

Historický vývoj pojmu křivka

4.2 Studium křivek na přelomu 17. a 18. století

In: Lenka Lomtadze (author): Historický vývoj pojmu křivka. (Czech). Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. pp. 133–139.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401108>

Terms of use:

© Lomtadze, Lenka

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

4.2. Studium křivek na přelomu 17. a 18. století

Metody analytické geometrie (a postupně také metody vznikajícího infinitezimálního počtu) bylo možné ověřovat na rovinných křivkách. Díky tomu se studium rovinných křivek na konci 17. a zejména v první polovině 18. století neobyčejně rozvíjí. Pozornost na sebe přitáhly křivky popsané ve starověku. Např. Dioklova kisoida (viz str. 52) byla objektem, na němž mnoho matematiků zkoušelo konstrukci tečny a další úlohy, z nichž vznikl infinitezimální počet. R. Sluze⁹ jako první v dopise Huygensovi z roku 1658 opouští představy starověkých učenců o kisoidě a uvažuje tuto křivku i mimo oblast ohraničenou kružnicí. Podobně jako Dioklova kisoida dočkala se v 17. století oživení i Nikomédova konchoida (viz str. 53). Konstrukcí její tečny se zabývali už v letech 1636–37 Descartes, Fermat a Roberval. Roberval však považoval větve konchoidy za dvě různé křivky. Inflexní body konchoidy vyšetřoval v letech 1653–54 Huygens, jehož postup našel v 19. století ohlas v algebraické geometrii.¹⁰ Jejím využitím se zabýval i Newton.

Kromě intenzivního studia (a v mnohém znovuobjevování) křivek starověké geometrie spadá do tohoto období i objevení některých křivek nových. Podněty k popisu nových křivek přicházely z praxe nebo je skýtala sama geometrie. Descartův list (viz obr. 4.2(b)) je algebraická křivka vyjádřená v dnešní symbolice rovnicí

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0. \quad (4.12)$$

Ačkoliv první zmínka o této křivce se objevuje v Descartových dopisech Mersennovi v roce 1638 (viz obr. 4.2(a)), kde Descartovi sloužila při konstrukci tečny,¹¹ její celkový průběh vyšetřil teprve Huygens roku 1692.

Do vymezeného období spadá i proslavená úloha o brachistochroně zformulovaná Johannem Bernoullim v roce 1696:

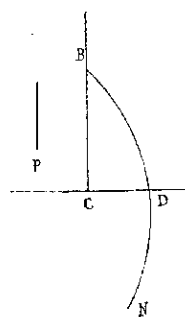
Ve vertikální rovině s pravoúhlo soustavou souřadnic (osa x je horizontální) zvolme body $A = [x_a, y_a]$, $B = [x_b, y_b]$, kde $x_a \neq x_b$ a $y_a > y_b$. Po jaké křivce se musí pohybovat hmotný bod, aby z polohy A dospěl do polohy B v nejkratším čase?

Johann Bernoulli vzápětí úlohu vyřešil, odpovídající křivkou je **cyk-**

⁹René François Walter de Sluze (1622–1685).

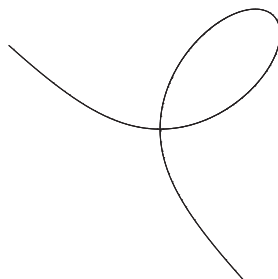
¹⁰Podrobněji [Fuc99, str. 141].

¹¹Viz Descartův dopis Mersennovi z ledna 1638 v [Ada08, svazek I, str. 490].



(a) zmínka Descarta o křivce (viz BDN) z roku 1638

des questions qui font vn peu difficiles, mais seulement aux plus ayfées, ainſy qu'il pourra éſprouer, ſi apres l'auoir mieux digérée il tafche de ſ'en ſeruir pour trouver les contingentes, par exemple, de la ligne courbe * BDN , que ie ſuppoſe eſtre telle, qu'en quelque lieu de ſa circonſerence qu'on prenne le point B , ayant tiré la perpendiculaire BC , les deux cubes des deux lignes BC & CD



(b) průběh křivky

Obrázek 4.2: Descartův list

loida.¹² Řešení podal i jeho bratr Jacob, Newton, Leibniz a l'Hospital.¹³ Historie této křivky je popsána v dostupné literatuře,¹⁴ proto se jí zde nebudeme zabývat.

Způsob, jakým se v té době nové křivky často dostávaly do povědomí, ilustrujeme na méně známé historii tzv. *Cassiniho oválu* v odstavci 4.2.1.

Období 1649–1748 je specifické vyšetřováním mnoha speciálních případů, ale chybí snaha o zobecňování. Jedinou výjimku v tomto směru tvoří teorie kubických křivek vytvořená Newtonem (viz sekce 4.3). Přestože např. rovnice paraboly přímo nabízí zobecnění

$$y^k = px, \quad k \in \mathbb{Q}^+, \quad (4.13)$$

k rozsáhlejšímu studiu těchto tzv. obecných parabol dochází až v první polovině 19. století. Speciální případy ovšem spadají do období, kterým se zde zabýváme. Vlastnosti *kubické paraboly*, tj. křivky (4.13) pro $k = 3$, studoval především Joh. Bernoulli v roce 1698. Příklad $k = \frac{2}{3}$, tj.

¹²Ačkoliv se zdá velmi pravděpodobné, že už starověcí učenci uvažovali křivku tohoto typu, důkaz o tom nemáme. Podle [Lor11, str. 74] je první zmínka o cykloidě v knize Charlese de Bouvellese (1471–1553) vydané v Paříži roku 1501. V novověku studoval cykloidu Mikoláš Kusánský [Nicholas Cusa] (1401–1464), když se pokoušel vypočítat obsah kruhu. Pravděpodobně křivku pojmenoval Galileo v roce 1599. Roku 1639 psal E. Torricellimu (1608–1647), že studuje vlastnost této křivky 40 let.

¹³Řešení obou bratrů byla názorným dokladem rozdílnosti jejich přístupů k matematickým problémům. Johann obdržel výslednou rovnici cykloidy geniální intuicí a využitím analogie s Fermatovým principem o šíření světla. Jacobův systematický postup vedl k objevu variačního počtu, k němuž dal takto vlastně Johann podnět. Viz [Fuc99, str. 88].

¹⁴Viz např. [Fuc99].

E L E M E N S D'ASTRONOMIE.

Par M. CASSINI, Maître des Comptes,
de l'Académie Royale des Sciences,
& de la Société Royale de Londres.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCXL.

150 E L E M E N S
mesurent la plus grande & la plus petite distance du soleil à la terre.

Pour déterminer les points H & L , qui répondent aux distances données du soleil à la terre, on décrira du point C , comme centre, & de l'intervalle CA ou CP , le cercle $ADPG$, & ayant pris FD à discrétion d'une quantité qui soit plus grande que FP , & plus petite que AF , on décrira du foyer F , comme centre à l'intervalle FD , l'arc de cercle DH , qui coupera le cercle $ADPG$ en D . On prolongera DF en G , & du point E , comme centre à l'intervalle ET , égal à FG , on décrira un arc de cercle TH , qui coupera le précédent DH au point H . Le dis que le point H représentera un des points de la courbe cherchée où se rencontre le soleil lorsque sa distance à la terre est mesurée par FD , car le rectangle fait sous les lignes FH , HE , est égal au rectangle fait sous les lignes FD , FG , qui par la construction, leur sont égales. Mais le rectangle fait sous les lignes ED , EG , est par la propriété du cercle, égal au rectangle sous les lignes AF , FP , qui mesurent la plus grande & la plus petite distance du soleil à la terre: donc le rectangle sous les lignes FH , HE , est égal au rectangle fait sous la plus grande & la plus petite distance à la terre, & par conséquent le soleil est au point H .

On déterminera de la même manière le point L où se trouve le soleil sur la courbe cherchée, lorsque sa distance à la terre est mesurée par FI , qui est plus petite que sa moyenne distance PC , en menant du point F à l'intervalle FI , l'arc de cercle IL , & du point E à l'intervalle EK , égal à FM , l'arc KL , qui coupera le précédent au point L cherché.

Pour déterminer présentement l'équation du soleil, ou la différence entre son anomalie moyenne & son anomalie vraie, qui répond aux différents points de son orbite, comme, par exemple, lorsqu'il est en H , on fera, comme FD on FH , distance donnée du soleil à la terre, est à sa plus grande distance AF ; ainsi sa plus petite distance FP , est à la grandeur de FG ou HE ; & dans le triangle EHF , dont les côtés FH , HE , sont connus, de même que FE , qui mesure le double de l'excentricité de l'orbite du soleil, on trouvera l'angle EFH de son anomalie vraie, & l'angle FEH ou AEH de son anomalie moyenne. La différence EHF , mesure

D'ASTRONOMIE. Livre II. 149

l'on fera, comme DS 111905, est à DC 100000; ainsi $2'$ 27", font à l'angle ODS , que l'on trouvera comme ci-dessus de $2'$ 11", que l'on retranchera de l'angle CDS , de 9° 15' 52", & on aura l'angle CDU ou DCU , qui lui est égal, de 9° 15' 41", qu'il faut retrancher de l'angle ACD , de 65° 8' 0", pour avoir l'angle ACU , de 55° 44' 19"; & dans le triangle UCS , dont les côtés UC , CS , sont connus, & l'angle compris UCS , est de 129° 15' 41", l'ajoutement de l'angle ACU , on aura l'angle CSU , de 42° 36' 45"; & l'on fera, comme HC 100000, est à GC 97796; ainsi la tangente de l'angle CSU ou SM , de 42° 36' 45", est à la tangente de l'angle ATL du vrai mouvement, qui convient à 60 degrés d'anomalie moyenne, qu'on trouvera de 41° 58' 38". Le retranchant de 60 degrés, on aura l'équation qui y répond, de 18° 1' 22", qui est plus petite de $34'$ 22" que dans l'hypothèse elliptique simple.

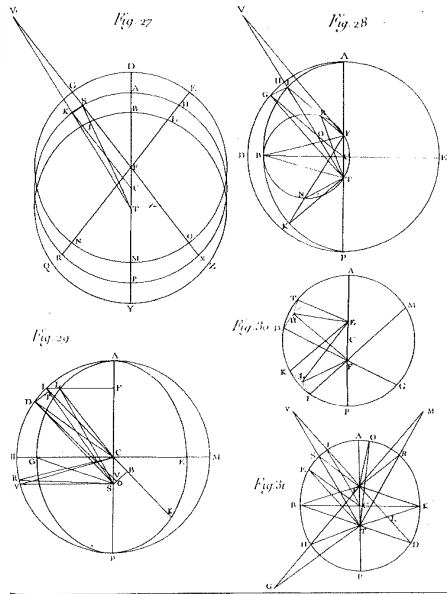
III.

Autre hypothèse du mouvement apparent du soleil autour de la terre.

Depuis l'observation exacte de la grandeur apparente des diamètres du soleil, mon pere a trouvé une autre courbe différente de l'ellipse, qui sert à représenter fort exactement les mouvements vrais du soleil, & ses diverses distances à la terre.

Il suppose que la terre étant placée à l'un des foyers de cette courbe, le soleil la parcourt par son mouvement propre, de manière que tirant de son centre aux deux foyers de la courbe, deux lignes droites, le rectangle fait sur ces deux lignes, soit toujours égal au rectangle fait sur la plus grande & la plus petite distance du soleil à la terre.

Soit, par exemple, AP (Fig. 30.) une ligne qui représente le grand axe de cette courbe, dont C soit le centre, F un des foyers où est placée la terre, & l'autre foyer à égale distance du point C , H & L le soleil en deux situations différentes. Si l'on mène des points H & L aux foyers b & f , les lignes He , Hf & Lf , Lh ; le rectangle sous les lignes He , Hf , de même que sous les lignes Lh , Lf , doit être égal au rectangle sous les lignes AF , FP , qui



Obrázek 4.3: Ukázka z *Eléments d'astronomie* z roku 1740 (titulní strana, strany 149–150, kde popisuje J. Cassini ovál, a příslušný obrázek)

křivku typu

$$y^{\frac{2}{3}} = px,$$

pojmenoval J. Wallis¹⁵ *semikubickou parabolou*. Z Wallisova podnětu se jí zabýval W. Neil¹⁶ roku 1657 a zjistil, že semikubická parabola je algebraicky rektifikovatelná křivka.¹⁷ Jeho výsledky uveřejnil v roce 1659 opět Wallis (viz str. 164).

4.2.1. Cassiniho ovály

Cassiniho ovál je křivka, která byla nazvána po francouzském astronomovi Giovannim Domenicu Cassinim.¹⁸ G. Cassini proslul mnohými výsledky v astronomii (např. objevil čtyři Saturnovy měsíce). Roku 1669 byl jmenován členem akademie věd v Paříži a ředitelem nové hvězdárny. Jeho syn, vnuk i pravnuke ho v ředitelství následovali. G. Cassini popsal ovál roku 1680 jako domělou dráhu pohybu Země kolem Slunce, přičemž Slunce se nachází v jednom ohnisku. Jeho výsledek uveřejnil jeho syn Jacob Cassini¹⁹ v *Eléments d'astronomie (Základy astronomie)* teprve roku 1740 (viz ukázka na obr. 4.3).

Z dnešního pohledu lze říci, že Cassiniho ovál je jistou analogií elipsy a v moderní symbolice bychom ho popsali následovně:

Definice. Nechtě F a G jsou dva pevně dané body v rovině, $F \neq G$. Množina bodů X v rovině takových, že součin vzdáleností $|FX|$ a $|GX|$ je konstantní a roven k^2 , se nazývá **Cassiniho ovál**.

Tedy Cassiniho ovál lze popsat rovnicí

$$|FX| \cdot |GX| = k^2. \quad (4.14)$$

Označíme-li vzdálenost mezi body F a G (ohnisky) $2c$, tj. $|FS| = c = |GS|$, pak v pravoúhlé souřadné soustavě $S[0, 0]$, $x = |SG|$ je $F = [-c, 0]$, $G = [c, 0]$ a rovnice (4.14) může být vyjádřena jako

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= k^2, \\ ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) &= k^4. \end{aligned} \quad (4.15)$$

¹⁵John Wallis (1616–1703).

¹⁶William Neil (1637–1670).

¹⁷Viz [Fuc99, str. 139].

¹⁸Giovanni Domenico Cassini (1625–1712).

¹⁹Jacob Cassini (1677–1756).

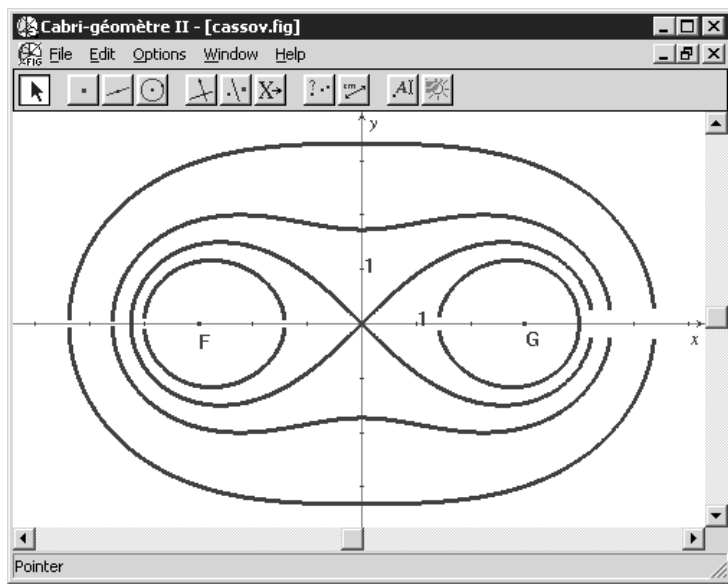
Jednoduchými úpravami obdržíme z (4.15) známější vyjádření:²⁰

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) + c^4 - k^4 = 0. \quad (4.16)$$

Cassiniho ovál je křivka čtvrtého stupně, tj. s přímkou musí mít včetně násobnosti čtyři průsečíky. Vypočítáme průsečíky s osami x , y

$$[\pm\sqrt{c^2 \pm k^2}, 0], [0, \pm\sqrt{-c^2 \pm k^2}].$$

Vidíme, že některé průsečíky mohou být imaginární. Počet reálných průsečíků závisí na hodnotě parametrů c a k . Provedeme diskusi geometrických vlastností křivky vzhledem k těmto parametrům, pro $c > 0$, neboť c značí vzdálenost ohnisek, a bez újmy na obecnosti lze předpokládat také $k > 0$.



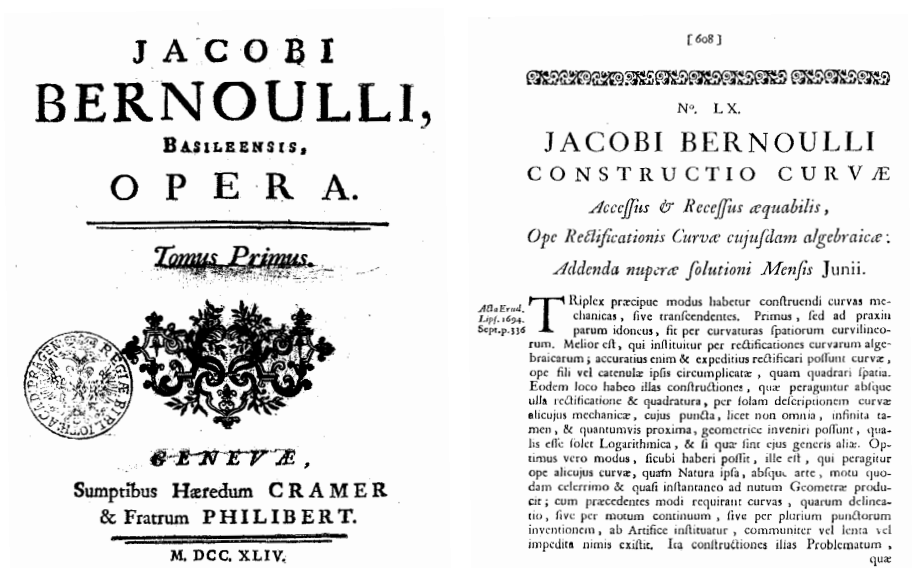
Obrázek 4.4: Cassiniho ovály sestrojné v CABRI GEOMETRII

Není těžké ukázat, že pro $c < k$ je Cassiniho ovál souvislá křivka a pro $c > k$ sestává ze dvou disjunktních větví (viz obr. 4.4). Pro $c = k$ prochází počátkem souřadného systému a protíná v tomto bodě sebe sama, neboť jestliže $c = k$, pak z rovnice (4.16) obdržíme

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = 0. \quad (4.17)$$

²⁰Viz např. [Lor10, str. 209].

Takovou diskusi však Cassini neprovedl, s největší pravděpodobností proto, že ho jako astronoma zajímala tato křivka pouze jako domělá dráha oběhu Země kolem Slunce.



Obrázek 4.5: *Acta Eruditorum* z roku 1694 s příspěvkem Jacoba Bernoulliho o lemniskatě

Roku 1694 Jacob Bernoulli²¹ poprvé popsal nezávisle na Cassinim ten případ, kdy je konstanta rovna polovině vzdálenosti ohnisek – viz rovnice (4.17). Bernoulli uvedl polární rovnice této křivky a pojmenoval ji *lemniscus* z řeckého slova *λιμνισκος* – stuha, mašle. Svůj objev uveřejnil v *Acta Eruditorum* v září 1694 (viz ukázka na obr. 4.5). Netušil tehdy, že před čtrnácti lety Cassini popsal obecnější případ takové křivky, což není překvapivé, uvědomíme-li si, že o Cassiniho oválu píše až jeho syn roku 1740. Zajímavé ale je, že o souvislosti Cassiniho oválu a Bernoulliho lemniskaty nevěděli matematikové ještě několik desetiletí, ačkoliv se zejména lemniskatou řada z nich zabývala. Lemniskatě vyjádřené implicitní rovnicí (4.17) odpovídá křivka procházející počátkem na obr. 4.4. Vlastnosti lemniskaty studoval zejména Fagnano kolem roku 1750.²² Zdá se však, že geometrii Fagnanovy epochy studovali lemnis-

²¹Jacob (Jacques) Bernoulli (1654–1705), bratr neméně proslulého matematika Johanna Bernoulliho.

²²Giovanni Francesco Fagnano (1715–1797). Později se lemniskatou zabývali také Euler a Gauss. Jejich práce vedly k zavedení eliptických funkcí a k teorii eliptických integrálů v 19. století.

katu více z analytického hlediska, než aby odkrývali její geometrické vlastnosti. G. Loria uvádí rok 1782 jako rok, kdy P. Ferroni²³ ukázal že speciálním případem Cassiniho oválů je Bernoulliova lemniskata.²⁴ Ale ještě v roce 1785 píše d’Alembert v *Encyklopedie méthodique* pod heslem LEMNISCATE:

*Je možno najít další křivky ve tvaru čísllice osm. Viz např. elipsa Cassiniho, ale ta, o které jsme se právě zmiňovali, je jednodušší.*²⁵

Z toho vyplývá, že lemniskatu a Cassiniho ovály považoval za dvě různé křivky. A tak se skutečnost, že lemniskata je jen speciální případ Cassiniho oválů, dostává do povědomí matematiků až po roce 1806, kdy byla totožnost obou křivek dokázána G. Saladinim.²⁶

4.3. Isaac Newton a teorie křivek

V předchozích odstavcích jsme mohli sledovat, že nových výsledků obdržených v geometrii pomocí nové metody představené Descartem nebylo na přelomu 17. a 18. století mnoho a hlavně měly spíš nesouvislý charakter.²⁷ Teprve Newton přidal k analytické geometrii kuželoseček novou širokou oblast – teorii kubických křivek, jejichž jednotlivé případy byly známy již dříve.

Není naším cílem věnovat se zde osobnosti Newtona, ani jeho rozsáhlému přínosu pro přírodní vědy. Klademe si za úkol jen poukázat na to, co přinesly jeho práce k teorii křivek. Přestože Newtonovy myšlenky zásadně ovlivnily celou tehdy známou matematiku a fyziku, šířily se většinou jen díky korespondenci, přednáškám a rukopisům kolujícím mezi jeho přáteli. Publikoval je často až na naléhání druhých a mnohé bylo publikováno několik let po rukopise nebo až po Newtonově smrti.

Je známo, že se během svých studií na univerzitě v Cambridge seznámil s pracemi Eukleida, Apollónia, Vièty, Fermata, Keplera, Descarta i Wallise. Po té, co prostudoval druhé latinské vydání Descartovy *Geometrie* vydané v letech 1659–61 a spisy Wallise a Schootena, Newton

²³Pietro Ferroni (1744–1825).

²⁴Loria se v [Lor10, str. 216] odkazuje na článek *Prodromo d’osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi dal sig. Marchese de Condarcet*, Mem. Societa ital. delle Scienze V, 1790.

²⁵*Il peut y avoir plusieurs autres courbes en 8 de chiffre. Voyez, par exemple, Ellipse de Cassini: mais celle dont nous venons de parler est la plus simple.* Viz *Encyklopedie méthodique*, Paris, 1785, tome second, str. 266–7.

²⁶Girolamo Saladini (1731–1813); viz [Lor10, str. 216].

²⁷Větší roli než v samotné geometrii sehrála metoda souřadnic a rovnice s proměnnými veličinami v rozvíjející se analýze. Viz [Juš70, str. 114].