[19]) A. PRINGSHEIM l. c. sub 10.

[20]) Tuto citaci uvádím také proto, že ozřejmuje souvislost mezi problémy rozvinutelnosti funkce v Taylorovu řadu a funkcemi s omezeným existenčním oborem.

[21]) P. DU BOIS-REYMOND, l. c. sub 15.

[22]) Na př. CH. HERMITE-T. J. STIELTJES, Correspondence, II. díl, 25 a 41.

[23]) L. FRANK, tato práce str. 532.

[24]) Tento český překlad je převzat z [206], kde pojednání [136] vyšlo po třetí v českém překladu K. ČUPRA. PRINGSHEIM odpověděl na LERCHOVO obvinění zvláštním prohlášením, viz L. FRANK l. c. sub 23.

[25]) M. LERCH [215], Dodatek.

[26]) M. LERCH, Zur Bestimmung des analytischen Existenzbereiches in der Theorie der elliptischen Funktionen, *Monatshefte* 11 (1900), 107—113. Tato práce není uvedena v seznamu prací v I. odstavci tohoto referátu.

[27]) M. LERCH [33].

[28]) É. GOURSAT, Fonctions à espaces lacunaires, *Bull. Darboux* 11 (1887); H. POINCARÉ, Fonctions à espaces lacunaires, *Soc. sc. Acta Helsingfors* 12 (1883).

[29]) Viz na př. citovaný výňatek ze [136].

[30]) M. LERCH, [33].

[31]) Viz FRANKŮV referát o sporu LERCHA s PRINGSHEIMEM, L. FRANK, l. c. sub 23.

[32]) A. PRINGSHEIM, Über Functionen, welche in gewissen Punkten . . ., l. c. sub 17.

[33]) Názvy *určující* a *vytvořující* jsou převzaty z LERCHOVÝCH prací.

[34]) Tyto věci jsou velmi podrobně vylíčeny ve známé DOETSCHOVĚ knize Theorie u. Anwendung der Laplacetransformation, Grundlehren der math. Wissenschaften, Berlin, 1932, 8, na niž v tomto směru odkazuji.

[35]) DOETSCH, l. c. sub 34, 33—38.

[36]) M. LERCH, Z počtu integrálního, *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 9, 1—40. Č. 99 Seznamu prací prof. Matyáše Lercha sestaveného J. ŠKRÁŠKEM. Tato práce není uvedena v seznamu prací v I. odstavci tohoto referátu.

[37]) A. OSTROWSKI, Über den Lerchschen Satz, *Jahresber. d. deutschen Math.-Vereinigung*, 37 (1928), 69. V OSTROWSKÉHO pojednání je uvedena rozsáhlá bibliografie důkazů této věty.

S ohledem na fundamentální důležitost LERCHOVY věty zřejmě nedocenil tento LERCHŮV výsledek prof. K. PETR v nekrologu, který o LERCHOVI napsal do *Almanachu České akademie věd a umění*. Cituji doslova: „Konečně uvádím, že v práci ‚O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících' (*Rozpravy Č. Akad.*, sv. I., č. 33, r. 1892) podal nový důkaz věty WEIERSTRASSOVY o vyjádřitelnosti funkcí spojitých řadami polynomů."

[38]) *Fortschritte d. Math.*, XVIII (1886), 347.

JIŘÍ ČERMÁK

LERCHŮV PŘÍNOS K THEORII NEKONEČNÝCH ŘAD

I. *Seznam Lerchových prací týkajících se theorie nekonečných řad*

Tento seznam je vypsán z úplného Seznamu prací prof. Matyáše LERCHA od JOSEFA ŠKRÁŠKA (*Čas. pro pěst. mat.*, 78 (1953), 139—148).

[13] Příspěvky k teorii řad nekonečných, *Zpr. KČSN*, 1885, 174—179.
[19] O soustavách bodů a jejich významu v analysi, *Čas.* 15 (1886), 211—218.
[21] Remarque sur la théorie des séries, *Jorn. de Teix.* 7 (1886), 79—80.
[28] Note sur la fonction $\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k x \pi i}}{(w+k)^s}$, *Acta* 11 (1887), 19—24.

[52] Prost dokaz jednog osobenog slučaja Ermakovl'eve teoreme, koja se tiče zbirlivosti redova, *Glas* 11 (1889), 21—25.
[56] Bemerkung zur Reihentheorie, *Zpr. KČSN* 1890, 219—221.
[63] Obecné kriterium konvergence nekonečných řad a integrálů, *Čas.* 20 (1891), 285—293.
[64] Poznámky k Schendelovu zobecnění řady Taylorovy, *Věst. ČA* 1 (1891), 78—84.
[67] Sur une série, *Jorn. de Teix.* 10 (1891), 103—105.
[70] Zur Theorie der unendlichen Reihen, *Zpr. KČSN* 1891, 250—254.
[74] O vlastnostech nekonečné řady $\varphi(x, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n - a}$, *Čas.* 21 (1892), 65—68.
[80] Sur la différentiation des séries, *Jorn. de Teix.* 11 (1892), 107—114.
[82] Základové teorie Malmsténovských řad, *Rozpr. ČA* 1 (1892), č. 27, 1—70.
[87] O rekurentní rovnici $c_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} c_\nu$, *Čas.* 22 (1893), 31—33.
[91] Studie v oboru Malmsténovských řad a invariantů forem kvadratických. *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 4, 1—12.
[92] Sur deux transcendantes considerées par Legendre, *Věst. KČSN* 1893, č. 25, 1—5.
[95] Sur une intégrale définie qui représente la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Mathematical Papers Read at the International Congres Chicago 1893, 165—166.
[101] Další studie v oboru Malmsténovských řad, *Rozpr. ČA* 3 (1894), č. 28, 1—61.
[103] Nová analogie řady theta a některé zvláštní hypergeometrické řady Heineovy, *Rozpr. ČA* 3 (1894), č. 5, 1—10.
[105] Sur la différentiation des séries trigonométriques, *CR* 119 (1894), 725—728.
[110] Zur Theorie der Kronecker'schen Doppelreihe Ser $(\zeta, \eta, \mu, \nu, \omega)$, *Monatsh.* 5 (1894), 367—379.
[112] Nouvelle analogie de la série théta et quelques séries hypergéométriques de Heine, *Bull. ČA* 1 (1895), 1—9.
[116] Sur la différentiation d'une classe de séries trigonométriques, *Ann. Ec. norm.* (3), 12 (1895), 351—361.
[120] O abelovské transformaci trigonometrických řad, *Rozpr. ČA* 5 (1896), č. 24, 1—5.
[122] O jistém druhu semikonvergentních rozvojů, *Rozpr. ČA* 5 (1896), č. 18, 1—6.
[124] Pravidla o derivování jisté kategorie řad trigonometrických, *Věst. ČA* 5 (1896), 71—80.
[126] Sur la transformation abélienne des séries trigonométriques, *Bull. ČA* 3 (1896), 40—44.
[127] Sur une espèce de séries semiconvergentes, *Bull. ČA* 3 (1896), 37—40.
[139] Bemerkungen über trigonometrische Reihen mit positiven Coefficienten, *Zpr. KČSN* 1898, č. 23, 1—19.
[144] Sur quelques propriétés d'une transcendante uniforme, Compte rendu du quatrième Congrès scientifique international des catholiques tenu à Fribourg (*Suisse*), Fribourg 1898, 58—69.
[147] Arithmetisches über unendliche Reihen, *Jahresber*, 8 (1899), 217—219.
[148] Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel, *Journ. de Liouv.* (5), 5 (1899), 427—433.
[149] Nouvelle formule pour la différentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques, *Atti* 35 (1899), 54—59.
[151] O některých konstantách z theorie harmonických řad. *Rozpr. ČA* 8 (1899), č. 35, 1—9.
[155] Rychle konvergentní vyjádření některých limit, *Rozpr. ČA* 8 (1899), č. 36, 1—9.
[156] Sur certains développements en séries trigonométriques, *Ann. de Toulouse* 3 (1899), C, 1—11.
[158] Sur les séries de Dirichlet, *CR* 128 (1899), 1310—1311.
[162] Doplněk k nauce o řadách Fourierových, *Rozpr. ČA* 9 (1900), č. 7, 1—15.
[163] O novém druhu analytických výrazů, jež se vyskytují v theorii jistých integrálů, *Rozpr. ČA* 9 (1900), č. 6, 1—17.
[168] Remarque sur la série de Fourier, *Bull. Darboux* (2), 24 (1900), 102—112.
[169] Sur la fonction $\zeta(s)$ pour les valeurs impaires de l'argument, *Jorn. de Teix.* 14 (1900), 65—69.
[175] Démonstration élémentaire de la formule $\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$ *Ens. math.* 5 (1903), 450—453.

[176] Ergänzungen zu dem Aufsatz „Bemerkungen über trigonometrische Reihen mit positiven Coefizienten", *Zpr. KČSN* 1903, č. 38, 1—7.
[189] Sur une série analogue aux fonctions modulaires, *CR* 138 (1904), 952—954.
[204] Sur une application de la théorie de la fonction $R(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(w + \nu)^s}$, *Ann. do Porto*, 2 (1907), 193—197.
[211] Jednoduchý příklad dvojnásobné řady, která nepřipouští výměnu pořadu summačního, *Čas.* 38 (1909), 176.
[216] O novém zobecnění řady Taylorovy a Lagrangeovy, *Rozpr. ČA* 20 (1911), č. 36, 1—14.
[223] O stanovení součinitelů v mocninném rozvoji funkce $\zeta(s)$, *Čas.* 43 (1914), 513 až 522.
[234] O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické řadě $R(w, s)$, *Čas.* 49 (1920), 49—54, 161—173, 273—281.

II. *Obsah a metoda*

LERCHOVY výsledky, o nichž se chceme v tomto článku zmíniti, se týkají především jisté třídy nekonečných řad, které LERCH nazývá malmsténovskými. Jsou to řady tvaru

$$Ml(v, w, u, s) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w + n)^2 + u^2]^{\frac{1}{2}s}} \tag{1}$$

a jejich zvláštní případy. Jednotlivé zvláštní případy těchto řad se často vyskytly v matematické analyse a můžeme bez nadsázky říci, že studium těchto řad tvoří jednu z nejzajímavějších a nejznámějších kapitol klasické analysy a svoji důležitost neztratilo dodnes. Slavná RIEMANNOVA funkce ζ patří také do třídy řad (1).

Jak LERCH sám uvádí, první počátky tohoto studia sahají až k EULEROVI, dále se řadami (1), ovšem hodně specialisovanými, zabývali MALMSTÉN[1]), SCHLÖMILCH[2]), LIPSCHITZ[3]), RIEMANN[4]), HURWITZ[5]) a STIELTJES[6]). Zejména velké zásluhy ve studiu těchto řad si získal MALMSTÉN; právě on a LIPSCHITZ studovali nejobecnější výrazy tvaru (1). Řada, jíž se zabýval LIPSCHITZ, je (v LERCHOVĚ označení)

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{e^{2nv\pi i}}{(w + n)^s}.$$

MALMSTÉN na př. odvodil důležitý vzorec pro imaginární část tohoto výrazu. Řady SCHLÖMILCHOVA, RIEMANNOVA, HURWITZOVA a STIELTJESOVA jsou zvláštní případy řady LIPSCHITZOVY. LERCH před tím než počal studovat řady (1) v úplné obecnosti, zabýval se již dříve řadou $\mathfrak{K}(w, x, s)$ (v práci [28]) a potom řadami tvaru

$$F(x, s, u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{[(x - n)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}}$$

(v práci [156]), které zahrnují mezi sebou jisté řady APPELOVY[7]). Právě zobecněním posledního výrazu dospívá LERCH k řadám (1).

Další skupina prací o nekonečných řadách pochází ze začátků LERCHOVY vědecké dráhy a obsahuje výsledky ze základů theorie nekonečných řad. Jedná se o zobecnění limitních kriterií, Cauchyho odmocninového, D'Alembertova podílového a Raabeova. LERCH tomuto thematu věnoval zejména práci [13], dále práce [19], [21], [56] a [70]. V tomto příspěvku se nebudeme těmito pracemi vůbec zabývati, protože jsou rozebrány a ohodnoceny v článku doc. L. FRANKA „Spor Matyáše LERCHA s Alfredem PRINGSHEIMEM[8]).

Stejně tak se nebudeme v tomto příspěvku zabývati další skupinou prací [105], [116], [124] a [149], které obsahují výsledky týkající se derivování jisté třídy trigonometrických řad. Tyto výsledky jsou zhodnoceny v článku prof. O. BORŮVKY o funkci Γ[9]).

Výsledky zbývajících prací s thematikou z theorie nekonečných řad jsou oproti výsledkům předešlých prací různorodější a nekupí se kolem nějakých centrálních problémů, takže je lze těžko stručným způsobem charakterisovat. Zmíníme se pouze o těch podle našeho názoru nejzajímavějších.

Z uvedeného vysvítá, že název našeho příspěvku nezachycuje docela přesně jeho obsah. Tak výsledky o malmsténovských řadách se vlastně týkají jisté třídy speciálních funkcí, při čemž to, že tyto funkce jsou definovány nekonečnou řadou (1), není tak zcela podstatné. Na druhé straně jsme ponechali stranou některé práce, v kterých se také najdou úseky mající vztah k nekonečným řadám[10]); uvědomíme-li si však, že nekonečné řady jsou základním aparátem matematické analysy, v jehož ovládání byl právě LERCH jedním z největších mistrů, byli bychom pak v pokušení uvésti, že téměř všechny LERCHOVY práce mají vztah k teorii nekonečných řad. Nemožnost tohoto počínání jest však očividná a je tím snad také dostatečně omluven náš způsob výběru látky, který jsme se pokusili provésti se zřetelem k nejvýstižnějšímu podání LERCHOVÝCH výkonů.

III. *Malmsténovské řady a souvisící*

1. Úvodní poznámky. Aby si čtenář mohl učiniti představu o ceně výsledků a cílech, jež sledoval LERCH ve svých pracích, které se zabývají malmsténovskými řadami, uvedu, co LERCH sám napsal v úvodu k základní své práci [82] z tohoto oboru:

„Předmětem úvah našich bude hlavně zvláštní druh řad, z něhož se vyskytly v literatuře jen jednotlivé případy nebo typy, namnoze toliko ojediněle. Ačkoli prvé začátky sahají až k Eulerovi, mám za to, že Malmstén byl prvním, jemuž v tom oboru bylo učiniti první důležité kroky. Po něm následují jména Schlömilch, Lipschitz, Riemann, jímž se inspirovali pp. Hurwitz a Stieltjes. Nejobecnější z těchto řad studovali Malmstén a Lipschitz; p. Appell zabýval se výrazy na první pohled druhu různého od oněch, ale tyto vedly nás (byliť jsme se dříve zabývali výrazy Riemannovými jiným směrem) k zobecnění, od něhož vede jen malý krok ke konečnému typu, jenž tvoří předmět přítomné práce.

Vědecká cena přítomného spisu vězí — jak za to mám — v metodě velmi elementární, pomocí které zde vyvinuty základní vlastnosti veličin, jichž důležitost měřiti bude moci teprve budoucnost. Velká část obyvatelstva, která hledí hlavně k elegantním výsledkům, bude však váhu práce spatřovati v applikacích, jež zde připojeny hlavně kvůli zvýšení interessu. Skutečně podařilo se nám pomocí našich vzorců odvoditi s překvapující jednoduchostí některé znamenité výsledky pana Kroneckera, jichž význam správně vytčen ve spise p. H. Webera (Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, paragr. 112 a násl.) a kromě toho mohli jsme dospěti k jiným výsledkům analogickým, z nichž uvedli jsme ovšem jen případy jednoduché, poněvadž nejzajímavější. Za důležité považujeme též stanovisko, s něhož jsme kroneckerovské řady studovali, poněvadž toto se od onoho předchůdců našich podstatně liší, a v něm tkví příčina jednoduchosti našich metod.“

Dále LERCH uvádí známé mu práce z tohoto oboru a o jejich obsahu říká toto:

„Abychom naznačili obsah prací citovaných autorů, poznamenejme, že Malmstén v pojednání pod 1. uvedeném dokázal pěkný vzorec

$$\int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\cos\left(s \operatorname{arctg} \frac{u}{x}\right)}{(x^2 + u^2)^{\frac{1}{2}s}} du = \frac{\sin a}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} t^{s-1} dt}{e^t + 2\cos a + e^{-t}},$$

jenž vyjádřen jsa řadami (které Malmstén ovšem vytkl jen ve zvláštních případech) obdrží tvar:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu w\pi}{(x+\nu)^s} = (2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\cos\left(2\nu x + 2wx + \frac{s}{2}\right)\pi}{(w+\nu)^{1-s}} - \frac{\cos\left(2\nu x + w\omega' x + \frac{s}{2}\right)\pi}{(w'+\nu)^{1-s}} \right],$$

kde jsme kvůli eleganci nahradili literu a výrazem $2w\pi - \pi$ a kladli $w' = 1 - w$, předpokládajíce veličiny w, x v mezích 0 a 1, podobně jako reálnou část veličiny s.

Řada Lipschitzova byla (v našem označení)

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s}$$

a její pomyslná část splývá (až na označení liter) s levou stranou Malmsténovské relace. Řady Schlömilchova, Riemannova, Hurwitzova, Stieltjesova jsou zvláštní případy výrazu Lipschitzova. Řada studovaná v našem dopisu zní

$$F(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x-m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}}$$

řady Appellovy pak vzniknou odtud specialisováním hodnot s. Od této řady nevalně se liší následující naše řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\nu\pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{1}{2}s}},$$

kterou však dlužno uvažovati vůči krásným aplikacím, o nichž učiněna zmínka výše. Mám za to, že bylo správné nazvati tuto řadu na oslavu švédského matematika, jehož zásluhy o tento druh výrazů dosud zůstaly nepovšimnuty, řadou Malmsténovskou a označit ji Ml (v, w, u, s).“

Slova prvé citace se ovšem v prvé řadě vztahují na pojednání, v nichž LERCH systematicky buduje theorii řad (1) v nejobecnějším tvaru, případně bezprostředně využívá výsledků této obecné theorie. Jsou to zejména pojednání [82], [91] a [101]. Vedle toho publikoval LERCH řadu prací (které vyšly ve velkém časovém rozmezí jak před, tak po uveřejnění prací [82], [91] a [101]), které se zabývají částečnými případy řad tvaru (1) a jejich aplikacemi, i když zdaleka nesledují ten cíl, který LERCH uvádí ve shora citovaném výňatku. Jsou to práce [28], [156], [144], [148], [155], [204], [234] a dále práce [95], [151], [169] a [223]. Poslední čtyři práce jsme uvedli odděleně, protože se týkají nejspeciálnějšího případu řad (1), totiž funkce $\zeta(s)$. Dopis, o němž je zmínka v druhé citaci, jest adresován APPELLOVI a tvoří obsah práce [156].

2. **Obecná theorie.** V základní práci o Malmsténovských řadách [82] definuje LERCH M. ř. výrazem

$$Ml(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\nu\pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{1}{2}s}}. \tag{1}$$

Při vyšetřování vlastností funkce dané touto řadou LERCH předně ukazuje [82], že ji lze vyjádřiti nevlastním integrálem

$$Ml\,(v, w, u, s) =$$

$$= 2 \sin \frac{s\pi}{2} e^{-2vw\pi i} \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{2\pi(wi + w'\sqrt{u^2+x^2})}}{e^{2\pi(wi+\sqrt{u^2+x^2}}-1} + \frac{e^{2\pi v\sqrt{u^2+x^2}}}{e^{2\pi(-wi+\sqrt{u^2+x^2}}-1} \right\} \frac{x^{1-s}\,dx}{\sqrt{u^2+x^2}}, \quad (2)$$

$$1 < Re\, s < 2, \; 0 < v < 1, \; v' = 1 - v, \text{ u reálné.}$$

Na základě tohoto vzorce lze snadno obdržeti trigonometrický rozvoj funkce Ml (v, w, u, s) vůči proměnné w, který má tvar

$$e^{2vw\pi i}\, Ml\,(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{2nw\pi i}, \quad (3)$$

kde zavedeno označení

$$A_n = 2 \sin \frac{s\pi}{2} \int_0^\infty e^{-2\pi|n-v|\sqrt{u^2+x^2}}\, \frac{x^{1-s}\,dx}{\sqrt{u^2+x^2}}. \quad (4)$$

Vyšetření funkční povahy veličiny A_n závisí na vyšetření integrálu vyskytujícího se ve vzorci (4), který, jak LERCH ukazuje, se dá vyjádřit pomocí Besselových funkcí. Ponecháme-li LERCHOVO označení

$$E\,(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,\Gamma(s+n+1)},$$

platí vztah

$$A_n = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\cos\frac{s\pi}{2}} \left[\pi\,|v-n|^{s-1}\, E\left\{u^2\pi^2(v-n)^2, \frac{s-1}{2}\right\} - \right.$$

$$\left. - u^{1-s}\, E\left\{u^2\pi^2(v-n)^2, \frac{1-s}{2}\right\}\right]. \quad (5)$$

Další velmi důležitý výsledek, který je stejně jako shora uvedené obsažen v práci [82], jest důkaz toho, že funkce Ml $(v, w, u, s)\, e^{2vw\pi i}$ jest jakožto funkce proměnné w regulární v jistém pásu obsahujícím reálnou osu a jest periodická s periodou 1. Na základě tohoto výsledku s použitím Laurentovy věty dostává LERCH po několika úpravách opět rozvoj (3)

$$e^{2vw\pi i}\, Ml(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{2nw\pi i},$$

kde nyní

$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x(v-n)\pi i}}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}\, dx. \quad (6)$$

Ze vzorce (6) dostává LERCH pro veličiny A_n různá vyjádření, zejména pomocí Cauchyho věty, a zároveň vyvozuje různé vlastnosti Besselových funkcí, které se při tom nabízejí.

Výraz A_n je tvaru

$$\varphi(z, u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2tzi}\,dt}{(u^2+t^2)^{\frac{s}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2zt\,dt}{(u^2+t^2)^{\frac{s}{2}}},$$

a sice

$$A_n = \varphi(v\pi - n\pi, u, s).$$

Položíme-li pod integračním znamením

$$\frac{1}{(u^2+t^2)^{\frac{s}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \int_0^{\infty} e^{(-u^2+t^2)x}\, x^{\frac{s}{2}-1}\,dx, \quad Re\, u^2 > 0,$$

zaměníme-li dále integrační pořádek a provedeme vnitřní integraci (na př. pomocí Cauchyho věty), dostaneme

$$\varphi(z, u, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-u^2x-\frac{z^2}{x}}\, x^{\frac{s-3}{2}}\,dx,$$

kterýžto výraz jest jedním z nejzajímavějších tvarů, jak LERCH sám říká, v nichž lze integrál A_n vyjádřit. Integrál tento konverguje pro všechna konečná s, pokud reálné části veličin u^2, z^2 jsou kladné.

S pomocí vzorců (7) a (3) obdrží pak LERCH důležitý vzorec

$$e^{2vw\pi i}\, Ml(v, w, u, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nw\pi i} \int_0^{\infty} e^{-u^2x-\frac{\pi^2(v-n)^2}{x}}\, x^{\frac{s-3}{2}}\,dx, \tag{8}$$

$$0 < v < 1, \quad \mathrm{Re}\, u^2 > 0,$$

a na jeho základě dokáže, že $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Ml(v, w, u, s)$ je transcendentní funkce proměnné s, pokud v není celé číslo.

Z (8) vyplyne také vzorec, který byl LERCHEM odvozen již dříve v práci [156] jiným způsobem (pomocí eliptických transcendent).[11])

Přejdeme-li totiž ve vzorci (8) k limitě pro $v = 0$, obdržíme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(w+n)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n\, e^{2nw\pi i},$$

kde

$$K_n = \int_0^{\infty} e^{-n^2x-\frac{u^2\pi^2}{x}}\, x^{\frac{s-3}{2}}\,dx.$$

(Aby řada $Ml(0, w, u, s)$ byla konvergentní, nutno předpokládat $\mathrm{Re}\, s > 1$.)

Poněvadž

$$K_0 = \int_0^{\infty} e^{-u^2x}\, x^{\frac{s-3}{2}}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{u^{s-1}},$$

dostaneme zmíněný vzorec

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Ml\,(0, w, u, s) = \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\;u^{1-s} + 2\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos 2\,n\,w\,\pi. \tag{9}$$

3. Řada $\mathfrak{K}\,(w, x, s)$. Při studiu řad (1) se přirozeným způsobem naskytne příležitost zavésti řadu

$$\mathfrak{K}\,(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\,n\,\pi\,i\,x}}{(w+n)^s}, \tag{10}$$

při čemž je

$$\operatorname{Im} x \geqq 0, \quad 0 < w < 1, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Poznamenejme, že řada na pravé straně je konvergentní pro každou hodnotu s, jestliže $\operatorname{Im} x > 0$; když $\operatorname{Im} x = 0$, vyžaduje konvergence $\operatorname{Re} s > 1$.

Přejděme ve vzorci (2) k limitě pro $u = 0$.

Z tohoto vzorce dostaneme pro funkci

$$Z\,(v, w, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\,n\,v\,\pi\,i}}{(w+n)^s}, \quad 0 < w < 1,\; 0 < v < 1,$$

vyjádření nevlastním integrálem, z něhož vyplyne zajímavá reciproční formule

$$e^{2\,v\,w\,\pi\,i}\,Z\,(v, w, s) = (2\,\pi)^{s-1}\,2\sin\frac{s\,\pi}{2}\,\Gamma\,(1-s)\,Z\,(1-w, v, 1-s),$$

jejíž další analysou LERCH konečně dostane důležitý Lipschitzův vzorec

$$\mathfrak{K}\,(w, x, 1-s) =$$
$$= \frac{\Gamma\,(s)}{(2\,\pi)^s}\left\{e^{\pi i\left(\frac{s}{2}-2\,w\,x\right)}\,\mathfrak{K}(x, -w, s) + e^{\pi i\left[-\frac{s}{2}+2\,w\,(1-x)\right]}\,\mathfrak{K}\,(1-x, w, s)\right\}, \tag{11}$$

který platí za předpokladu $\operatorname{Im} x \geqq 0$, $0 < w < 1$, $\operatorname{Re} s > 1$, kde funkce $\mathfrak{K}$ je dána řadou (10).

Vzorec (11) odvodil LERCH několikrát různými způsoby. V práci [82] je odvozen ještě dvakrát. Jednou přímo tak, že rozloží funkci

$$f\,(w) = e^{2\,w\,x\,\pi\,i}\,\mathfrak{K}\,(w, x, 1-s)$$

v trigonometrickou řadu, po druhé na základě jednoho dosti komplikovaného integrálního vyjádření funkce $\mathfrak{K}$ pomocí Cauchyho věty. Stejná myšlenka důkazu je použita v práci [28], kde LERCH odvodil vzorec (11) po prvé. Tato práce je ostatně také chronologicky první, kterou LERCH funkci $\mathfrak{K}$ věnoval, a zmíníme se o ní podrobněji.

Funkce $\mathfrak{K}$ je zde definována řadou (10).

Použitím známého vzorce

$$\int_0^{\infty} e^{-(w+k)\,z}\,z^{s-1}\,dz = \frac{\Gamma\,(s)}{(w+k)^s}$$

dostane LERCH rovnici[12])

$$\Gamma(s)\,\mathfrak{R}(w, x, s) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-wz}\, z^{s-1}}{1 - e^{2\pi i x - z}}\, dz. \tag{12}$$

Dále uvažuje integrál

$$\mathrm{K}(w, x, s) = \int\limits_{(\infty, 0, \infty)} \frac{e^{-wz}\, z^{s-1}}{1 - e^{2\pi i x - z}}\, dz$$

po uzavřené křivce, která obchází počátek kružnicí o poloměru α a neobsahuje ani uvnitř, ani na obvodu body $2\pi i(x + \nu)$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Integrál $K(w, x, s)$ existuje pro každé konečné s a je celistvou transcendentní funkcí této proměnné. LERCH integrál $K(w, x, s)$ vhodně rozloží na součet integrálů po částech zmíněné křivky a provede limitu pro $\alpha \to 0$. Obdrží vztah

$$\mathfrak{R}(w, x, s) = e^{-s\pi i}\, \Gamma(1 - s)\, \frac{1}{2\pi i}\, K(w, x, s), \tag{13}$$

z něhož bezprostředně vychází první důležitý výsledek, že funkce $\mathfrak{R}$ je celistvou transcendentou proměnné s.[13])

Druhý důležitý výsledek práce [28] je již zmíněné odvození LIPSCHITZOVA vzorce (11). K jeho odvození používá LERCH věty o residuích (CAUCHY), kterou aplikuje na integrál $K(w, x, s)$.

Po jednoduché úpravě dostane vzorec:

$$K(w, x, s) = -2\pi i\, e^{-2\pi i w x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i w k}}{\{2\pi i(x + k)\}^{1-s}}. \tag{14}$$

Za předpokladu, že $0 < Re\, x < 1$, platí rovnice

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi i w}}{\{2\pi i(x + k)\}^{1-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi i w}}{\{2\pi i(x + k)\}^{1-s}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\pi i w}\, e^{2k\pi i w}}{\{-2\pi i(1 - x + k)\}^{1-s}},$$

pomocí níž se snadno odvodí vzorec

$$\frac{i\, e^{2\pi i w x}}{(2\pi)^s}\, K(w, x, s) = e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi i w}}{(x + k)^{1-s}} + $$

$$+ e^{2\pi i w + \frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i w}}{(1 - x + k)^{1-s}}.$$

Z něj plyne

$$\frac{i\, e^{2\pi i w x}}{(2\pi)^s}\, K(w, x, s) = e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)}\, \mathfrak{R}(x, -w, 1 - s) +$$

$$+ e^{2\pi i w - \frac{3\pi i}{2}(1-s)}\, \mathfrak{R}(1 - x, w, 1 - s)$$

a odtud s použitím rovnice (13) vychází (11).

Vzorce (11) a (12) jsou v citované knize WHITTAKERA a WATSONA (str. 280) uvedeny jako původní LERCHOVY výsledky. Z dopisu, který napsal HERMITE STIELTJESSOVI, se dovídáme, že LERCHOVY výsledky odvodil již o 40 let dříve LIPSCHITZ.[14]) LERCHOVI patří zásluha, že při odvození použil známých metod z teorie analytických funkcí.

Jestliže ve vzorci (14) položíme $s = 0$, dostaneme po jednoduché úpravě vzorec

$$\frac{e^{2\pi i w x}}{1 - e^{2\pi i x}} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2kw\pi i}}{k - x},$$

který odvodil v jednom ze svých pojednání KRONECKER.[15])

Tvrzení, že funkce $\mathfrak{K}(w, x, s)$ je celistvou transcendentou, bylo LERCHEM odvozeno ještě jinými způsoby v pracích [82] a [101]. V pojednání [101] vychází opět z vyjádření (12), zatím co v [82] využívá jiného byť velmi podobného integrálního vyjádření, které dostane v souvislosti s obecnou teorií řad (1).

Z ostatních výsledků o funkci $\mathfrak{K}$ uveďme ještě integrální vyjádření odvozené v práci [82]

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = -e^{-\pi i\left(\frac{s}{2} + 2wx\right)} \frac{(2\pi)^s}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x(z-\alpha i)}(z - \alpha i)^{-s}}{1 - e^{-2w\pi i - z + \alpha i}}\, dz, \tag{15}$$

α je libovolná, dostatečně malá, kladná konstanta, které má jistý důsledek v teorii funkce Γ.

V témž odstavci práce [82] jsou odvozena ještě další podobná vyjádření funkce $\mathfrak{K}$, která zde nebudeme podrobně vypisovati. Poznamenejme, že podobné integrální vyjádření je dokázáno také ve [101] (odst. IV.).

Zobecnění funkce $\mathfrak{K}(w, x, s)$ je dáno funkcí $P(u, w, c, s)$, která je definována vzorcem

$$P(u; v_1, v_2, \ldots, v_p; c_1, c_2, \ldots, c_p; s) = \sum_{m_1, \ldots, m_p} \frac{e^{2\pi i (m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_p v_p)}}{(u + c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_p m_p)^s},$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_p = 0, 1, 2, \ldots,$$

hodnoty $c_1, c_2, \ldots, c_p$ jsou navzájem různé, $\operatorname{Re} c_\nu > 0$, $\operatorname{Im} v_\nu \geqq 0$, ($\nu = 1, 2, \ldots$, p), $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re} s > k$ při čemž k značí počet čísel v_ν, která jsou reálná.

Stejnou metodou, které použil v práci [28], odvodil LERCH v pojednání [93] výsledek, že funkce P je celistvou transcendentou proměnné s, jestliže žádná z veličin v_α není celé číslo a určil její rozvoj:

$$e^{2\pi i \Sigma^* v_\alpha} P(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p; v; c; s) =$$

$$= \frac{(2\pi)^{s-\pi}\,\Gamma(s-1)}{c_1 c_2 \ldots c_p\, i^{p-1}} \sum_{n_1, \ldots, n_p = -\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\left(i \cdot \dfrac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod\limits_{\beta=1}^{\alpha}{}' \left(\dfrac{n_\beta - v_\beta}{c_\beta} - \dfrac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)} \right\} e^{2\pi i (n_1 w_1 + \ldots + n_p w_p)};$$

Σ^* se vztahuje na indexy $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ a čárka u symbolu Π značí, že se vylučuje hodnota $\beta = \alpha$.

Předpokládá se, že $w_1, w_2, \ldots, w_p$ jsou reálná čísla mezi 0 a 1, poměr žádných dvou čísel c_α není reálný a kořeny funkce $1 - e^{-c_\alpha x + 2v_\alpha \pi i}$ jsou navzájem různé.

Stejný rozvoj odvozuje LERCH pro funkci P i v kap. X. práce [115],[16]) v níž se funkce P vyskytuje v souvislosti s transcendentou $X(z|\omega; s)$, která je definována vzorcem:

$$\mathrm{X}\,(z', z'' \mid \omega, \omega', \omega'', s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2n\pi is}{\omega}}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z'+n\omega')}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z''+n\omega'')}-1\right)}.$$

Vzájemný vztah mezi oběma transcendentami je dán rovnicí

$$\frac{(-1)^{p-1}}{(2\pi)^{s-1}\,\Gamma\,(1-s)}\,P\,(u;\, v_1, v_2, \ldots, v_p;\, c_1, c_2, \ldots, c_p;\, s) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{c_\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi in}{c_\alpha}(n-v_\alpha)}\left(i\,\frac{n-v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod\limits_{\beta=1}^{p}{}'\left(e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha}(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha + c_\beta u)}-1\right)}.$$

Tento vzorec vyjadřuje souvislost mezi p funkcemi tvaru

$$\chi\,(z_2, z_3, \ldots, z_p \mid c_1, c_2, \ldots, c_p;\, u;\, v, s) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(v+n)^{s-1}\, e^{2nu\pi i\frac{1}{c_1}}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{c_1}(z_2+nc_2)}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{c_1}(z_3+nc_3)}-1\right)\ldots\left(e^{\frac{2\pi i}{c_1}(z_p+nc_p)}-1\right)}$$

a funkcí $P\,(u, w, c, s)$.

4. Funkce R a L. Funkce R a L jsou krajní případy funkce $\mathfrak{K}$, které vzniknou speciální volbou hodnot neodvisle proměnných. Položíme-li $x = 0$, dostaneme funkci R:

$$R\,(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s},$$

zatím co funkce L odpovídá hodnotě $w = 1$:

$$L\,(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{n^s}.$$

LERCH se funkcemi R a L — zejména však funkcí R a jejími aplikacemi — zabývá v pracích [101], [144], [155] a [204]. Výsledky, které LERCH odvodil o funkci R a její aplikace, v prvé řadě v teorii funkce Γ, patří k jeho nejznamenitějším výsledkům v analyse.

Nejrozsáhlejší a nejsystematičtější práce, zabývající se funkcemi R a L jsou práce [101] a [144]. Práce [155] má k teorii funkce R vztah jen potud, že obsahuje oznámení, že jisté výsledky odvozené v práci [101] nejsou původní, a práce [204] obsahuje — na základě jistých vlastností funkce R — řešení jednoho problému položeného pod č. 1069 v „Intermédiaire des mathématiciens", r. 1897, str. 122.

Východiskem práce [101] je opět vzorec (12). Pro funkce R a L nabývá tvaru

$$R\,(w, s) = \frac{1}{\Gamma\,(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}}{1-e^{-t}}\, dt$$

a

$$L(x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^{t-2x\pi i} - 1} dt.$$

Na základě těchto vyjádření dokáže LERCH, že rozdíl $R(w, s) - \frac{1}{s-1}$ a $L(x, s)$ jsou celistvé transcendentní funkce proměnné s.

V dalším se pak zabývá hlavně funkcí $R(w, s)$ a jejími aplikacemi.

Jelikož rozdíl $R(w, s) - \frac{1}{s-1}$ je celistvá trancendentní funkce proměnné s, lze jej rozvinouti vzhledem k s v řadu

$$R(w, s) = \frac{1}{s-1} + A_0(w) + A_1(w)(s-1) + A_2(w)(s-1)^2 + \dots$$

Dále se funkce $R(w, s)$ v bodě $s = 0$ chová pravidelně a existuje tedy maclaurinovský rozvoj

$$R(w, s) = B_0(w) + B_1(w)s + B_2(w)s^2 + \dots$$

LERCH pak vyčisluje v obou rozvojích prvé dva koeficienty a dospívá tak k vzorcům

$$R(w, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + \dots \tag{19}$$

a

$$R(w, s) = \left(\frac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} s + \dots \tag{20}$$

Zejména tyto vzorce dávají celou řadu výsledků v teorii funkce Γ a LERCH o nich doslova říká, že „dávají nahlédnouti, že teorie malmsténovských řad otevřela nejpřímější a současně nejjednodušší cestu k teorii funkce Γ".[17])

O těchto aplikacích na teorii funkce Γ a souvisících otázkách se na tomto místě zmíníme pouze stručně a neúplně, protože tyto věci jsou podrobně vyloženy v článku prof. O. BORŮVKY, který pojednává o LERCHOVĚ díle v teorii funkce Γ.[18])

Předně plyne z rozvoje (20) bezprostředně vzorec

$$\log \Gamma(w) = \log \sqrt{2\pi} + D_{s=0} R(w, s), \tag{21}$$

o němž Lerch říká, že „pro $\log \Gamma(w)$ poskytne tolik tvarů, kolik výrazů platných v okolí místa $s = 0$ máme pro funkci $R(w, s)$".[19])

Tak na př. z (21) snadno odvodí za pomoci některých vztahů platných o funkci L známý Kummerův rozvoj pro $\log \Gamma(w)$, dále na základě jednoho komplikovaného integrálního vyjádření funkce $R(w, s)$, které plyne z teorie funkce $\mathfrak{K}(w, x, s)$, vzorec (15), následující rovnici:

$$\log \Gamma(u + v) - u \log u + u + \left(v - \frac{1}{2}\right) \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \frac{\sin v\pi}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{\log(z - 2u\pi i)}{e^{z+2v\pi i} - 1} - \frac{\log(z + 2u\pi i)}{e^{z-2v\pi i} - 1} \right) dz, \tag{22}$$

$$0 < \operatorname{Re} u, \quad 0 < \operatorname{Re} v < 1,$$

která v podstatě pochází od STIELTJESA[20]) a jako zvláštní případ obsahuje formuli BINETOVU. Z (22) pak LERCH odvozuje některé další vzorce pro funkci Γ, o nichž se zde nebudeme podrobněji zmiňovat.

V práci [144] jsou rozvoje (19) a (20) odvozeny ještě jednou, ovšem jiným způsobem než ve [101].[21]) LERCH při tomto odvození obdrží ještě jeden zajímavý rozvoj

$$\log \Gamma (w) = \left(w - \frac{1}{2}\right) \log w - w + \log \sqrt{2\pi} + S,$$

$$S = \sum_{n=2}^{\infty}{}' (-1)^n \frac{n-1}{2n(n+1)} R(w, n),$$

podobný rozvoji STIRLINGOVU pro $\log \Gamma(w)$. Řada S je konvergentní pro $w > 1$ a dále také pro imaginární hodnoty w, je-li $\operatorname{Re} w > 1$ nebo $|\operatorname{Im} w| > 1$. Touto řadou se zabýval také STIELTJES a odvodil pro ni vzorec

$$S = \int_0^\infty \frac{P(x)\, dx}{x + w}, \quad P(x) = \frac{1}{2} - x + [x].$$ [22])

LERCH dospívá v [144] k formuli

$$R(w, s) = \frac{1}{(s-1)\, w^{s-1}} + \frac{1}{2 w^s} + \int_0^\infty \frac{s\, P(x)\, dx}{(x+w)^{s+1}},$$

která zobecňuje výsledek Stieltjesův a na jejímž základě obdrží semikonvergentní rozvoj pro funkci R

$$R(w, s) = \frac{1}{(s-1)\, w^{s-1}} + \frac{1}{2 w^s} + \frac{1}{2} B_1 \binom{s}{1} \frac{1}{w^{s+1}} - \frac{1}{4} B_2 \binom{s+2}{3} \frac{1}{w^{s+3}} + \\ + \frac{1}{6} B_3 \binom{s+4}{5} \frac{1}{w^{s+5}} - \ldots, \tag{23}$$

kde $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ... jsou bernoullská čísla.

Tento rozvoj se vyskytuje také v práci [101]. LERCH jej odvodí na základě vlastností funkce $\tilde{\omega}(a, s)$, kterou definuje vzorcem

$$\tilde{\omega}(a, s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) e^{-at}\, t^{s-1}\, dt,$$

případně ještě obecnější funkce

$$\tilde{\omega}_p(a, s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{p}{}' (-1)^{\nu-1} B_\nu \frac{x^{2\nu-1}}{[2\nu]!}\right) e^{-ax}\, x^{s-1}\, dx$$

(B_ν jsou bernoullská čísla), které možno považovati za zobecnění funkce BINETOVY

$$\tilde{\omega}(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) e^{-at} \frac{dt}{t}.$$

Zároveň tento výsledek přivede LERCHA k nalezení zajímavé věty o semikonvergentních rozvojích, které dovoluje velmi rychlé a jednoduché odvození jisté třídy semikonvergentních rozvojů, mezi něž patří i rozvoj STIRLINGŮV. Jiné odvození STIRLINGOVA vzorce je také v práci [204]. Všechny tyto výsledky jsou podrobně vyloženy ve zmíněné již práci prof. BORŮVKY.

Zmínili jsme se již, že z rovnice (21) plyne známý rozvoj KUMMERŮV pro $\log \Gamma(w)$, jak to LERCH provedl v práci [101]. Jinou cestou, ale také na základě vlastností funkce R je řada KUMMEROVA odvozena ještě v práci [144] pomocí Hurwitzovy formule[23])

$$R(w, s) = 2 \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{s\pi}{2} + 2nw\pi\right)}{n1^{1-s}},$$

pro niž LERCH v [144] podává originální důkaz.

Ve [111] se LERCH zabývá také funkcí, kterou definuje elementem

$$R(a, u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+n)^2 + u^2]^s} \tag{24}$$

a kterou možno považovati za zobecnění funkce $R(w, s)$. Z výsledků se spokojíme s uvedením těch, které se týkají analytické povahy funkce $R(a, u, s)$ vzhledem k proměnné s. LERCH dokazuje dvě věty. Předně, že rozdíl

$$R(a, u, s) - \frac{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(s)\,u^{2s-1}}$$

je celistvá transcendentní funkce vůči s, za druhé, že maclaurinovský rozvoj funkce $R(a, u, s)$ definované řadou (24) začíná členy

$$\left(\frac{1}{2} - a\right) + \log \frac{\Gamma(a+ui)\,\Gamma(a-ui)}{2\pi}\, s.$$

5. Derivace Kummerovy řady. S pomocí teorie malmsténovských řad podařilo se také LERCHOVI rozřešiti problém nalezení derivace Kummerovy řady. LERCH tento problém rozřešil po prvé ve své práci [101]. V odst. VI. této práce je odvozen vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{v+n} = -\log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \log x - \\ - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{x+ki}{ki}, \quad 0 < v < 1,$$

který LERCH označuje jakožto doplněk vztahu LIPSCHITZOVA (11) (pro $s = 0$). Volíme-li v tomto vzorci za x ryze imaginární hodnotu ix, kde $0 < x < 1$, obdržíme vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi i(v+n)}}{v+n} = -\log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \frac{\pi i}{2} -$$

$$-\log x - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2k\pi i} \log \frac{x+k}{k},$$

z nějž pak LERCH odvodí derivaci Kummerovy řady ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k+1)\, v\pi \log \frac{k}{k+1} = \{\log 2\pi - \Gamma'(1)\} \sin v\pi +$$
$$+ \frac{\pi}{2} \cos v\pi + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} \sin v\pi.$$

Na tento výsledek thematicky navazují obecné věty o derivování jistých trigonometrických řad, které LERCH odvodil ve spisech [105], [116], [124].[24]) Protože tyto výsledky spolu s celou problematikou okolo Kummerovy řady jsou vyloženy v práci prof. BORŮVKY o Lerchově přínosu v teorii funkce Γ, nemáme důvodu, abychom se u tohoto bodu déle zastavovali.

6. Funkce $\zeta(s)$. Funkcí $\zeta(s)$ se LERCH zabývá jednak v několika menších pracích, které jsou přímo věnovány odvození některých vlastností funkce ζ, jednak jsou jisté výsledky týkající se funkce ζ roztroušeny v různých pojednáních, zejména těch, které se týkají teorie malmsténovských řad a jejich speciálních případů, zejména funkce R a L, což je snadno pochopitelné, uvědomíme-li si, že k teorii funkce ζ je velmi pohodlný přístup na základě teorie funkce R.[25])

V práci [95] LERCH vyjadřuje funkci $\zeta(s)$ nevlastním integrálem. Vychází z vyjádření funkce $\zeta(s)$ ve tvaru

$$\zeta(s) = \lambda(s) + \frac{1}{2^s}\lambda(s) + \frac{1}{2^{2s}}\lambda(s) + \frac{1}{2^{3s}}\lambda(s) + \ldots = \frac{1}{1-2^{-s}}\lambda(s)$$

kde

$$\lambda(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots$$

Nyní lze funkci $\lambda(s)$ vyjádřit nevlastním integrálem

$$\lambda(s) = -e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\pi^s \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^{-s}}{1 + i e^{-z}}\, dz,$$

který konverguje, když $\operatorname{Re} s > 1$. Tento výsledek plyne ze vzorce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s} = -e^{-\frac{1}{2}s\pi i - wx\pi i}(2\pi)^s \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xz}(z - w\pi i)^{-s}}{1 - e^{-w\pi i - z}}\, dz,$$

který je opět důsledkem vztahu (15) pro $\alpha = w\pi$.

Po snadné úpravě vychází

$$\lambda(s) = \frac{2^{s-2}}{s-1} - 2^{s-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin s\Phi - e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\Phi}\cos s\Phi}{1 + e^{\pi \operatorname{tg}\Phi}} \cos^{s-2}\Phi\, d\Phi;$$

integrál na pravé straně je konvergentní pro každé s.

Dále se LERCH o funkci $\zeta(s)$ zajímá v menších pojednáních [169] a [223]. V práci [169] vyšetřuje LERCH funkci $\zeta(s)$ v případě, že s je liché. Ukazuje, že pro $s = 4k - 1$ lze funkci $\zeta(s)$ vyjádřit velmi rychle konvergentní řadou pomocí vzorce

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{4k-1}} = \frac{(2\pi)^{4k-1}}{(4k)!} \left[B_{2k} + (-1)^{k-1} \frac{1}{2} \binom{4k}{2k} B_k^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^{\nu-1} \binom{4k}{2\nu} B_\nu B_{2k-\nu} \right] - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{4k-1}} \frac{1}{e^{2m\pi} - 1}.$$

Nový rozvoj pro funkci $\zeta(s)$ je také odvozen v práci [120].

Pro funkci $\zeta(s)$ odvodil RIEMANN klasický vztah

$$\zeta(s-1) = \frac{\zeta(s)}{2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s)}, \tag{25}$$

který je fundamentální důležitosti pro vyšetření analytické povahy funkce ζ.

Tuto reciprocitu LERCH několikrát ve svých pracích různými způsoby odvodil, na př. velmi jednoduše a elementárními prostředky v práci [82], par. 1, dále v práci [101], str. 11, na základě vlastností funkcí R a L.

V pojednání [92] vyšetřuje LERCH t. zv. Legendrovy transcendenty

$$P = \int_0^1 \frac{\log^m y \, dy}{1 - y + y^2}, \quad Q = \int_0^1 \frac{\log^m y \, dy}{1 + y + y^2}$$

pro libovolné m.

Ve svých úvahách vychází z integrálů

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} \, dx}{e^x + e^{-x} - 1}, \quad \Psi(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} \, dx}{e^x + e^{-x} + 1},$$

v které přejdou výrazy P a Q substitucí.

LERCH zkoumá $\Phi(s)$ a $\Psi(s)$ jako analytické funkce proměnné s a odvodí pro ně vztahy, které jsou analogické hořejší RIEMANNOVĚ reciprocitě.

Poznamenejme závěrem, že na př. vztah (11) pro funkci $\mathfrak{K}(w, x, s)$ má také podobnou stavbu jako vztah (25).[26])

IV. *Ostatní práce*

1. V tomto odstavci podám stručný přehled zbývajících LERCHOVÝCH prací z teorie nekonečných řad. Nejsou to práce takového rozsahu jako na př. práce o malmsténovských řadách a i když některé na sebe navazují, nelze o nich říci, jak jsem již v úvodu poznamenal, že se soustřeďují okolo nějakých zásadních problémů. S takovými příspěvky a poznámkami k teorii nekonečných řad a speciálních funkcí definovaných nekonečnými řadami se setkáváme v celém údobí LERCHOVY vědecké činnosti. Tyto práce většinou nepřinášejí zásadně nové poznatky do teorie. LERCH zde často zobecňuje výsledky jiných autorů nebo zjednodušuje jejich způsoby odvození. Mnohé práce mají charakter převážně metodický a pedagogický. Z těchto důvodů je také zbytečné zmiňovati

se podrobněji o všech pracích. O pracích, které jsme v tomto přehledu pominuli, lze nalézti dostačující informaci v příslušných ročnících referativního časopisu Fortschritte der Mathematik.

2. Protože není nutné zachovávati chronologický ani jiný postup, začneme prací [163]. Thema této práce je neobyčejně originální a LERCH si jí podle zpráv těch, kteří jej znali, velmi cenil.[27])

Východiskem úvah je analytická funkce $F(\sigma, s)$ reálné proměnné σ, která se dá pro jistá s a iracionální $\sigma > 1$ rozvinout v součet dvou řad (w je konstanta)

$$F(\sigma, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{s+n\sigma}}{\sin(s+n\sigma)\pi} + \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\infty} (-w)^m \operatorname{ctg} \frac{m-s}{\sigma} \pi. \tag{1}$$

Funkce $F(\sigma, s)$ neexistuje v bodě $s = 0$, ale má tam limitu, kterou označíme $\Phi(\sigma)$. LERCH vyšetřuje konvergenci řad na pravé straně rovnice (1) při $s = 0$, t. j. vyšetřuje vlastnosti výrazu, který vzhledem k dalšímu pišme ve tvaru

$$\sum \frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi} + \sum (-w)^m \frac{1}{\sigma} \operatorname{ctg} \frac{m}{\sigma} \pi. \tag{2}$$

Dokazuje: je-li σ racionální, nekonečně mnoho členů první i druhé řady v (2) není definováno a žádný ze součtů v (2) tedy nemá smysl. Je-li σ iracionální algebraické číslo, pak každá z řad v (2) konverguje absolutně. Pro jistá transcendentní čísla σ ukazuje, že jistá vybraná posloupnost členů první i druhé řady diverguje k $-\infty$. Výraz (2) však bude mít smysl pro všechna iracionální $\sigma\,(> 1)$, jestliže budeme rozumět součtem (2) součet těchto tří — jak je ukázáno — absolutně konvergentních řad

$$A(\sigma) = \sum_{n''} \frac{w^{n''\sigma}}{\sin n''\sigma\pi}, \quad B(\sigma) = \sum_{m''} (-w)^{m''} \frac{1}{\sigma} \operatorname{ctg} \frac{m''}{\sigma} \pi,$$

$$C(\sigma) = \sum_{(n', m')} \frac{w^{n'\sigma}}{\sin n'\sigma\pi} + (-w)^{m'} \frac{1}{\sigma} \operatorname{ctg} \frac{m'}{\sigma} \pi.$$

Přitom n' (resp. m') proběhne jistou (nekonečnou) část množiny všech přirozených čísel, n'' (resp. m'') proběhne (nekonečnou) množinu zbývajících přirozených čísel a existuje prosté zobrazení množiny $\{n'\}$ na množinu $\{m'\}$. Přitom dokonce

$$\Phi(\sigma) = A(\sigma) + B(\sigma) + C(\sigma) \tag{3}$$

při σ iracionálním (> 1). Vynecháme-li v součtech (2) všechny členy, které nejsou definovány při σ racionálním, pak součty zbývajících členů existují [označme je $D(\sigma)$, $E(\sigma)$] a existuje dokonce funkce $C_1(\sigma)$ taková, že

$$\Phi(\sigma) = D(\sigma) + E(\sigma) + G(\sigma) \tag{4}$$

pro σ racionální (> 1).

Rozumějí-li se tedy součtem (2) pravé strany rovnic (3) a (4), je součet (2) analytická funkce reálné proměnné $\sigma\,(> 1)$, kdežto součty řad (2) v obvyklém pojetí pro některá σ nemají smysl.

Závěrem: Výraz (2) složité aritmetické povahy má zcela jednoduchou povahu analytickou. LERCH vyslovuje otázku, zdali by vyšetřování výrazů, podobných výrazu (2) („dvojice řad") nevedlo k užitečným výsledkům.

3. Další zajímavá práce je [162] (jejímž francouzským překladem je [168] [168]).

LERCH se zde zabývá tímto problémem. Funkce $f(x)$ splňuje v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ Dirichletovy podmínky, dá se tedy vyjádřiti Fourierovou řadou

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\nu x \pi + b_\nu \sin 2\nu x \pi), \tag{5}$$

kde

$$a_\nu = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\nu x \pi \, dx, \qquad b_\nu = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\nu x \pi \, dx.$$

Zavedeme-li

$$\cos 2\nu x \pi = \frac{1}{2} (e^{2\nu x \pi i} + e^{-2\nu x \pi i})$$

$$\sin 2\nu x \pi = \frac{1}{2i} (e^{2\nu x \pi i} - e^{-2\nu x \pi i})$$

a položíme-li $a_{-\nu} = a_\nu$, $b_{-\nu} = -b_\nu$, $b_0 = 0$, můžeme psát tuto řadu ve tvaru

$$f(x) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{-n}^{n} c_\nu e^{2\nu x \pi i}, \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

kde

$$c_\nu = \frac{a_\nu - i b_\nu}{2} = \int_0^1 f(z) e^{-2\nu x \pi i} dz.$$

Často se rovnice (6) píše ve tvaru

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x \pi i}. \tag{7}$$

Při použití této symboliky je však nutno dobře si uvědomit, že symbol $\sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu$ se zejména v teorii analytických funkcí definuje takto:

Definice 1. Řada $\sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu$ jest konvergentní, když každá z obou řad $\sum_{1}^{\infty} a_{-\nu}$ a $\sum_{0}^{\infty} a_\nu$ konverguje.

Naopak při zápisu (7) zřejmě užíváme definice jiné.

Definice 2. Řada $\sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu$ jest konvergentní, když posloupnost částečných součtů

$$s_n = \sum_{-n}^{n} a_\nu \tag{8}$$

má limitu pro $n \to \infty$.

Souvislost mezi oběma definicemi vyjadřuje věta: Je-li řada $\sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu$ konvergentní podle definice 1., je také konvergentní podle definice 2. Opak této věty neplatí.

Je tedy možné, užijeme-li definice 2., psát řadu (5) ve tvaru (7). Užijeme-li však definice 1., pak ovšem není možné vždy limitu (6) psáti ve tvaru řady (7). Řada (7) se obvykle nazývá komplexním tvarem Fourierovy řady, LERCH ji v uvedené práci nazývá „Laurentovou řadou" funkce reálné proměnné. Existence řady (7) klade na funkci $f(x)$ speciálnější podmínky než existence řady (5) a (6). LERCH ukazuje, že pro konvergenci řady (7) je spojitost funkce $f(x)$ v bodě x nutnou podmínkou, i když pro konvergenci řady (5) to nutnou podmínmínkou není. V práci [162] LERCH dokázal větu:

Nechť $f(z)$ je konečná a integrace schopná funkce v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Nechť v bodě x jest tato funkce spojitá, nechť obě funkce

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t}, \quad \frac{f(x-t)-f(x)}{t}$$

jsou integrace schopné od bodu $t = 0$. Pak řada

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \, e^{2\nu x \pi i}, \quad 0 < x < 1,$$

kde

$$c_\nu = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\nu z \pi i}\, dz,$$

konverguje podle definice 1. v bodě x a její součet je $f(x)$. Řada

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \, e^{2\nu x \pi i}$$

konverguje též v bodě x a její součet jest

$$\frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} f(x) - \frac{i}{2} \int_0^1 [f(z) - f(x)] \operatorname{cotg}(z-x)\pi \, dz.$$

Tato LERCHOVA práce je málo známa, i když ji LERCH uveřejnil v následujícím roce ještě jednou pod názvem „*Remarque sur la série de Fourier*" (práce [168]). Tutéž větu o rok později dokázal A. PRINGSHEIM[28]). Někteří autoři (na př. TONNELLI, *Serie trigonometriche*, Bologna 1927) připisují tuto větu PRINGSHEIMOVI, ačkoliv prvenství patří zřejmě LERCHOVI.

4. Práce [148] využívá jednoho výsledku z teorie malmsténovských řad. LERCH nahrazuje APPELLEM sestrojenou řadu $\Theta_1(x, y, z, a)$[29]) jinou rychleji konvergentní řadou. Východiskem je LERCHEM odvozená formule ([156]), která dává vyjádření výrazu

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u + (w+m)^2]^s}$$

trigonometrickou řadou. Tato formule má tvar, ponecháme-li označení v [156],

$$\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)F(x,s,u)=\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)u^{-\frac{s-1}{2}}+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos 2\pi n x,$$

$$A_n=\int_0^{\infty}e^{-uz-\frac{\pi^2n^2}{z}}z^{\frac{s-3}{2}}dz,\ u>0,\ s>1,$$

a je v podstatě totožná se vztahem (9) odstavce o malmsténovských řadách.

5. V práci [151] se jedná o řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(w+n)^{-s}$, tedy o thema, jež náleží do teorie funkce $R(w,s)$. Výsledky tohoto článku jsou však poněkud jiného druhu než ty, o nichž jsme referovali v paragrafu o funkci R. Z výsledných vzorců je nejzajímavější vzorec[30]), jehož lze použíti k numerickému výpočtu Eulerovy konstanty C

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\log\nu}{\sqrt{\nu}}=-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\left[C+\frac{\pi}{2}+\log\frac{\pi}{2}-2\sqrt{2}\log 2\right].$$

6. V práci [64] se LERCH zabývá řadou

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\,(x-q^{\alpha}v)_{\alpha=0}^{k-1},$$

$$(x-q^{\alpha}v)_{\alpha=0}^{n-1}=\prod_{\alpha=0}^{n-1}(x-q^{\alpha}v),\ (x-q^{\alpha}v)_{\alpha=0}^{-1}=1,$$

která představuje zobecnění Taylorovy řady, jež zavedl v jedné práci L. SCHENDEL.[31])

Abychom stručně podali obsah této práce a cíl, který Lerch sledoval, postačí, když uvedeme citát z úvodu:

„. . . pan Schendel omezil se ve své zmíněné práci toliko na část formálnou svého předmětu a jeho vývody nejsou vždy přesvědčující. Poněvadž řada jeho vede přirozeně k některým pěkným výrazům příbuzným aspoň formálně s některými veličinami z theorie funkcí eliptických, poskytujíc příležitost k zajímavým poznámkám, nebude na škodu jednak vyložiti na tomto místě ve vší stručnosti způsobem přístupnějším a věci přiměřenějším stanovení koeficientů řady, jednak podati podmínky pro existenci rozvoje.“

Poznamenejme, že kriteria konvergenční zde dokázaná jsou zvláštním případem obecných vět, které o řadách s obecným členem

$$A_n\,(x-a_0)\,(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})$$

podal I. BENDIXSON.[32])

Výsledků odvozených v [64] pak Lerch využívá v práci [103] (respektive [112]) ke studiu jistých speciálních funkcí, definovaných nekonečnými řadami.

7. Zobecnění Taylorovy řady, ale podstatně jiného druhu, je obsahem další práce [216].

LERCH zde vychází z posloupnosti $\{\psi_{\nu}(z)\}$ funkcí spojitých a ohraničených v intervalu (a,b), z nichž utvoří řadu funkcí, které jsou dány vzorcem

$$\varphi_{\nu+1}(x,z)=\int_x^z\varphi_{\nu}(x,\xi)\,\psi_{\nu}(\xi)\,d\xi,\ \ \varphi_0(x,z)=1.$$

Je-li nyní dána funkce $f(z)$ spojitá v intervalu i se svými n prvními derivacemi, a položíme-li

$$f_0(z) = f(z),\ f_{\nu+1}(z) = -\frac{f'_\nu(z)}{\psi_\nu(z)},\ (\nu = 0, 1, \ldots, n-1),$$

potom máme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n=1} f_\nu(z)\,\varphi_\nu(x, z) + R_n,$$

při čemž zbytek R_n je dán rovnicí

$$R_n = \int_x^z f_n(\xi)\,\psi_{n-1}(\xi)\,\varphi_{n-1}(x, \xi)\,d\,\xi.$$

V případě, že $\psi_\nu(z) = 1$, $\nu = 0, 1, \ldots$, vyjde ze vzorce pro $f(x)$ řada Taylorova.

Položíme-li $\psi_\nu(z) = \chi'_\nu(z)$, obdržíme řadu BÜRMANNOVU a LAGRANGEOVU.

Je-li $\psi_\nu(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, obdržíme pro funkci $\psi_\nu(x, z)$ mocninu rozdílu $\operatorname{arctg} z - \operatorname{arctg} x$ a $f_\nu(z)$ je dána ν — tou derivací funkce $f(z)$. Pro zvláštní případ $f(x) = \log(1 + x^2)$ a srovnáním s maclaurinovským rozvojem pro tangentu, obdržíme vyjádření bernoullských čísel.

Nakonec LERCH klade $\psi_\nu(z) = e^{a_\nu z}$. Výsledky, které potom vychází, jsou dosti komplikované a zjednoduší se pouze ve zvláštních případech.

8. V práci [110] se jedná o důkaz vzorce

$$\operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \frac{1}{v}\,e^{\frac{2\eta u\pi i}{v}}\,\frac{\vartheta'_1\left(0, \frac{w}{v}\right)\cdot\vartheta_1\left(\frac{u+\xi v+\eta w}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)\vartheta_1\left(\frac{\xi v+\eta w}{v}, \frac{w}{v}\right)},$$

$$\operatorname{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(n\xi - m\eta)}}{u + m v + n w},$$

který je fundamentální důležitosti v KRONECKEROVÝCH vyšetřováních o eliptických funkcích. Důkaz podaný LERCHEM se vyznačuje tím, že využívá důsledně jen té okolnosti, že levá strana horního vzorce je definována jako dvojnásobná řada a jest pojata jakožto funkce pouze dvou proměnných ξ a η.

9. V práci [120] (respektive [126]) se použitím ABELOVY identity konvergentní trigonometrická řada

$$f(x) = \sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi,\ 0 < x < 1,\ h \geq 0,$$

přepíše ve tvaru

$$\sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu+1}\,\nabla^{2\nu} a_h\,\frac{\sin(2h+2\nu-1)}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{\nu}\nabla^{2\nu+1}a_h\frac{\cos(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}}+\frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}}\sum_{u=h}^{\infty}\nabla^{2k}a_\mu\cos(2\mu+$$

$$+2k)x\pi,\ \nabla a_\mu=a_\mu-a_{\mu+1},\ \nabla^2a_\mu=\nabla a_\mu-\nabla a_{\mu+1},\ldots;\qquad(9)$$

Podobné vzorce se dají ukázat i pro řady

$$\sum_{\mu=h}^{\infty}b_\mu\sin 2\mu x\pi,\quad\sum_{\mu=h}^{\infty}a_\mu\cos(2\mu+1)x\pi,\quad\sum_{\mu=h}^{\infty}b_\mu\sin(2\mu+1)x\pi.$$

Jako aplikaci dokazuje LERCH v této práci vedle jednoho vzorce, v němž vystupuje funkce Γ, zajímavý rozvoj pro funkci $\zeta(s)$, o němž jsme se již shora zmínili (III. 6). Vyjde z řady

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\cos 2\mu x\pi}{(w+\mu)^s},$$

pro kterou vzorec (9) poskytne přechodem k limitě $k=\infty$ výraz

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nabla^{2\nu}\frac{1}{w^s}\frac{\sin(2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}}+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\nabla^{2\nu+1}\frac{1}{w^s}\frac{\cos 2\nu x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}},$$

$$\frac{1}{6}\leq x\leq\frac{5}{6}.$$

Zvolíme-li nyní $x=\frac{1}{2}$, $w=1$, obdržíme

$$(1-2^{1-s})\,\zeta(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}\left(\nabla^{\nu}\frac{1}{w^s}\right)_{w=1},$$

což je žádaný rozvoj.

Poznámky

[1]) C. J. MALMSTÉN, De integralibus quibusdam definitis, seriebusque définitis, *Journal für die reine u. angew. Mathematik* 38 (1849).

[2]) O. SCHLÖMILCH, *Zeitschrift für Math. u. Phys.* (1849)).

[3]) R. LIPSCHITZ, Untersuchungen einer aus vier Elementen gebildeten Reihe. *Journal für die reine u. angew. Math.* 54 (1857).

[4]) B. RIEMANN, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, *Monatsberichte der Akad. d. Wiss. zu Berlin* (1859).

[5]) A. HURWITZ, Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen $F(s)=$ $=\sum\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$, die bei der Bestimmung der Classenzahlen binärer quadretischer Formen auftreten, *Zeitschrift f. Math. u. Phys.* XXVII (1882).

[6]) T. J. STIELTJES, Sur quelques intégrales définies, *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, Amsterdam (1886). V této historické poznámce se držíme převážně Lercha [82].

[7]) P. APPELL, Développement en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F=0$, *Journal de Math. p. et appl.* 4 (1886). Srov. H. BATEMAN, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, New York, 1944, str. 405.

[8]) L. FRANK, Spor Matyáše Lercha s Alfredem Pringsheimem, tato práce str. 532.

[9]) O. BORŮVKA, Dílo Matyáše Lercha v theorii funkce gamma, tato práce str. 67.

[10]) Poznamenejme na tomto místě, že se v tomto příspěvku nezmiňujeme také o t. zv. Kroneckerových řadách. Výsledky o nich navazují na teorii řad malmsténovských, nicméně souvisí tak úzce s jistými LERCHOVÝMI výsledky z teorie čísel, že se zdá vhodnější, aby byly uvedeny v příspěvku o LERCHOVĚ přínosu v číselné teorii.

[11]) Poznamenejme na tomto místě, že práce [156] vyšla r. 1889 a nikoli 1899, jak je chybně uvedeno ve ŠKRÁŠKOVĚ Seznamu.

[12]) Vzorce (11) a (12) jsou citovány v knize E. T. WHITTAKER - G. N. WATSON, Modern Analysis, Cambridge 1920 (3. vyd.), str. 280.

[13]) Metoda důkazu pochází od RIEMANNA, l. c. sub 4) a LERCH ji ve svých pracích používá častěji, na př. [93].

[14]) Ch. HERMITE et T. STIELTJES, Correspondence str. 280: ... Mais il y a autre chose, je dois vous apprendre que M. Lerch lui-mème a été devancé, il y a quarante années, par M. Lipschitz, et que j'ai été chargé par l'éminent analyste de lui faire savoir qu'il a traité le mêmes sujet et trouvé les mêmes résultats ..." HERMITE pravděpodobně na tuto okolnost upozornil také LERCHA, protože mimo práci [28] je vzorec (11) LERCHEM označován jako LIPSCHITZŮV.

[15]) L. KRONECKER, Zur Theorie der ell. Functionen, *Sitzungsber. der kön. preuss. Akademie* (1883, 1885).

[16]) Příspěvky k teorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 4 (1895), 1—55, č. 115 ŠKRÁŠKOVA Seznamu.

[17]) [144], str. 58.

[18]) O. BORŮVKA, l. c. sub 9).

[19]) [101], str. 13.

[20]) T. J. STIELTJES, Sur le développement du log Γ (a), *Journ. de Math.* 5 (1889).

[21]) Pro ilustraci uvádím úvodní větu práce [144]: „Nous allons établir, par la vois du calcul, quelques propositions que nous avons trouvées autrefois dans nos recherches sur les séries Malmsténiennes."

[22]) T. J. STIELTJES, l. c. sub 20).

[23]) A. HURWITZ, l. c. sub 5), str. 95.

[24]) Jedna taková věta je citována v knize E. T. WHITTAKER - G. N. WATSON, Modern Analysis, str. 81.

[25]) Srov. na př. E. T. WHITTAKER - G. N. WATSON, Modern Analysis, str. 265.

[26]) Srov. LERCHOVU poznámku o RIEMANNOVĚ reciprocitě (25) v úvodu k práci [82], str. 1.

[27]) Byla také obsahem jeho nástupní přednášky na Masarykově universitě v Brně.

[28]) A. PRINGSHEIM, *Sitzungsberichte der München. Ak.* 29 (1900).

[29]) P. APPELL, l. c. sub 7).

[30]) Práce obsahuje také některé výsledky z číselné teorie, o nichž se zde nebudeme zmiňovat.

[31]) L. SCHENDEL, Zur Theorie der Fnctionen, *J. f. reine uu. angew. Math.* 84.

[32]) I. BENDIXSON, Sur l'extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss, *Acta Math.* 9 (1885). Viz také závěrečné poznámky LERCHOVY v [64].

OTAKAR BORŮVKA

DÍLO MATYÁŠE LERCHA V THEORII FUNKCE GAMMA

A. Seznam Lerchových prací týkajících se theorie funkce gamma

Tento seznam je vypsán z úplného Seznamu prací prof. Matyáše Lercha od JOS. ŠKRÁŠKA (*Čas. pro pěst. mat.*, 78 (1953), 139—148)

[24] Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale Eulérienne de première espèce, *Bull. SM France* 15 (1887), 173—178.

[28] Note sur la fonction $\mathfrak{K}\,(w, x, s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2kx\pi i}}{(w+k)^s}$, *Acta* 11 (1887), 19—24.

[34] Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe, *Giorn.* 26 (1888), 39—40.

[41] Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques, *Acta* 12 (1888), 51—55.

[48] O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových, *Věst. KČSN* 1889, 188—222.

[58] O jistých výrazech příbuzných integrálům Eulerovým, *Věst. KČSN* 1890, 137—141.