František Šik

Práce z moderní algebry

In: Zdeněk Třešňák (author); Petra Šarmanová (author); Bedřich Půža (author): Otakar Borůvka. (Czech). Brno: Nadace Universitas Masarykiana v Brně, 1996. pp. 181--187.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/401302`

ných problémů. Je však třeba zdůraznit, že Borůvka byl prvním českým matematikem vůbec, který ve svých pracích užil Cartanovy metody, a že tak přispěl nemalou měrou k jejímu rozšíření u nás. Jeho zásluhy v tomto směru byly mezinárodně oceněny tím, že byl v r. 1952 zvolen v Paříži do čestného výboru složeného z 50 předních světových matematiků; tento výbor vydal vědecké dílo E. Cartana. Na Borůvkovy práce navazuje řada matematiků domácích i zahraničních, jak o tom svědčí citáty jeho prací u jiných autorů a skutečnost, že některé jeho výsledky byly pojaty do učebnic diferenciální geometrie. Zvláště významnými a pro další vývoj geometrie důležitými jsou práce o analytických korespondencích, na jejichž základě vznikla v pozdější době celá řada prací budujících soustavně teorii korespondencí. Zmínky zasluhuje zejména geometrická škola v Bologni, vycházející přímo ze zmíněných Borůvkových prací. Přestože se prof. Borůvka věnoval v další své činnosti výhradně otázkám algebry a teorii diferenciálních rovnic a k vlastní tvůrčí práci v geometrii se nevrátil, neztratil zájem o současné dění v oboru diferenciální geometrie, zvláště pak v těch jejích úsecích, v nichž dříve pracoval.

Práce z moderní algebry

prof. RNDr. František Šik, DrSc.

Všechny Borůvkovy práce z algebry se týkají grupoidů a rozkladů množin, kromě učebnic o maticích [23] (viz. seznam ostatních publikací), [71] a další práce [29] – chronologicky první algebraické –, která obsahuje tyto zajímavé výsledky: Nechť X je matice řádu n. Je-li j nejmenší z hodností matic X, X^2, $X^3, \dots$ (říkáme, že X je rodu $n-j$), pak matice X má přesně $n-j$ nulových charakteristických kořenů, a obráceně. O minimálním polynomu ψ matice X se zde tvrdí, že ψ je reducibilní nad polem K, právě když existuje nad K nenulový polynom Q v X, $Q(X)$, rodu ≥ 1. Podrobněji, je-li $Q(X)$ matice rodu ≥ 1, existují ireducibilní dělitelé polynomu ψ dělící Q.

Vetšina prací [30–32] se odvíjí od podmnožin pologrupy $\mathfrak{M}$ (Borůvka ji nazývá multiplikativní systém) $\mathfrak{M}^{\alpha}$ a M_{α}, kde pro $\alpha = 1, 2, \dots$ $\mathfrak{M}^{\alpha+1} = \mathfrak{M}^{\alpha}\mathfrak{M}$, $M_{\alpha} = \mathfrak{M}^{\alpha} \backslash \mathfrak{M}^{\alpha+1}$ (množinový rozdíl) a od pologrupy $\mathfrak{Z}$, jež je izomorfním obrazem aditivní pologrupy přirozených čísel s obyčejným sčítáním. Pro tyto množiny zřejmě platí $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \supseteq \mathfrak{M}^2 \supseteq \dots$, $\mathfrak{M} \backslash \mathfrak{M}^{\alpha} = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{\alpha-1}$. Vyšetřování jsou podrobeny podmnožiny množiny $\mathfrak{M}$ následující povahy: excentrum pologrupy $\mathfrak{M}$ je množina M_1, její prvky se nazývají prvočinitelé (jsou to prvky, které se nedají vyjádřit jako součin dvou prvků). Jádro v $\mathfrak{M}$ je $\mathfrak{M}^{\alpha}$, jakmile $M_{\alpha} = 0$. Pokud $M_{\alpha} \neq 0$ pro všechna $\alpha = 1, 2, \dots$, $\mathfrak{M}$ se nazývá bez jádra, jinak řečeno, když ke každému prvku $a \in \mathfrak{M}$ existuje přirozené číslo α tak, že prvek a lze vyjádřit jako součin nejvýše α faktorů z $\mathfrak{M}$. V tomto případě $\mathfrak{M} = M_1 \cup M_2 \dots$ Nechť $\mathfrak{M}$ je bez jádra (většina úvah se týká právě těchto $\mathfrak{M}$). Jestliže žádný prvek z $\mathfrak{M}^{\alpha}$ nepatří do $\mathfrak{M}^{\beta}$ pro všechna $\beta < \alpha$ (nebo ekvivalentně, když $M_{\alpha} = M_1^{\alpha}$), $\mathfrak{M}$ se nazývá homogenní (v tomto případě $\mathfrak{M} = M_1 \cup M_1^2 \cup M_1^3 \cup \dots$), jinak nehomogenní. Homogenita tedy znamená, že pro $a \in \mathfrak{M}$ existuje přirozené číslo α tak, že při každém vyjádření prvku a jako součinu prvočinitelů je počet těchto faktorů α. Konečně (další přiblížení přirozeným číslům) jednoznačnost rozkladu (až na pořádek) na prvočinitele prvků $\mathfrak{M}$ bez jádra je ekvivalentní s podmínkou jednoznačné rozložitelnosti $\mathfrak{M}$, což představuje požadavek, aby každý rozklad $\{A_1, A_2, \dots\}$, $A_1 \neq 0$ excentra M_1 pologrupy $\mathfrak{M}$ ($A_i \supseteq M_1$ pro všechna i, $\bigcup_i A_i = M_1$) byl generující v tomto smyslu: množiny $W_{\alpha} = \bigcup_{\alpha_1 \dots \alpha_{\beta}} A_{\alpha_1} \dots A_{\alpha_{\beta}}$ pro různé indexy α jsou disjunktní (zde $\alpha_1, \dots, \alpha_{\beta}$ je skupina β přirozených čísel – různých nebo stejných – s vlastností $\alpha_1 + \dots + \alpha_{\beta} = \alpha$).

Příkladem nehomogenní pologrupy $\mathfrak{M}$ bez jádra jsou pologrupy $\mathfrak{M}^{\alpha}$, $\alpha > 1$. Každá homogenní pologrupa (bez jádra) je podpologrupou nehomogenní pologrupy. Pologrupou bez jádra je např. pologrupa, která (a) má za homogenní obraz pologrupu $\mathfrak{Z}$.

Pologrupa $\mathfrak{M}$ má vlastnost (a), právě když existují neprázdné navzájem disjunktní podmnožiny $F_\alpha \subseteq \mathfrak{M}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ tak, že $\mathfrak{M} = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, a $F_\alpha F_\beta \subseteq F_{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots$. Má-li $\mathfrak{M}$ vlastnost (a) tak, že každý prvočinitel v $\mathfrak{M}$ má za obraz prvočinitele v $\mathfrak{Z}$, pak $\mathfrak{M}$ je homogenní. Pro $\mathfrak{M}$ bez jádra je $\mathfrak{M}^\alpha$, $\alpha > 1$, nehomogenní a nemá vlastnost (a).

Větší část práce [32] je věnována pojmu síť na množině $M(\neq 0)$. Označme $O_\alpha(M)$ množinu všech uspořádaných skupin $(a_1, \ldots, a_\alpha)$ různých nebo stejných prvků v M, $\alpha = 1, 2, \ldots$. $O(M)$ je definována jako sjednocení $O(M) = O_1(M) \cup O_2(M) \cup \ldots$. Rozkladem množiny M rozumíme systém neprázdných podmnožin v M bloků), které pokrývají M. Potom síť na M je rozkladem $\mathfrak{M}(M)$ množiny $O(M)$ s následujícími vlastnostmi:

(1) pro každý prvek $(a) \in O_1(M)$ množina $\{(a)\}$ je blok rozkladu $\mathfrak{M}(M)$,
(2) každý blok rozkladem $\mathfrak{M}(M)$ má konečnou délku,
(3) pro každý uspořádaný pár bloků A, B rozkladu $\mathfrak{M}(M)$ existuje blok rozkladu $\mathfrak{M}(M)$ obsahující $\widehat{AB}$.

Bod (2) říká, že délky prvků $(a_1, \ldots, a_\alpha)$, což jsou čísla α, tvoří ohraničenou množinu čísel. K bodu (3): Je-li $a = (a_1, \ldots, a_\alpha)$, $b \doteq (b_1, \ldots, b_\beta)$, pak $\widehat{ab}$ je skupina $(a_1, \ldots, a_\alpha, b_1, \ldots, b_\beta)$ a $\widehat{AB}$ je množina všech $\widehat{ab}$ pro $a \in A$, $b \in B$. Podle (3) pro a, B existuje přesně jeden blok v $\mathfrak{M}(M)$, obsahující $\widehat{AB}$. Tím je definováno násobení v množině bloků rozkladem $\mathfrak{M}(M)$. Toto násobení je asociativní a rozklad $\mathfrak{M}(M)$ je tedy pologrupa. Nazýváme ji multiplikativní síť na M. Tím byl vyložen prototyp faktoroidu, jak je v obecnosti definován v [33].

Práce [33] je první částí obsáhlejšího spisu, který byl později vložen do učebnice o grupách [37]. Tato práce má souvislost s Borůvkovými přednáškami. Ve školním roce 1937/8 přednášel Borůvka na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně o grupách a látku pak shrnul později do spisu [33]. Předmětem studia byly pojmy, které do té doby nebyly běžně studovány: Rozklad množiny a grupoid. První pojem byl dosud tradován spíše jako relace ekvivalence (P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin, O. Ore). Název druhého byl publikován teprve roku 1937 (B. A. Hausmann and O. Ore, *Theory of quasigroups*, Amer. J. Math., 59 (1937); viz také H. Brandt, *Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes*, Math. Annalen, 96 (1927)).

Vraťme se k pojmu rozklad množiny $G \neq 0$. Nepokrývají-li bloky rozkladu množinu G, mluvíme o rozkladu v množině G, jinak o rozkladu množiny G nebo na množině G. Je definován zákryt a zjemnění systému rozkladů, zejména nejmenší zákryt (1) a největší zjemnění (2), včetně konstrukcí. Vzhledem k tomu, že rozklady v množině (i na množině) tvoří úplný svaz, zákryt a zjemnění se týkají uspořádání a (1) resp. (2) představují suprémum resp. infimum daného systému rozkladů. Tak by se to definovalo v současné terminologii, nepříliš běžné r. 1938 (G. Birkhoff, *Lattices and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 793). Pro zajímavost, v [33], str. 6, se poprvé objevuje český název „svaz" pro anglický „lattice". Borůvka zde zavedl důležité pojmy, jako průsek, obal a spřažené a sdružené rozklady, v dalším průběhu rozvíjení teorie hojně používané; definujeme je, jakmile budou aplikovány.

Druhý pojem – grupoid jako neprázdná množina G (nosič) opatřená binární operací (násobením) – představuje dalekosáhlé zobecnění řady algebraických struktur (pologrupa, grupa, okruh, těleso, algebra, svaz atd.), každá z jejíchž binárních operací definuje spolu s nosičem grupoid. V této práci zobecnil Borůvka na grupoidy svoje výsledky z [34], odvozené pro pologrupy (= multiplikativní systémy).

Rovněž článek [34] byl podnícen Borůvkovým univerzitním kurzem o grupách (r.1938/9). V práci zavádí především pojem vytvořujícího rozkladu na grupoidu, což v současné řeči relací souhlasí s pojmem kongruence. Na vytvořujícím rozkladu jako nosiči se přirozeným způsobem definuje binární násobení; vzniklý grupoid Borůvka nazývá faktoroid. Je to zřejmě zobecnění pojmu faktorová grupa (grupa G modulo nějakého normálního dělitele v G).

S pojmem faktoroidu souvisí úzce pojem homomorfního (izomorfního) zobrazení grupoidu do grupoidu. Je to zobrazení (bijekce), které „zachovává násobení", tedy zobraznění f, pro něž $f(ab) = f(a)\, f(b)$ pro libovolné prvky a, b zobrazovaného grupoidu. Rozklad na grupoidu G, definovaný jako systém množin $\{x \in G : f(x) = f(a)\}$ pro každé $a \in G$, je faktoroid ve výše definovaném smyslu. Základní věty o homomorfismu grup mají svoji obdobu v teorii grupoidů. Jednou z nich je – jako ukázka – nahoře citovaný rozklad-faktoroid na G vynucený homomorfním zobrazením grupoidu G.

Řetěz faktoroidů od podgrupoidu $\mathfrak{A}$ k podgrupoidu $\mathfrak{B}$ (v grupoidu $\mathfrak{A}$) je konečná posloupnost faktoroidů $\overline{\mathfrak{A}}_0, \overline{\mathfrak{A}}_1, \dots, \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ s následujícími vlastnostmi:

(1) $\overline{\mathfrak{A}}_0$ je rozklad na $\mathfrak{A}$, čili (nosič rozkladu $\overline{\mathfrak{A}}_0 =$) $s\overline{\mathfrak{A}}_0 = \underline{\mathfrak{A}}$,

(2) $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ je rozklad na jednom bloku rozkladu $\overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1}$, čili $s\overline{\mathfrak{A}}_\beta \in \overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1}$,

(3) $\mathfrak{B}$ je blok rozkladu $\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$.

Dva řetězce $\overline{\mathfrak{A}}_0, \dots, \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$, $\overline{\mathfrak{C}}_0, \dots, \overline{\mathfrak{C}}_{\beta-1}$ faktoroidů od $\mathfrak{A}$ vzhledem k $s\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ resp. k $s\overline{\mathfrak{C}}_{\beta-1}$ se nazývají sdružené, když $\overline{\mathfrak{A}}_0 = \overline{\mathfrak{C}}_0$, $\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1} = \overline{\mathfrak{C}}_{\beta-1}$ (tj. konce řetězců jsou stejné) a dále každý faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ je sdružen s každým faktoroidem $\overline{\mathfrak{C}}_\delta$ vzhledem k $s\overline{\mathfrak{A}}_{\gamma+1}$, $s\overline{\mathfrak{C}}_{\delta+1}$. Sdruženost dvou rozkladů $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ vzhledem k $B \in \overline{\mathfrak{A}}$, $D \in \overline{\mathfrak{C}}$ znamená: $B \sqcap D \neq 0$, $s(D \sqsubset \overline{\mathfrak{A}} \sqcap s\overline{\mathfrak{C}}) = (sB \sqsubset \overline{\mathfrak{C}} \sqcap s\overline{\mathfrak{A}})$, kde obal množiny D v rozkladu $\overline{\mathfrak{A}}$, $D \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ je rozklad (množina) $\{A \in \overline{\mathfrak{A}} : D \sqcap A \neq 0\}$ a průsek množiny C s rozkladem $\overline{\mathfrak{A}}$. $\overline{\mathfrak{A}} \sqcap C$ je rozklad (množina) $\{A \sqcap C : A \in \overline{\mathfrak{A}},\ A \sqcap C \neq 0\}$. Z definice je vidět, že rozklady $\overline{\mathfrak{A}}$ a $\overline{\mathfrak{C}}$ nemusejí být faktoroidy na grupoidu, ale pouze rozklady na množině. Tím jsme si připravili půdu, abychom mohli zformulovat větu, která dalekosáhle zobecňuje větu Jordan-Hölder-Schreier-Zassenhausovu, dobře známou z teorie grup:

($\star$) Sdružené řetězce faktoroidů mají izomorfní zjemnění.

Zjemněním řetězce se míní rozšíření řetězce o další faktoroidy tak, aby vznikl zase řetězec. Izomorfismem dvou řetězců pak rozumíme bijekci mezi nimi tak, aby přiřazené faktoroidy byly izomorfní. Dodejme, že Borůvkova věta platí, i když vynecháme násobení na grupoidu a pracujeme pouze s rozklady na množině. I z množinové verze věty ($\star$) lze zrekonstruovat znění J-H-S-Z věty pro grupy. Pro názornější ilustraci popíšeme grupové znění věty. Invariantní (normální) řadou podgrup grupy G se rozumí ubývající posloupnost podgrup $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_\alpha = \{1\}$ takových, že každé G_i je normální dělitel v G (normální dělitel v G_{i-1}). J-H-S-Z věta tvrdí, že existují izomorfní zjemnění obou řad. Pojem zjemnění je analogický jako pro faktoroidy. Vznikne vložením dalších podgrup takových, aby vznikla (konečná) ubývající posloupnost podgrup normálních v G (normálních v bezprostředně předcházejících podgrupách). Izomorfismem obou řad míníme bijekci mezi řadami s vlastností, že – stručně řečeno – odpovídající si faktorové grupy jsou izomorfní. Věta ($\star$) je tedy zobecněním J-H-S-Z věty pro invariantní řady podgrup. Poznamenejme, že tedy věta ($\star$) byla později zobecněna tak, aby simulovala grupovou větu pro normální řady podgrup a že požadavek sdruženosti řetězců faktoroidů (řetězce rozkladů) byl zredukován na podmínku nutnou a dostatečnou. Je nasnadě myšlenka větu ($\star$) rozšířit z grupoidu na obecnou algebru. Je to jednoduché a je to pravda. Množinová verze věty ($\star$) našla uplatnění v teorii klasifikací.

Ke genezi Borůvkovy teorie rozkladů množin a grupoidů sám autor říká, že v době, kdy pracoval na teorii, nestudoval žádné práce na tato témata, aby nebyl ovlivněn metodikami jiných autorů, mezi něž patřili už dříve zmínění P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotinová, O. Ore. Válečné události mu tuto záměrnou izolaci ulehčily: do protektorátu nepřicházely významné časopisy z „druhé strany“.

Borůvka tak vytvořil ve svých metodách a rezultátech originální „množinový průhled“ do různých částí algebry, zvláště do teorie grup. Jako příklad (a zejména) je vhodné upozornit na okolnost, že se Borůvkovi podařilo odkrýt množinový charakter tak složité věty, jako je Jordan-Hölder-Schreier-Zassenhausova věta o izomorfních zjemněních řad normálních dělitelů. Zatímco Jordan a Hölder odvodili větu pro konečné grupy a Schreier pro nekonečné, ale jen existenčně, Zassenhaus našel konstruktivní důkaz a ten byl jistě Borůvkovi podnětem k hledání množinové a grupoidové varianty. Podařilo se mu to do té míry, že z věty o řetězcích rozkladů se dá zrekonstruovat grupová věta. Je to znamenitý výsledek sám o sobě, ale i proto, že mnohá zobecnění vět nedovolují vrátit se k předloze, kterou zobecnily.

Kromě práce [29], učebnic o maticích [23] (viz. seznam ostatních publikací), [71] a do jisté míry i prací [30], [31], je Borůvkovo algebraické dílo shrnuto do čtyř knih, a to do učebnice *„Úvod do teorie grup“* [37] a do monografie, která vyšla ve třech verzích, německé *„Grundlagen der Grupoid- und Gruppentheorie“* [47], anglické [73] a české [52]. Výsledky této monografie měly vždy živý ohlas při přednáškách, které Borůvka přednesl při různých příležitostech doma i v zahraničí.

Práce z obyčejných diferenciálních rovnic

prof. RNDr. František Neuman, DrSc.

V padesátých letech se O. Borůvka začal cílevědomě věnovat studiu diferenciálních rovnic, disciplíny v té době v Československu málo pěstované. V roce 1946 založil vědecký seminář, který se stal zdrojem nových vědeckých problémů a místem, kde vždy vznikala nová, původní řešení. Velké množství významných zahraničních matematiků právě zde předneslo své originální myšlenky.

O. Borůvka nikdy zcela neopustil pole klasické analýzy, diferenciální geometrie a algebry. Na základě své dokonalé znalosti těchto oblastí zavedl nové metody a originální přístup k řadě problémů v teorii diferenciálních rovnic.

V práci [43] podal kritérium pro jednoznačnost řešení rovnice $y' = f(x,y)$, které zobecňuje většinu podmínek v té době známých.