ÜBERLEGUNGEN ZUM RAUMBEGRIFF BEI H. POINCARÉ UND F. RIESZ

Laura Rodríguez

Abstract

We will discuss the concepts of *mathematisches* and *physikalisches Kontinuum*, which appear in the works of Henri Poincaré *La valeur de la science* and of Friedrich Riesz *Die Genesis des Raumbegriffes.* The discussion becomes interesting by the comparison of Riesz's concept of mathematical continum with Poincarés notion of the physical continum, as the first one is given through an axiomatic definition (a predecessor of the concept of topological space), and the second one was taken from experience.

Ein Vorläufer des topologischen Raumbegriffes ist 1906 von Friedrich Riesz in seiner Arbeit *Die Genesis des Raumbegriffes*[1] axiomatisch definiert worden und trägt den Namen *mathematisches Kontinuum* (im Folgenden MK). Die Entwicklung dieses Begriffes ist u.a. inspiriert durch Henri Poincarés Arbeit *La valeur de la science*[2] (1905).

Henri Poincaré (1854–1912) war Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph. Er studierte in Paris und promovierte im Jahr 1879. Zwei Jahre später wurde er Professor an der Universität von Paris, wo er bis zu seinem Tod lehrte. Poincaré leistete wichtige Beiträge zu verschiedenen Forschungsgebieten, u.a.: Funktionentheorie, Differentialgleichungen, mathematische Physik, Himmelsmechanik und algebraische Topologie. 1905 erschien von Poincaré das Buch *La valeur de la science.* Dieses Buch enthält, im Rahmen einer Diskussion über Geometrie und Raumanschauung, den Poincaréschen Begriff des physikalischen Kontinuums (im Folgenden PK).

[1] *Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn* **24** (1907) 309-353. Das ungarische Original dieser Arbeit wurde am 22. Januar 1906 der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt. Siehe Literatur.

[2] Paris: Flamarion 1905. Ich zitiere aus der Ausgabe von 1908 und aus der zweiten deutschen Ausgabe von 1910.

> *Nous avons vu ce qui caractérise le continu physique, chacun des éléments de ce continu consiste en un ensemble d'impressions; et il peut arriver ou bien qu'un élément ne peut pas être discerné d'un autre élément du même continu, ..., ou bien au contraire que la distinction est possible ...* [3]

Ausgangspunkt für die Einführung dieses Begriffes bilden gewisse Experimente von GUSTAV T. FECHNER.[4] GUSTAV T. FECHNER (1801–1887) studierte Medizin in Leipzig, war jedoch nie als Mediziner tätig. 1834 wurde er Professor für Physik, und ab 1850 führte er Experimente zur Psychophysik aus. FECHNER faßte seine Arbeiten zusammen in dem Werke *Elemente der Psychophysik*.[5] Seine Untersuchungen versuchten, die Beziehung zwischen Körper und Seele exakt zu formulieren.

Die Experimente von FECHNER, auf die POINCARÉ sich bezieht, stellen u.a. fest, daß wir z.B. ein Gewicht von 12 g leicht von einem Gewicht von 10 g (durch manuelle Schätzung)[6] unterscheiden können, während ein Gewicht von 11 g weder von dem einen noch von dem anderen zu unterscheiden wäre. Durch solche Erfahrungen, erklärt POINCARÉ, ist der Begriff der Stetigkeit des PK in uns entstanden. Das von FECHNER beschriebene Phänomen der Ununterscheidbarkeit unterschiedlicher Empfindungen ist die Haupteigenschaft des PK, weil sie seine Stetigkeit charakterisiert. Sie wird von POINCARÉ so ausgedrückt:

> *Cele posé, si A et B sont deux éléments discernables d'un continu C, on pourra trouver une série d'éléments*
>
> $$E_1, E_2, \dots, E_n$$
>
> *appartenant tous à ce même continu C et tels que chacun d'eux est indiscernables du précédent, que E_1 est indiscernable de A et E_n indiscernable de B.*[7]

---

[3]In [5, S. 52]: *Jedes seiner Elemente besteht aus einer Gesammtheit von Eindrücken, und es ist zweierlei möglich: entweder ist ein Element von einem anderen des gleichen Kontinuums nicht zu unterscheiden, [...] oder diese Unterscheidung ist möglich.* [4, S. 71]

[4]See [4, S. 69]; [6, S. 22, S. 225]

[5]*Elemente der Psychophysik.* (2 Bde) Leipzig: Breitkopf und Härten, 1860.

[6]Durch Abwägen in der Hand, also ohne alle Hilfsmittel.

[7]In [5, S. 52]: *[man kann], wenn A und B zwei unterscheidbare Elemente sind, eine Reihe von Elementen $E_1, E_2, \dots, E_n$ finden, die alle zu dem Kontinuum K gehören, und von denen jedes einzelne vom vorhergehenden nicht zu unterscheiden ist, E_1 nicht von A und E_n nicht von B.*[4, S. 71]

Das bedeutet: *die Relation Ununterscheidbarkeit ist nicht transitiv.* Das Kontinuum K wird ferner zusammenhängend, wenn man für jedes beliebige Paar von Elementen A, B eine solche Reihe bilden kann.[8]

POINCARÉ untersucht dann den Begriff des mathematischen Kontinuums (MK). Dieses wird als die Ansammlung aller rationalen und aller irrationalen Zahlen aufgefasst, welche in eine gewisse Ordnung gebracht sind. Das MK ist demnach eine Sammlung von Individuen. POINCARÉ stellt die Frage, ob der Begriff des MK nicht einfach der Erfahrung entnommen ist. Aber in der Erfahrung kann es, wie gesehen, vorkommen, daß zwei unterscheidbare Elemente von einem dritten nicht zu unterscheiden sind (s.o.). POINCARÉ übersetzt diese Eigenschaften durch Zeichen folgenderweise:

$$A = B \quad B = C \quad A < C$$

und sagt:

> *Ce serait là la formule du continu physique, tel que nous le donne l'expérience brute, d'où une contradiction intolérable que l'on a levée par l'introduction du continu mathématique.*[9]

Dieser "untolerierbare Widerspruch", auf den POINCARÉ hinweist, liegt darin begründet, daß die Beziehung *Gleichheit* zwischen den Elementen des MK transitiv ist, während die Beziehung *Ununterscheidbarkeit* zwischen den Elementen des PK nicht transitiv ist. POINCARÉ hat durch seine Übersetzung die Elemente des PK durch Elemente des MK ersetzt, dann hat er die Beziehung *Ununterscheidbarkeit* in die Beziehung *Gleichheit* und die Beziehung *unterscheidbar* in die Beziehung *kleiner als* übersetzt. Aus jenem Widerspruch schließt POINCARÉ, daß der Begriff des mathematischen Kontinuums (MK) nicht aus der Erfahrung stammen kann.

Der Widerspruch entsteht aber durch diese Übersetzung. Kann man diese Beziehungen anders übersetzen, so daß der Widerspruch vermieden wird? Wir werden in der Arbeit von F. RIESZ eine positive Antwort finden.

---

[8] Der Poincarésche Begriff des PK erfüllt per definitionem diese Bedingung. Der Begriff Zusammenhängendsein wird an dieser Stelle von Poincaré definiert, weil er ihn für seine Untersuchungen über die Dimension des PK brauchen wird.

[9] Ibid S. 69. In [5, S. 51]: *Eine solche Festellung würde man, in Zeichen übersetzt, so schreiben $A = B$, $B = C$, $A < C$. Das wäre die Formel des physikalischen Kontinuums, wie sie uns die grobe Erfahrung lehrt; daraus entspringt ein unerträglicher Widerspruch, den man durch Einführung des mathematischen Kontinuums gehoben hat.*

FRIEDRICH RIESZ (1880–1965) studierte in Zürich, und Budapest. Vor seiner Promotion im Jahr 1902 verbrachte er ein Jahr in Göttingen, wo er mit David Hilbert in Kontakt kam. 1912 wurde er Professor in Klausenburg und 1948 in Budapest. Im Jahr 1906 erschien auf ungarisch sein Artikel *Die Genesis des Raumbegriffes*[10] (1907 die Version auf deutsch). Es handelt sich um eine Arbeit philosophischen und mathematischen Charakters, in der RIESZ nach der Entwicklung des Raumbegriffes fragt. Für ein System von Voraussetzungen einer beschreibenden Geometrie stellt RIESZ folgende konkrete Fragen: verträgt sich dieses System mit unserer Raumanschauung? in wie weit würde ein solches System aus dieser folgen? ist die Geometrie, die man durch dieses System aufbaut, geeignet für die Beschreibung unserer Raumanschauung?

In dieser Arbeit knüpft RIESZ an POINCARÉS *La valeur de la science* an. RIESZ versucht, die erwähnten Fragen zu beantworten, indem er das physikalische Kontinuum (PK) von POINCARÉ mathematisiert, d.h. er definiert ein mathematisches Kontinuum (MK), auf das die Eigenschaften des PK von POINCARÉ sich übertragen lassen.

Zunächst übernimmt RIESZ den Poincaréschen Begriff des PK; jedoch ohne von Gruppenempfindungen[11] zu reden und ohne zu verlangen, daß das PK zusammenhängend sei.[12]

> *Ich sage von einer Mannigfaltigkeit,*[13] *sie bilde ein physikalisches Kontinuum, wenn auf Grund irgend einer Vorschrift für jedes Paar von Elementen der Mannigfaltigkeit eine und nur eine der beiden Beziehungen besteht; a) die beiden Elemente sind unterscheidbar; b) die beiden Elemente sind ununterscheidbar.*[14]

RIESZ verweist nicht auf FECHNER, er nimmt die Resultate der Psychologie als Tatsachen an. Er abstrahiert von diesen Erfahrungsphänomenen und definiert aus ihnen Begriffe, für die er die mathematische - genau gesagt, die mengentheoretische Sprache verwendet. Wie bei POINCARÉ ist das PK zusammenhängend, wenn man für jedes beliebige Paar von Elementen aus dem PK eine Kette des oben beschriebenen Typus[15] finden kann.

[10] [7]

[11] Vgl. mit dem ersten Zitat.

[12] Riesz wird sogar einige verschiedene Klassen von PK definieren: eigentliches PK, diskretes PK, punktartiges PK und zusammenhängendes PK ([Riesz, F. 1907], S. 315).

[13] Für den Begriff der Mannigfaltigkeit verweist Riesz auf [3]. Siehe [7] S. 315.

[14] Ibid S. 315.

[15] Siehe 2. Zitat

Anhand des Cantorschen Begriffes des Häufungspunktes[16] definiert RIESZ das mathematische Kontinuum ([7, S.318]):

> *Ich sage von einer Mannigfaltigkeit, sie bilde ein mathematisches Kontinuum, wenn auf Grund irgend einer Vorschrift zwischen jedem Elemente und jeder Teilmenge derselben eine und nur eine der beide Beziehungen besteht:* a) *das Element ist in bezug auf die Teilmenge isoliert;* b) *das Element ist eine Verdichtungsstelle der Teilmenge, und dabei folgende Grundsätze befriedigt werden:*
>
> 1. *In bezug auf eine Teilmenge, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen besteht, ist jedes Element isoliert.*
> 2. *Ist ein Element Verdichtungsstelle einer Teilmenge, so ist es auch Verdichtungsstelle einer jeden weiteren Teilmenge, in welcher jene Teilmenge enthalten ist.*
> 3. *Wird eine Teilmenge in zwei weitere Teilmengen zerlegt, so ist jedes Element, das Verdichtungsstelle jener Teilmenge ist, zugleich Verdichtungsstelle wenigstens einer jener Teilmengen.*
> 4. *Ist A eine Verdichtungsstelle der Teilmenge* t *und B ein von A verschiedenes Element, so gibt es eine weitere Teilmenge* t* *von* t, *in bezug auf welche A Verdichtungsstelle, B aber isoliert ist.*[17]

Im Gegensatz zu POINCARÉ ist für RIESZ das MK nicht ein eindeutiges und auch nicht die Menge der reellen Zahlen. Diese ist nur, so wie jede "Punktmannigfaltigkeit", das einfachste Beispiel eines MK. Ein anderes Beispiel kann eine Funktionenmenge sein, wenn eine *zweckmäßige Verallgemeinerung des Distanzbegriffes herangezogen* wird. Ferner bemerkt RIESZ, daß man durch Anwendung zweier verschiedener *Vorschriften* auf ein und dieselbe Menge zwei verschiedene MK erzeugen kann.[18]

Mit seinem Begriff des mathematischen Kontinuums findet die Übersetzung der Beziehung *Ununterscheidbarkeit* folgende Form:

[16] [1]. Siehe [7, S. 345].

[17] Mit modernen Symbolen: sei M' die Menge aller Häufungspunkte von M. M ist ein mathematisches Kontinuum, wenn für alle $x \in M$ gilt: entweder (a) $x \notin M'$ (x ist isoliert in Bezug auf M), oder (b) $x \in M'$ (x ist Häufungspunkt von M), und dabei folgende Bedingungen erfüllt werden: 1. $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$, dann $M' = \emptyset$; 2. $x \in M'$ und $M \subset N$, dann $x \in N'$; 3. sei $M = P \cup Q$ mit $P \cap Q = \emptyset$; ist $x \in M'$, dann ist entweder $x \in P'$ oder $x \in Q'$; 4. Ist $x \in M'$ und $y \neq x$, dann existiert $N \subset M$, so daß $x \in N'$ aber $y \notin N'$.

[18] [7, S. 318]

> [...] *die einzelnen physikalischen Kontinua* [...] *lassen sich eindeutig umkehrbar auf Systeme von Teilmengen des mathematischen Kontinuums abbilden, der Art, daß Teilmengen mit gemeinsamem Elemente ununterscheidbaren, und Teilmengen ohne gemeinsames Element unterscheidbaren Punkten entsprechen.*[19]

Es lässt sich also ein mathematisches Kontinuum konstruieren, das sich mit unserer Raumanschauung verträgt. Und der erste Ansatz zu seinem Begriff findet sich in den Beziehungen zwischen den Elementen des physikalischen Kontinuum, d.h. in der Erfahrung.

Literatur

[1] Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.* **46**.

[2] *Elemente der Psychophysik.* (2 Bde) Leipzig: Breitkopf und Härtel.

[3] Über die Grundlagen der Geometrie. *Gött. Nachr.* 233-241.

[4] *La valeur de la science.* Paris: Flammarion (1. Aufl. 1905).

[5] *Der Wert der Wissenschaft.* Leipzig: Teubner.

[6] *Wissenschaft und Hypothese.* 3. Aufl. Leipzig: Teubner. Übersetzung von F. und L. Lindemann. Orginal Ausgabe:*La Science et l'Hypothèse.* Paris: Flammarion 1902.

[7] Die Genesis des Raumbegriffes. *Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn* **24** 309-353 (Das ungarische Original dieser Arbeit erschien unter: A térfogalom generise. *Math. és Phys. Lapok* **15** (1906) 280-291.).

Laura Rodríguez
Johannes Guttenberg-Universität
Fachbereich 17 – Mathematik
D-550 99 Mainz
Deutschland
e-mail: laurar@mathematik.uni-mainz.de

[19] Der ausführliche Beweis dieser Behauptung wird von RIESZ im weiteren Verlauf seines Artikels vollzogen. [7, S. 312]