 0$, $\omega = 1$) rozvoj funkce $Q(a)$ $(= Q(a, 1))$ ve tvaru:

$$Q(a) = \frac{t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a + c + nti)}{c + nti} - \frac{\Gamma(a)}{e^{\frac{2c\pi}{t}} - 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(a + n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+c+n)} - 1\right)} -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2mc\pi}{t}}\, Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right), \quad (21)$$

a z něj přechodem $c \to 0$:

$$Q(a) = \frac{1}{2}\Gamma(a) + \frac{t}{2\pi}\Gamma'(a) + \frac{t}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a + nti) - \Gamma(a - nti)}{ni} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(a + n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+n)} - 1\right)} - \sum_{m=1}^{\infty} Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right). \quad (22)$$

Pokud jde o aplikace těchto vzorců k numerickým výpočtům, LERCH podotýká, že ve vzorci (21) lze při volbě na př. $t = c = 1$ zanedbat poslední nekonečnou řadu, jejíž hodnota ($\operatorname{Im} a = 0$) je menší než $10^{-230}$, a ve vzorci (22) nejvhodnější volba veličiny $t$ je $t = 2$.

Konečně další skupina LERCHOVÝCH rozvojů funkce $Q$ je v souvislosti s theorií funkce

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+x+n)u}}{(\omega + x + n)^a} \quad (\operatorname{Re} u > 0). \quad (g)$$

Jsou to rozvoje:

$$Q(1 - a, u\omega) = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-a}{m} P(m + 1, u)\, S_0(a + m), \quad (\omega > 1) \quad (23)$$

$$Q(1-a, u\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-a}{m} \mathfrak{P}(m+1, u)\, S_1(a+m), \tag{24}$$

$$Q(1-a, u(k-1)) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-a}{m} \frac{\mathfrak{P}(m+1, u)}{u^{m+a}} R_k(a+m), \quad (k \geqslant 2 \text{ celé}), \tag{25}$$

při čemž značí

$$P(m+1, u) = \int_0^u e^{-x} x^m \, dx, \quad \mathfrak{P}(m+1, u) = \int_0^u e^x x^m \, dx,$$

$$S_i(s) = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^s \cdot u^s}, \quad R_k(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-nu}}{n^s},$$

$$(u > 0; \quad i = 0{,}1).$$

Východiskem k těmto výsledkům je vzorec

$$\int_0^1 \Phi(x) \cdot dx = Q(1-a, u\omega)\, u^{a-1},$$

který se obdrží integrací rovnice (g). Hořejší rozvoje z něj plynou tím, že se funkce $\Phi(x)$ nebo $\Phi(1-x)$ vyjádří pomocí mocninného rozvoje funkcí $e^{ux}\Phi(x)$ nebo $e^{-ux}\Phi(1-x)$ ve tvaru:

$$\Phi(x) = e^{-ux} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-a}{m} x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^{a+m}},$$

$$\Phi(1-x) = e^{ux} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-a}{m} x^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^{a+m}},$$

a pak se provede integrace příslušných nekonečných řad a event. další jednoduché úpravy. Vzorec (23) obsahuje jako zvláštní případ ($u = 1$) dřívější HERMITEŮV výsledek[39]); vzorec (24) vyskytuje se již v LERCHOVĚ práci [48], v níž byl odvozen jinou metodou (v. (10)).

Do této skupiny rozvojů funkce $Q$ je možno zařadit i polokonvergentní rozvoj:

$$Q(1-a, \omega) = u \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-\omega}}{(mu+\omega)^a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ue^{-\omega}}{\omega^a} + \frac{e^{-\omega}}{\omega^a} \sum_{\nu=1,2,3,\ldots} (-1)^\nu \frac{B_\nu}{(2\nu)!} u^{2\nu} G(\omega, a)_\nu, \tag{26}$$

$$(a > 0, \ u > 0, \ \omega > 0),$$

v němž $B_\nu$ značí $\nu$-té bernoulliské číslo a veličina $G(\omega, a)_\nu$ je dána vzorcem

$$G(\omega, a)_\nu = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \frac{a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)}{\omega^\alpha}.$$

Rozvoj (26) vychází z integrálního vyjádření funkce

$$\Psi(\omega, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nu}}{(\omega+n)^a}$$

ve tvaru

$$u^{-a}\,\Gamma(a)\,\Psi(\omega, a) = \int_0^\infty \frac{e^{-u\omega x}\,x^{a-1}}{1 - e^{-u(1+x)}}\,dx$$

tím, že se integrovaná funkce vyjádří pomocí rozvoje:

$$\frac{1}{1 - e^{-z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu-1} + (-1)^p \frac{\Theta_p B_{p+1}}{(2p+2)!} z^{2p+1}, \qquad \text{(h)}$$

$$(0 < \Theta_p < 1).$$

Poznamenejme, že zbytek polokonvergentní řady na pravé straně vzorce (26) má stejné znaménko jako první vynechaný člen a jest absolutně menší než tento člen.

Vzorec (26) je velmi výhodný k numerickým výpočtům funkce $Q(1 - a, \omega)$, pokud dovedeme pohodlně stanovit součet malmsténovské řady $\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu u + \omega)^{-a} \times$ $\times \exp(-\nu u - \omega)$ pro malá $u$ ($> 0$). LERCH ve své práci [197] uvádí metodu k výpočtu tohoto součtu, která je založena na využití rozvoje

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + v)^{s-1} \,.\, e^{-u(\nu+v)} = \frac{\Gamma(s)}{u^s} + a_0 - a_1 u + a_2 u^2 - a_3 u^3 + \ldots;$$

koeficienty $a_\nu$ LERCH vyjádřil v práci [101], 2—3, explicitními vzorci.

Studium vzorce (26) vede k pozoruhodným rozvojům integrállogaritmu, jímž je věnována práce [197].

Především zvláštním případem ($a = 1$, $\omega = m$ přirozené) vzorce (26) je rozvoj

$$-\operatorname{li}(e^{-w}) = \log \frac{1}{1 - e^{-u}} -$$

$$- \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{e^{-\mu u}}{\mu} - \frac{e^{-w}}{2m} + e^{-w} \sum_{\nu} (-1)^\nu \frac{B_\nu}{2\nu m^{2\nu}} \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!} \qquad (27)$$

$$\left(u = \frac{w}{m}; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots\right).$$

Další LERCHOVY výsledky v této souvislosti jsou dány vzorci:

$$\operatorname{li}(e^w) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-(\nu-a)u}}{\nu - a} + \log a - \frac{1}{2a} - \pi \operatorname{cotg} a\pi + \frac{1}{2a} e^w - \psi(a) -$$

$$- \sum_{\mu=1} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu e^w}{2\mu \,.\, a^{2\mu}} \left(e^{-w} - \sum_{\nu=0}^{2\mu-1} \frac{(-w)^\nu}{\nu!}\right) \qquad (28)$$

$$(w = au; \; 0 < u < 2\pi; \; a > 0),$$

$$\operatorname{li}(e^w) = u + \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{e^{\mu u}}{\mu} + \log(1 - e^{-u}) - \psi(m) - \frac{1}{2m} + \log m + \frac{e^w}{2m} -$$

$$-\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu e^w}{2\mu\,.\,m^{2\mu}}\left(e^{-w}-\sum_{\nu=0}^{2\mu-1}\frac{(-w)^\nu}{\nu!}\right) \tag{29}$$

$$(w = mu;\ 0 < u < 2\pi;\ m \text{ přirozené});$$

v nich značí

$$\mathrm{li}\,(e^w) = \text{hl. h.} \int_{-\infty}^{w} e^x \frac{dx}{x}$$

a $\psi$ logaritmickou derivaci funkce gamma.

Odvození těchto vzorců je velmi pozoruhodné. LERCH postupuje takto: Nechť $F$ značí funkci definovanou nekonečnou řadou:

$$F(a, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{-(a+\nu)u}}{a+\nu} (a > 0,\ u > 0).$$

Snadno se vidí, že ji můžeme vyjádřit nevlastním integrálem ve tvaru

$$F(a, u) = \int_0^\infty \frac{e^{-a(u+z)}}{1-e^{-(u+z)}}\,dz.$$

Odtud vychází s přihlédnutím k vzorci (h) rovnice:

$$F(a,u) = -\mathrm{li}\,(e^{-au}) + \frac{1}{2a}e^{-au} + \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu)!\,a^{2\nu}}\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2\nu-1}\,dx + R_n, \tag{i}$$

s označením

$$R_n = (-1)^n \frac{\Theta_n B_{n+1}}{(2n+2)!\,a^{2n+2}}\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2n+1}\,dx \quad (0 < \Theta_n < 1).$$

Integrály v rovnici (i) se vyjádří pomocí vztahu

$$\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2\nu-1}\,dx = (2\nu-1)! - \int_0^{au} e^{-x}x^{2\nu-1}\,dx,$$

načež vyjde

$$F(a,u) = -\mathrm{li}\,(e^{-au}) + \frac{1}{2a}e^{-au} - \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu)!\,a^{2\nu}}\int_0^{au} e^{-x}x^{2\nu-1}\,dx +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu\,.\,a^{2\nu}} + R_n.$$

Řada uvedená na třetím místě vpravo konverguje pro $n \to \infty$ v případě, že $0 < u < 2\pi$; platnost této nerovnosti v dalším předpokládáme.

Rozhodujícího pokroku dosáhne LERCH na tomto místě zjištěním, že veličina

$$R'_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu)!\,a^{2\nu}}\int_0^{au} e^{-x}x^{2\nu-1}\,dx + R_n$$

nezávisí na $u$ $\left(\frac{\partial R'_n}{\partial u} = 0\right)$. Tím se obdrží rovnice ($au = w$)

$$F(a, u) = \varphi(a) - \mathrm{li}\,(e^{-w}) + \frac{1}{2a} e^{-w} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu e^{-w}}{2\nu \,.\, a^{2\nu}} \left(e^w - \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!}\right),$$

při označení

$$\varphi(a) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu \,.\, a^{2\nu}} + R'_n.$$

Násobením této rovnice funkcí $e^{au}$ a pak derivováním podle $a$ a přechodem $u \to 0$ určí se funkce $\varphi(a)$ ve tvaru

$$\varphi(a) = \log a - \frac{1}{2a} - \psi(a),$$

takže vychází

$$F(a, u) = \log a - \frac{1}{2a} - \psi(a) - \mathrm{li}\,(e^{-w}) + \frac{1}{2a} e^{-w} -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu e^{-w}}{2\nu \,.\, a^{2\nu}} \left(e^w - \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!}\right) \qquad \text{(j)}$$

K dosažení konečného vzorce (28) stačí pak několik jednoduchých úprav této rovnice. Vzorec (29) plyne z (28) přechodem $a \to m$ (přirozené).

Poznamenejme, že rovnice (j obsahuje jako zvláštní případ ($a$ přirozené) vzorec KRAUSEŮV.[40])

Vedle těchto rozvojů odvozuje LERCH tři další spolu úzce souvisící vyjádření funkce $-\mathrm{li}\,(e^{-w})$, jako je na př.

$$-\mathrm{li}\,(e^{-au}) = -\log a - \log(1 - e^{-u}) + e^{-au} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi(\nu + 1)\, C_\nu\, (e^u - 1)^\nu, \qquad (30)$$

v němž koeficienty $C_\nu$ jsou dány vzorcem

$$e^{-au} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu (e^u - 1)^\nu = 1.$$

LERCH k těmto rozvojům dochází na základě svého dřívějšího vyjádření funkce $\psi$ v práci [125] (v. III (18)) a podotýká, že konvergují jenom pro značně malá $u$ a pro výpočty nejsou zvláště výhodné.

26. Zbývající LERCHOVY výsledky o funkci $Q$ jsou spíše metodického rázu a týkají se rozvojů této funkce v řetězové zlomky (a s nimi souvisící nekonečné řady) ([210]) a dále přechodu od EULEROVA součinu pro funkci $\Gamma$ k integrálnímu vyjádření funkce $Q$.

LERCHOVY úvahy o rozvojích funkce $Q$ v řetězové zlomky jsou uveřejněny v práci [210] a navazují na podobné otázky o funkci $P$ studované v téže práci (v. odst. 22). LERCHŮV přínos v tomto směru je v podstatě dán zobecněním výsledků TANNERYHO[41]) a s ním souvisícími drobnějšími příspěvky, které se týkají rozvojů integrállogaritmu a KRAMPOVY transcendenty $L$. Rozvoji funkce $Q$ v řetězové zlomky a jejích zmíněných zvláštních případů zabývala se před LERCHEM mimo TANNERYHO řada klasiků: EULER[42]), LEGENDRE[43]), LAGUERRE[44]), LAPLACE[45]), JACOBI[46]).

Hlavním LERCHOVÝM výsledkem jsou vzorce:

$$u^c e^u Q(-c, u) = \frac{1|}{|u+c+1} - \frac{1(c+1)|}{|u+c+3} - \frac{2(c+2)|}{|u+c+5} - \frac{3(c+3)|}{|u+c+7} - \dots \tag{31}$$

$$u^c e^u Q(-c, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!\,(c+1)(c+2)\dots(c+\nu)}{Q_\nu Q_{\nu+1}}, \tag{32}$$

jejichž zvláštní případy ($u = 1$) jsou u TANNERYHO; přitom značí

$$Q_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} u\,(c+\mu+1)(c+\mu+2)\dots(c+\nu), \tag{k}$$

$$(u > 0;\ c \text{ reální}).$$

LERCH vychází z integrálu[47])

$$\Phi(a) = \int_0^1 e^{-\frac{ux}{1-x}} x^{a-1} (1-x)^{c-1}\,dx.$$

Funkce $X_a = \Phi(a) : \Phi(a+1)$ splňuje relaci

$$aX_a = u + 2a + c + 1 - \frac{a+c+1}{X_{a+1}},$$

která při opětovném použití vede ke konečnému řetězovému zlomku

$$a X_a = u + c + 2a + 1 - \frac{(c+a+1)(a+1)|}{|u+c+2a+3} - \frac{(c+a+2)(a+2)|}{|u+c+2a+5} - \dots$$

s posledním členem $-(c+a+\nu)(a+\nu) : \left(u+c+2a+2\nu+1 - \dfrac{c+a+\nu+1}{X_{a+\nu+1}}\right)$.

Odtud a ze vztahů

$$u^c e^u Q(-c, u) = \Phi(1) = 1 : \left(u + c + 1 - \frac{c+1}{X_1}\right)$$

vychází konečný řetězový zlomek:

$$u^c e^u Q(-c, u) = \frac{1|}{|u+c+1} - \frac{1(c+1)|}{|u+c+3} - \frac{2(c+2)|}{|u+c+5} - \frac{3(c+3)|}{|u+c+7} - \dots \tag{l}$$

s posledním členem $-\nu(c+\nu) : \left(u + c + 2\nu + 1 - \dfrac{c+\nu+1}{X_{\nu+1}}\right)$.

Jádrem LERCHOVY úvahy je důkaz, že lze vzorec (l) nahradit nekonečným řetězovým zlomkem (31). LERCH postupuje takto:

Nejprve nahradí vzorec (l) rovnicí

$$u^c e^u Q(-c, u) = \left(P_{\nu+1} - \frac{c+\nu+1}{X_{\nu+1}} P_\nu\right) : \left(Q_{\nu+1} - \frac{c+\nu+1}{X_{\nu+1}} Q_\nu\right),$$

v níž čísla $P_\nu$, $Q_\nu$ jsou definována formulemi

$$P_{\nu+1} = (u + c + 2\nu + 1) P_\nu - \nu(c+\nu) P_{\nu-1},$$

$$Q_{\nu+1} = (u + c + 2\nu + 1)\, Q_\nu - \nu\,(c + \nu)\, Q_{\nu-1},$$

$$P_0 = 0,\ P_1 = 1;\ Q_0 = 1,\ Q_1 = u + c + 1;$$

dále určí explicitní vyjádření čísel $Q_\nu$ ve tvaru (k) pomocí vytvořující funkce

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{c + n};\quad a_n = \frac{\Gamma(c)\, Q_n}{n!\,(c + n)},$$

a zjistí, že $e^{-x} f(x)$ vyhovuje BESSELOVĚ diferenciální rovnici $x \,.\, y'' + (c + 1)\, y' - u \,.\, y = 0$; dále zjistí platnost nerovností:

$$0 < u^c e^u Q(-c, u) - \frac{P_{\nu+1}}{Q_{\nu+1}} < \frac{\nu!\,(c+1)(c+2)\ldots(c+\nu+1)}{u \,.\, Q_\nu\, Q_{\nu+1}},$$

a konečně ukáže, že poslední člen s rostoucím $\nu$ konverguje k 0, takže

$$u^c e^u Q(-c, u) = \lim_{\nu \to \infty} P_{\nu+1} : Q_{\nu+1}. \tag{m}$$

Vzorec (32) plyne snadno z rovnice

$$P_{\nu+1} Q_\nu - P_\nu Q_{\nu+1} = \nu!\,(c + 1)(c + 2)\ldots(c + \nu)$$

a ze vztahu (m).

Tyto úvahy platí pro $u > 0$, $c > 0$, avšak lze je snadno modifikovat v případě $u > 0$, $c \leqslant 0$, takže výsledky platí, jak bylo výše uvedeno, pro $u > 0$, $c$ reální.

Ze vzorců (31), (32) plynou následující rozvoje integrállogaritmu ($c = 0$)[48])

$$-e^u \cdot \mathrm{li}(e^{-u}) = \frac{1|}{|u + 1} - \frac{1 \cdot 1|}{|u + 3} - \frac{2 \cdot 2|}{|u + 5} - \frac{3 \cdot 3|}{|u + 7} - \ldots \tag{33}$$

$$-e^u \cdot \mathrm{li}(e^{-u}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu + 1)\, \varphi_\nu(u)\, \varphi_{\nu+1}(u)} \tag{34}$$

při označení

$$\varphi_\nu(u) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \frac{u^\mu}{\mu!};\quad \varphi_0 = 1,$$

a dále rozvoje KRAMPOVY transcendenty $L\left(c = -\frac{1}{2}\right)$:

$$e^{u^2} \cdot L(u) = \frac{u|}{|2u^2 + 1} - \frac{1 \cdot 2|}{|2u^2 + 5} - \frac{3 \cdot 4|}{|2u^2 + 9} - \frac{5 \cdot 6|}{|2u^2 + 13} - \ldots \tag{35}$$

$$e^{-u^2} \cdot L(u) = \frac{u}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{2^\nu Q_\nu Q_{\nu+1}}, \tag{36}$$

při označení

$$Q_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} u^{2\mu} \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\left(\mu + \frac{3}{2}\right)\cdots\left(\mu + \frac{2\nu - 1}{2}\right);\quad Q_0 = 1.$$

27. Další LERCHŮV přínos k theorii funkce $Q$ jest uveřejněn v práci [203] a spočívá v úvahách, které se týkají přechodu od vyjádření funkce $\Gamma$ EULE-

ROVÝM součinem k integrálnímu vyjádření funkce $Q$. LERCH úvodem připomíná ([203], 8), že základní vlastnosti funkce $Q(s)$, pokud je definována vzorci:

$$Q(s) = \Gamma(s) - P(s); \quad P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(s+n)},$$

se dají snadno odvodit výhradně prostředky funkční teorie, avšak nepodařilo se do té doby integrální vyjádření funkce $Q$ bez použití EULEROVA integrálu pro funkci $\Gamma$. LERCHŮV postup k tomuto cíli je významný, protože vede k obecnému metodickému principu značného dosahu pro vyšetřování meromorfních funkcí.

LERCH vychází od rozvoje funkce $\omega^{-s} P(s)$ podle MITTAG-LEFFLEROVY věty:

$$\omega^{-s} P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^n}{n!\,(s+n)} + \text{celá funkce } (s), \quad (\omega > 0)$$

který ho vede k tomu, aby nahradil PRYMŮV rozklad funkce $\Gamma(s)$ následujícím vzorcem

$$\Gamma(s) = P(s, \omega) + Q(s, \omega);$$

přitom značí

$$P(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{s+n}}{n!\,(s+n)}$$

a $Q(s, \omega)$ celou funkci $(s)$. Tím jest umožněno vyšetřovat funkci $Q(s, \omega)$ v závislosti na parametru $\omega$ a dodatečně přejít k původní funkci volbou $\omega = 1$.

Z uvedených vzorců vychází:

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} = e^{-\omega} \omega^{s-1}; \quad \frac{\partial Q}{\partial \omega} = -e^{-\omega} \omega^{s-1}$$

a odtud plyne

$$Q(s, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx + f(s),$$

při čemž $f(s)$ značí rovněž celou funkci.

Dále LERCH ukáže, že funkce $\Phi(s) = f(s) : \Gamma(s)$ je celá a periodická s periodou 1, takže platí rozvoj:

$$\Phi(s) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu\, e^{2\nu s\pi i};$$

potom pomocí odhadu čísel $|c_\nu|$ $(\nu \neq 0)$ a hodnoty $|1 : \Gamma(s)|$ (na základě vyjádření funkce $\Gamma$ EULEROVÝM součinem) dochází k výsledku $c_0 = c_\nu = 0$ a tedy k identické rovnosti $f(s) = 0$. Odtud plyne (pro $\omega = 1$) integrální vyjádření funkce $Q$.

Základní myšlenka této úvahy vede k obecnému metodickému principu pro vyšetřování meromorfních funkcí. LERCH jej formuluje takto ([203], 12):

„Es sei nun $\Phi(s)$ eine Funktion, die in der ganzen Ebene den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, oder vielmehr derjenige Teil der Mittag-Leffler'schen Darstellung, der sich von einer solchen Funktion bloß um eine ganze Transzendente unterscheidet;

die Funktion $\Phi(s)$ ist eine in der ganzen Ebene gleichmäßig konvergierende Reihe von rationalen Funktionen, so beschaffen, daß jeder Unendlichkeitsstelle von $\Phi(s)$ ein Glied der Reihe entspricht. Ist z. B. $-a$ eine Unendlichkeitsstelle von $\Phi(s)$, so ist das derselben entsprechende Glied der Reihe ein Aggregat von Gliedern wie

$$\Psi(s) = \frac{1}{(s+a)^m}$$

wozu noch eine ganze rationale Funktion hinzukommen kann.

Nun ist aber, falls $\omega$ eine positive reelle Größe bedeutet,

$$\omega^{-s}\,\Psi(s) = \omega^a \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu (\log \omega)^\nu}{\nu!\,(s+a)^{m-\nu}} + \text{ganze Funkt.}\,(s),$$

und somit auch

$$\Psi(s) = \Psi(s, \omega) + \text{ganze Funkt.}\,(s),$$

wenn

$$\Psi(s, \omega) = \omega^{s+a} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu (\log \omega)^\nu}{\nu!\,(s+a)^{m-\nu}}$$

gesetzt wird.

Führt man nun in die Entwicklung $\Phi(s)$ an Stelle der Elemente $\Psi(s)$ die entsprechende Ausdrückeo $\Psi(s, \omega)$ ein, so entsteht eine neue Funktion $\Phi(s, \omega)$, und diese hat die Eigenschaft, daß die partielle Ableitung

$$\frac{\partial\,\Phi(s, \omega)}{\partial\,\omega} = f(s, \omega)$$

eine ganze Funktion von $s$ ist, und es wird daher $\Phi(s, \omega)$ als analytische Fortsetzung eines Integrals

$$\int_a f(s, \omega)\,d\omega$$

aufgefaßt werden können, sobald $\Phi(s, a)$ identisch verschwindet.“

LERCH aplikuje tento princip na vyšetřování funkce

$$F(s) = \Gamma(s)\,\Gamma(s+a), \quad (a \text{ není celé})$$

jejíž meromorfní část v MITTAG-LEFFLEROVĚ rozvoji je dána vzorcem

$$\Phi(s) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m+1-a)\,(s+m)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+1+a)\,(s+a+n)}\right\},$$

takže funkce $F(s) - \Phi(s)$ je celá. Příslušná funkce závislá na parametru je

$$\Phi(s, \omega) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega^{s+m}}{m!\,\Gamma(m+1-a)\,(s+m)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{s+a+n}}{n!\,\Gamma(n+1+a)\,(s+a+n)}\right\}.$$

Výsledkem LERCHOVA vyšetřování jsou vzorce:

$$\Gamma(s)\,\Gamma(s+a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \int_0^\infty x^{s-1} dx\,[E(x, -a) - x^a\,E(x, a)], \tag{37}$$

$$\Gamma(s)\,\Gamma(s+a) = \Phi(s,\omega) + \frac{\pi}{\sin a\pi}\int\limits_{\omega}^{\infty} x^{s-1}\,dx\,[E(x,-a) - x^a E(x,a)], \quad (38)$$

$$\Gamma(s)\,\Gamma(s+a) = \Phi(s,\omega) + 2\int\limits_0^1 \frac{(t^{2a}+1)\,t^{2s-1}}{(t^2+1)^{2s+a}}\,Q\left(2s+a, \frac{t^2+1}{t}\sqrt{\omega}\right)dt, \quad (39)$$

$$(\mathrm{Re}\, s > 0,\ \mathrm{Re}\,(2s+a) > 0),$$

a jejich důsledky pro nekonečně malá $a$, $s$; zejména ($a \to 0$)

$$\Gamma(s)^2 = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1}\,dx\left[2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{m!\,m!}\,x^m - \log x\,.\,E(x,0)\right]. \quad (40)$$

Přitom $E(x, u)$ značí besselovskou funkci: $E(x,u) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{x^m}{m!\,\Gamma(u+m+1)}$
a $\psi$ logaritmickou derivaci funkce $\Gamma$.

28. LERCHOVY úvahy týkající se transcendenty $L$ a integrállogaritmu obsahují mimo výsledků získaných v souvislosti s vlastnostmi funkce $Q$, jak o nich byla výše řeč, ještě několik dalších výsledků, které plynou z jiných pramenů. Mimo drobnosti v práci [203], v níž je z EULEROVY rovnice [v. (a)] odvozen SCHENDELŮV vzorec[49])

$$\mathrm{li}\, e^{-\omega} = C + \log\omega - e^{-\omega}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{s_\nu\,\omega^\nu}{\nu!}$$

$$\left(C = -\Gamma'(1);\ s_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu}\right),$$

jde o výsledky obsažené v pracích [150], [192], [205].

Práce [150] obsahuje elementární odvození vzorce

$$L(u+w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-w^2-2uw}\cdot\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,\frac{w\cdot\cos 2ux - x\cdot\sin 2ux}{w^2+x^2}\,dx \quad (41)$$

$$(u \geqq 0,\ w > 0)$$

a jeho zvláštních případů pro $u = 0$, $w \to 0$; zejména (pro $w \to 0$)

$$L(u) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,\frac{\sin 2ux}{x}\,dx \quad (42)$$

Z tohoto vztahu vychází po několika elementárních operacích formule:

$$\mathrm{li}\,(e^{-u}) = \frac{1-e^{-u}}{u} - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{u}\,dx, \quad (43)$$

$$(u > 0).$$

V práci [192] je nejprve odvozen elementárními prostředky vzorec

$$\int_0^\infty e^{-u\left(x+\frac{1}{x}\right)} \log x \frac{dx}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{\pi}{u}} \cdot e^{2u} . \operatorname{li}(e^{-4u}) \tag{44}$$

$$(u > 0).$$

Hlavním výsledkem této práce je rovnice:

$$[C + \mathfrak{L}(x)] . [C + \mathfrak{L}(-x)] = C^2 - 2 \sum_s \left[\psi(s+1) + \frac{1}{s}\right] \frac{x^s}{s!\,s}, \tag{45}$$

$$(s = 2, 4, 6, 8, \ldots)$$

v níž značí:

$$C = -\Gamma'(1); \quad \mathfrak{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!\,n}; \quad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

a která plyne aplikací vzorce (1) na funkci $f(x, u) = F(x, u + 1) : u$ a porovnáním členů nezávislých na $u$, $v$.

V souvislosti s rovnicí (45) LERCH píše ([192], 133):

„Wegen der bekannten Gleichungen

$$\operatorname{li}(e^x) = \log x + C + \mathfrak{L}(x),$$
$$\operatorname{li}(e^{-x}) = \log x + C + \mathfrak{L}(-x),$$

scheint die ganze Transzendente

$$C + \mathfrak{L}(x)$$

als das einfachste Element der Theorie des Integrallogarithmus zu betrachten sein. Eine Bestätigung hievon läßt sich nur von der Weiterentwicklung der Theorie erwarten, falls überhaupt einfache Eigenschaften dieser bisher zu wenig elastischen Transzendente erwartet werden können."

V práci [205] LERCH vychází z transformačního vzorce pro funkci $\sum_{m=0}^{\infty} z^{m+x}$: $: (m + x)$ (III (19)) a elementárními úsudky dochází k formulím:

$$\operatorname{li}(e^{-a}) = -\lim_{x \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[1 - \varphi(x)]^{m+x}}{m + x}, \quad [\varphi(x) > 0]; \tag{46}$$

$$\operatorname{li}(e^a) = \log a + \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{\nu=1}^{n} \frac{[1 + \varphi(n)]^\nu}{\nu} - \log n \right) \tag{47}$$

a k jejich důsledkům pro $\varphi(n) = a : n$ ($n$ přirozené); přitom $\varphi$ značí libovolnou funkci vyznačující se tím, že $\lim_{x \to \infty} x \cdot \varphi(x) = a$ resp. $\lim_{n \to \infty} n . \varphi(n) = a$ $(< \infty)$.

Řada drobnějších výsledků týkajících se integrállogaritmu, zaměřených zejména k numerickým výpočtům, jest obsažena též v práci [233].

## V. *Eulerova konstanta.*

29. EULEROVA konstanta ($C$) se obvykle definuje některým vzorcem:

$$C = -\Gamma'(1); \quad C = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} - \log n \right).$$

V LERCHOVÝCH spisech se setkáváme na několika místech s novými vyjádřeními EULEROVY konstanty pomocí nekonečných řad nebo omezených integrálů nebo limit funkcí. LERCH dochází k těmto výsledkům buď ve zvláštních pojednáních věnovaných této otázce ([131], [132]) nebo jako k důsledkům šíře založených úvah ([134], [151], [154]).[50])

V práci [131] LERCH odvodil vyjádření EULEROVY konstanty pomocí nekonečné řady ve tvaru:

$$\log 2 \cdot \left(C - \frac{1}{2}\log 2\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}} \left(\nabla^{\nu} \frac{\log w}{w}\right)_{w=1} \tag{1}$$

při čemž $\nabla$ značí operaci definovanou vzorci $\nabla f(w) = f(w) - f(w+1)$, $\nabla^{\nu+1} = \nabla(\nabla^{\nu})$. Toto vyjádření plyne snadno z elementárního vzorce

$$(1 - 2^{1-s}) \, . \, \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} \, dx$$

při použití rozvoje funkce $1 : (e^x + 1)$ podle mocnin funkce $1 - e^{-x}$.

Práce [132] obsahuje elementární důkaz toho, že se součty nekonečných řad

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\log \nu}{\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\log^2 \nu}{\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\log^3 \nu}{\nu}, \ldots$$

dají vyjádřit pomocí limit

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} - \log n\right); \quad \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\log \nu}{\nu} - \frac{1}{2}\log^2 n\right);$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\log^2 \nu}{\nu} - \frac{1}{3}\log^3 n\right), \ldots$$

V nejjednodušších případech vychází de la VALLÉE-POUSSINOVO vyjádření EULEROVY konstanty ve tvaru[51])

$$\log 2 \cdot \left(C - \frac{1}{2}\log 2\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\log \nu}{\nu} \tag{a}$$

a dále vzorec:

$$2 \, . \log 2 \, . \left(K + C \frac{\log 2}{2} - \frac{\log^2 2}{6}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\log^2 \nu}{\nu}, \tag{2}$$

v němž $K$ značí druhou z uvedených limit.

Rovněž práce [151] obsahuje nová vyjádření EULEROVY konstanty pomocí nekonečných řad:

$$C = -\frac{\pi}{2} - \log \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \log 2 + 2 \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{\log(\nu+1)}{\sqrt{\nu+1}}\right] : \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{\nu+1}}\right], \tag{3}$$

$$C = -\log 2\pi + \frac{\pi}{2} + 2\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{\log(2\nu+1)}{\sqrt{2\nu+1}}\right] : \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{2\nu+1}}\right]. \tag{4}$$

Přes formální podobnost plynou tyto vzorce z podstatně různých pramenů. Vzorec (3) vychází bezprostředně z derivací RIEMANNOVY reciprocity

$$\zeta(1-s) = \zeta(s) \cdot \frac{1}{2(2\pi)^{s-1} \cdot \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s)}$$

a elementárního vztahu:

$$(1-2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^s}$$

v čísle $s = \frac{1}{2}$ a z rovnosti

$$2\,\frac{\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} = C + \frac{\pi}{2} + \log 8\pi. \tag{b}$$

Hlouběji je založen vzorec (4). LERCH vyšetřuje funkci $P$ určenou formulí

$$P(D, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

v níž značí $D$ ($\neq 0$) celé číslo, které je hlavním diskriminantem, $\left(\frac{D}{n}\right)$ JACOBIOVO znaménko a $s$ reální číslo $> 1$. Pro tuto funkci odvozuje vztah[52])

$$\left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^s P(D, s) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \Gamma(1-s)\, A(D, s)\, P(D, 1-s)$$

$$\left(\Delta = |D|;\quad 0 < s < 1;\quad A(D, s) = \sin\left(\frac{1-\operatorname{sgn} D}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{s\pi}{2}\right)\right)$$

a z něj logaritmickým derivováním:

$$2\,\frac{P'\left(D, \frac{1}{2}\right)}{P\left(D, \frac{1}{2}\right)} = C + \log \frac{8\pi}{\Delta} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} D.$$

Odtud vychází vzorec (4) pro $D = -4$.[53])

V práci [134] jsou tři vyjádření EULEROVY konstanty pomocí integrálů funkcí závislých na eliptických transcendentách $\vartheta_0(0 \mid iz)$, $\vartheta_2(0 \mid iz)$, $\vartheta_3(0 \mid iz)$:

$$C = \log \frac{\pi}{4} + \int_1^{\infty} \frac{\vartheta_0(0 \mid iz) + \vartheta_2(0 \mid iz)\sqrt{z} - 1}{z}\, dz \tag{5}$$

$$C = \log 4\pi - 2 + \int_1^{\infty} (\vartheta_3(0 \mid iz) - 1)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right) dz, \tag{6}$$

$$C = \log \pi - 1 + \int_4^{\infty} \frac{\vartheta_3(0 \mid iz) - 1}{z}\, dz + \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{\vartheta_3(0 \mid iz) - 1}{\sqrt{z}}\, dz, \tag{7}$$

a dále vyjádření nekonečnou řadou:

$$C = \log \frac{\pi}{4} + 2 \sum_{n} (-1)^n \int_{n^2\pi}^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{z} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{m} \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{4}m^2\pi}^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}}. \tag{8}$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, \ldots;\ m = 1, 3, 5, 7, \ldots).$$

Vzorce (5), (6), (7) jsou přímými důsledky LERCHOVA vyjádření funkce $\psi(u) + \psi(1 - u)$ integrály $\int_0^a dz \,.\, \vartheta_3(u \mid iz) : z$, $\int_a^\infty dz \,.\, [\vartheta_3(u \mid iz) - 1] : z$ [v. III (5)] pro $a = 1$ a $u = \frac{1}{2}$ nebo $u \to 0$; vzorec (8) se obdrží ze vztahu (5) tím, že se funkce $\vartheta_0(0 \mid iz)$, $\vartheta_2(0 \mid iz)$ vyjádří příslušnými nekonečnými řadami.

V práci [154] nacházíme vyjádření EULEROVY konstanty integrálem:

$$C = \log \pi + \int_0^\infty \left[\frac{2}{e^t - 1} - \frac{4}{t(t + 2)}\right] \frac{dt}{t} \tag{9}$$

a dále vzorec

$$C = \lim_{x \to \infty} \left[- \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n}\right]. \tag{10}$$

Formule (9) je zvláštním případem ($a = 2$) vztahu

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t(a + t)} + \frac{a - 2}{2a^2} e^{-t}\right] \frac{dt}{t} = \frac{C + \log a}{a^2} - \frac{\log \sqrt{2\pi}}{a},$$

který vznikne integrací podle $v$ od 0 do 1 dříve uvedené LERCHOVY rovnice [v. II (13)]; vzorec (10) vychází z formule (9) jednoduchou transformací.

## VI. *Neúplná funkce beta*

30. Neúplná funkce beta jest určena integrálem

$$\mathfrak{M}(a, b) = \int_0^\omega x^{a-1} (1 - x)^{b-1} \, dx$$

$$(\operatorname{Re} a > 0;\ \operatorname{Re} b > 0;\ 0 < \omega < 1).$$

Ve svých spisech se LERCH tímto integrálem zabývá v krátké práci [58]. Jeho hlavním výsledkem jsou rozvoje funkce $\mathfrak{M}$ v nekonečné řady:

$$\mathfrak{M}(a, b) = \omega^a (1 - \omega)^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + b, \nu)}{(a, \nu + 1)} \omega^\nu \tag{1}$$

$$(0 < \omega < 1),$$

$$\mathfrak{M}(a, b) = \omega^a \omega_1^b \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a + b, 2\nu)}{(a, \nu)(b, \nu)} \omega^\nu \omega_1^\nu \left[\frac{\omega_1}{a + \nu} - \frac{\omega}{b + \nu}\right] \tag{2}$$

$$\left(\omega_1 = 1 - \omega; \quad 0 < \omega < \frac{1}{2}\right);$$

přitom značí: $(s, n) = s\,(s+1)\ldots(s+n-1)$, $(s, 0) = 1$.

Východiskem k těmto výsledkům je redukční vzorec

$$\mathfrak{M}\,(a, b) = \frac{\omega^a\,(1-\omega)^b}{a} + \frac{a+b}{a}\,\mathfrak{M}\,(a+1, b), \tag{a}$$

který plyne přetvořením integrálu $\mathfrak{M}$ částečnou integrací. Opětovným použitím tohoto vzorce ($n$-krát) a přechodem $n \to \infty$ se obdrží rozvoj (1). Obdobným způsobem vyjde rozvoj (2) při současném použití vzorce (a) a analogického vztahu mezi integrály $\mathfrak{M}\,(a, b)$ a $\mathfrak{M}\,(a, b+1)$.

V průběhu svých úvah LERCH v téže práci dochází ještě k několika dalším výsledkům, zejména k relaci

$$\int_0^\omega x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\omega^a\,(1-\omega)^b\,\Gamma\,(a)}{\Gamma\,(a+b)\,\Gamma\,(1-b)} \int_0^1 t^{a+b-1}\,(1-t)^{-b}\,\frac{dt}{1-t\,\omega} \tag{3}$$

$$(0 < \operatorname{Re} b < 1),$$

která vychází bezprostředně porovnáním hořejšího rozvoje (1) s jedním starším výsledkem SCHAEFFEROVÝM[54]).

Poznámky.

[1]) V seznamu JOS. ŠKRÁŠKA jest uveden rok vydání této práce nesprávně 1899. Správně má býti 1889, takže práce měla míti v seznamu pořadové číslo 53.

[2]) M. GODEFROY, La fonction gamma. Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, 1901.

[3]) Ch. HERMITE-T. J. STIELTJES, Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, I, II. Paris, 1905.

[4]) N. NIELSEN, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig, 1906.

[5]) E. T. WHITTAKER a. G. N. WATSON, A Course of Modern Analysis, 3[d] Ed. Cambridge, 1920.

[6]) G. BRUNEL, Bestimmte Integrale. *Encyklopädie der Math. Wissenschaften* II, II A 3, 135—188. Leipzig. 1899—1916.

[7]) VAN DER POL, Note on the Gamma Function. *Canadian Journ. of Math.*, VI (1954), 18—22.

[8]) T. J. STIELTJES, Sur le développement de log $\Gamma(a)$. *Journ. Math. p. et appl.*, 4[e] série, V (1889), 425—444.

[9]) U LERCHA ([98], 243, 393) jsou v konečné formulaci vzorců (4) a (5) nedopatření.

[10]) K. WEIERSTRASS, Mathematische Werke, I, 194. Berlin, 1894.

[11]) E. ARTIN, Einführung in die Theorie der Gammafunktion. *Hamburger Math. Einzelschriften*, 11. Heft. Leipzig, 1931.

[12]) Název podle GODEFROY, l. c.[2]), 45. LERCH označuje funkci $\tilde{\omega}$ jménem BINETOVÝM ([98], 387); někdy se tato funkce nazývá též GUDERMANNOVA (l. c.[6]), 167).

[13]) L. c. [8]), 426 a n.

[14]) L. c. [7]), 18.

[15]) L. c. [3]), II, 326.

[16]) Některé vztahy, které jsou přímými důsledky hořejších vzorců, byly známy již několik let před LERCHEM. V. l. c.[8]). Ch. HERMITE, Sur une extension de la formule de Stirling. *Math. Ann.* XLI (1893). L. c.[3]), II, 238. V. též LERCHŮV dodatek v práci [101].

[17]) L. c.[3]), II, 238.

[18]) L. c. [4]), 89.

[19]) Cours de M. Hermite, rédigé par M. Andoyer, 4[e] éd. Paris, 1891. Ve 3. vyd. těchto přednášek (1887) jest uveden důkaz BERTRANDŮV, založený na GAUSSOVĚ multiplikační větě.

[20]) *Jornal de Sciencias Math. e Astronom.*, 9 (1889), 21—22.
[21]) F. G. TEXEIRA, Curso de Analyse Infinitesimal, IIª Parte. Porto, 1892.
[22]) L. c.[3]), II, 304.
[23]) Čárka za sumačním znaménkem vpravo znamená, že se vypouští člen s indexem $k = 0$.
[24]) R. LIPSCHITZ, Untersuchungen einer aus vier Elementen gebildeten Reihe. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, 54 (1857). Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen. *Ibid.*, 105 (1889). V. též [28], [156], C, 9.
[25]) Srov. M. MIKOLÁS, Über die Beziehung zwischen der Gammafunktion und den trigonometrischen Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, IV (1953), 145, form. (10).
[26]) Funkce definovaná řadou $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{z^\nu}{\nu^2}$ se nazývá EULERŮV dilogaritmus. V. N. NIELSEN, Der Eulersche Dilogaritmus. *Nova Acta. Abh. der Kaiserl. Leop-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher*, XC. Halle, 1909.
[27]) O. SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis, 4. Aufl., II, 265. Braunschweig, 1895. Dále: LERCH, [191], 47 a [197], 42.
[28]) L. c.[6]), 162. Dále: N. NIELSEN, Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten, III. Leipzig, 1906.
[29]) LERCH, [195], 213. L. c.[4]), 27.
[30]) Srov. V. V. GUSSOV, Přínos ruských učenců v theorii funkce gamma. *Sov. věda, Mat.-fys.-astron.*, III (1953), 559.
[31]) L. c.[3]), I, 247. (V originále je ve vzorci vyjadřujícím funkci $e^{\omega} Q(a)$ chyba ve znaménku).
[32]) V pracích [48], [58] LERCH označuje tento vzorec jako HOČERAVŮV. Srov. l. c.[4]), 28.
[33]) C. F. BJÖRLING (jun.), Elementerne af algebraiska analysen och differentialkalkylen, after Cauchy, Bertrand. Todhunter, Upsala, 1868.
[34]) O. SCHLÖMILCH, Über eine Kettenbruchentwickelung für unvollständige Gammafunctionen. *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, 16 (1871), 261—262.
[35]) Citát LERCHŮV, [210], 119.
[36]) V dopise STIELTJESOVI dne 1. prosince 1888 HERMITE píše (l. c.[3]), I, 304): „. . . M. LERCH m'a fait part d'une méthode simple et élégante, pour exprimer $Q(a)$ au moyen de la série généralisée de Riemann

$$\mathcal{R}(a) = \sum{}' \frac{(\omega + nu)^a}{e^{\omega+nu}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

que je vais vous indiquer, pensant qu'elle vous plaira comme à moi . . ."
O vzorci (10) HERMITE píše dále (l. c., 305): „. . . Ce résultat diffère un peu de celui que j'ai obtenu, en partant de la décomposition que j'ai employée

$$\int\limits_{\omega}^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \sum{}' \int\limits_{\omega+nu}^{\omega+(n+1)u} x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$

en transformant les intégrales par la substitution $x = \omega + nu + t$, mais on le trouvera si l'on pose $x = \omega + (n + 1)\, u - t$, comme vous le verrez immédiatement . . ."
[37]) H. MELLIN, Über die transcendente Function $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$. *Acta mat.*, 2 (1883), 231—232.
[38]) O. SCHLÖMILCH, Über Facultätenreihen. *Zeitschrift f. Math. u. Phys.*, 4 (1859), 401; Vorlesungen über einzelne Teile der höheren Analysis. Branschweig (1866), 266. LERCH ([195], 219) upozorňuje, že SCHLÖMILCHŮV důkaz není správný. Opravou SCHLÖMILCHOVA důkazu se zabýval A. TAUBER, Über die unvollständigen Gammafunktionen. *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, XVII (1906). Poznamenejme, že LERCHOVA práce [195] vyšla ve 3. (t. j. předposledním) čísle 128. svazku *Crelleova journ.* v r. 1905, kdežto rukopis TAUBEROVA článku, v němž LERCH není citován, došel redakci v listopadu 1905 (TAUBER, l. c., 221) a byl uveřejněn v r. 1906.
[39]) Ch. HERMITE, Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, 90 (1881).
[40]) M. KRAUSE, Zur Theorie des Integrallogaritmus. *Archiv d. Math. u. Phys.*, 11 (1907), 41.
[41]) J. TANNERY, Sur les intégrales eulériennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 94 (1882), 1698.
[42]) Podle LERCHA, [210], 144.

[43]) A. M. LEGENDRE, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, II, 509. Paris, 1826. (Citát l. c.[4]), 217).

[44]) E. LAGUERRE, Sur l'intégrale $\int\limits_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$. Oeuvres de Laguerre, I, 428. Paris, 1898.

[45]) P. S. de LAPLACE, Traité de Mécanique céleste. Oeuvres complètes de Laplace, IV, 257. Paris, 1880.

[46]) C. G. J. JACOBI, De fractione continua, in quam integrale $\int\limits_x^\infty e^{-xx}\,dx$ evolvere licet. Gesam. Werke, VI, 76. Berlin 1891.

[47]) Rovněž TANNERY ve zvláštním případě $u = a = 1$.

[48]) První z nich se vyskytuje v podstatě již u LAGUERRA (l. c.[44]), 431).

[49]) L. SCHENDEL, Die Bernoullischen Funktionen und das Taylorsche Theorem. Jena (1876), 36. (Cit. podle N. NIELSEN, Notiz über den Integrallogarithmus. *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, XVI (1905), 7). Srov. též: N. NIELSEN, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, 102. Leipzig, 1904. Sur une intégrale définie. *Math. Ann.*, 59 (1904), 100.

[50]) LERCH ve svých přednáškách uváděl, že se snažil o objasnění aritmetické povahy EULEROVY konstanty, avšak s neúspěchem, neboť v rozhodujících chvílích EULEROVA konstanta z počtů vypadla.

[51]) DE LA VALLÉE-POUSSIN, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, XX, 2[e] partie (1896), 65 (citát LERCHŮV).

[52]) Tento vztah vyskytuje se již u KINKELINA a HURWITZE (LERCH, [151], 5); viz: AD. HURWITZ, Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen $F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Classenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten. *Zeitschrift f. Math. u. Phys.*, XXVII (1882), 86.

[53]) Vzorce (a), (2), (3), (4) jsou vhodné k výpočtu konstant $C$, $K$, jestliže se urychlí konvergence příslušných nekonečných řad pomocí transformační formule:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}{}' (-1)^\nu a_\nu = \sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^n \frac{\Delta^{n-1} a_1}{2^n}.$$

Rovněž vzorce (b) lze výhodně použít k výpočtu čísla $C$ na základě rovnice

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^s} + R(n, s)$$

a s použitím semikonvergentního rozvoje funkce $R(w, s)$ (v. II (29)).

[54]) W. SCHAEFFER, Adnotationes ad seriem

$$1 + \frac{x}{y} v + \frac{x(x+1)}{y(y+1)} v^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)} v^3 + \ldots$$

*Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, 37 (1848), 127.