Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty

Výpočet objemu tělesa

In: Hana Vymazalová (author): Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty. (Czech). Praha: Český egyptologický ústav FF UK, 2006. pp. 46–49.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401076

Terms of use:

© Vymazalová, Hana

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

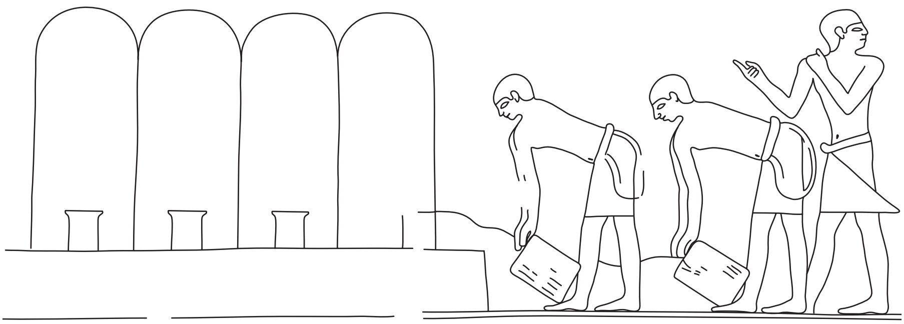
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

I.7 Výpočet objemu tělesa

Objemy těles se počítají v Rhindově, moskevském a káhúnském papyru. Úlohy v jednotlivých textech se liší, a to jak způsobem zadání a metodou řešení, tak obtížností řešených příkladů.

Za pozornost stojí skutečnost, že zatímco u obsahů plochy se pracuje s jasnou terminologií popisující jednotlivé obrazce i jejich rozměry, v případě těles se s obecnými termíny nesetkáme. Rhindův papyrus problémy popisuje na příkladu obilních sýpek s čtvercovou nebo kruhovou podstavou, takže se vyhýbá názvům pro kvádr (krychli) a válec. Komolý jehlan v moskevském papyru je popsán pomocí ideogramu, nikoli slovním termínem. Úloha v káhúnském papyru není dochována celá.

Rhindův papyrus ve svých příkladech s obilními sýpkami zachycuje další významnou součást života staroegyptské společnosti. Výpočet objemu je v těchto úlohách velice jednoduchý, zajímavé jsou však převody jednotek, jež se zde procvičují a které mohly být hlavní náplní těchto úloh. Rozměry se zadávají v loktech, výsledek se z loktů^3 převede nejprve na pytle a poté na stovky čtyřnásobných měřic.



Kontrolor měrných nádob a jeho pomocník odebírají zrno ze sýpky, muž stojící za nimi hlásí odměřená množství písařům. Nikauisesiho hrobka v Sakkáře, 6. dynastie

Kvádr a krychle

Rozměry tělesa jsou dány rozměry podstavy, tedy obdélníku, které doplňuje údaj o výšce, jež se nazývá *ḥeḥ*. Objem kvádru i krychle, se kterými se setkáváme v Rhindově papyru, se počítá dle vztahu $V = S \cdot v$, kde obsah podstavy S se získá postupem procvičeným v úlohách popsaných v předchozím oddílu a v je výška.

R44: $a = 10$, $b = 10$, $c = 10$

$10 \cdot 10 = 100$

$100 \cdot 10 = 1\,000$

$1\,000 + \frac{1}{2} \cdot 1\,000 = 1\,000 + 500 = 1\,500$

$\frac{1}{20} \cdot 1\,500 = 75$

Postup řešení je jednoduchý. Výsledných 1 000 loktů^3 se převede nejprve na 1 500 pytlů a poté na 75 stovek čtyřnásobných měřic.

R45: $V = 75$

$75 \cdot 20 = 1\,500$

$\frac{1}{10} \cdot 1\,500 = 150$

$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot 1\,500 = 15$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot 1\,500 = 10$

V tomto případě je úloha zadána obráceně, avšak jde o tutéž sýpku jako v úloze R44. Zadání neupřesňuje ani tvar tělesa, ani žádný z rozměrů. Výpočet nicméně ukazuje, že se jedná o těleso s pravoúhlou podstavou, přesněji o krychli, a dva rozměry rovné 10 loktům byly počtáři známy. Objem ve stovkách čtyřnásobných měřic se nejprve převede na pytle. Dvojí vydělení 10 vede ke zjištění třetího rozměru, který se však ještě musí vyjádřit v loktech podle vztahu 1 loket $= 1 + \frac{1}{2}$ pytle.

R46: $V = 25$

$25 \cdot 20 = 500$

$\frac{1}{10} \cdot 500 = 50$

$\frac{1}{20} \cdot 500 = 25$

$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot 500 = 5$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot 500 = 3 + \frac{1}{3}$

Postup je stejný jako v předcházejícím případě. Po převedení na pytle se objem vydělí dvěma známými rozměry (které však opět nejsou v zadání výslovně uvedeny). Výpočet $\frac{1}{20}$ objemu s postupem řešení nijak nesouvisí a byl zde zapsán asi omylem. Tato úloha se zabývá sýpkou s třetinovou výškou, a tedy třetinovou kapacitou ve srovnání s předcházejícími dvěma úlohami.

Válec

Objem válce se počítá vynásobením obsahu kruhové podstavy výškou, jež se nazývá *ḥeḥ*. I v těchto úlohách, stejně jako v případě počítání objemu kvádru, se v Rhindově papyru podrobně procvičuje převádění jednotek. Úloha, která se dochovala na káhúnském papyru, sestává pouze z písemného výpočtu. Slovní zadání či vysvětlující komentáře v tomto případě zcela chybějí.

R41: $d = 9$, $v = 10$

$9 - \frac{1}{9} \cdot 9 = 9 - 1 = 8$

$8 \cdot 8 = 64$

$64 \cdot 10 = 640$

$640 + \frac{1}{2} \cdot 640 = 960$

$\frac{1}{20} \cdot 960 = 48$

Obsah kruhové podstavy se počítá stejně, jak tomu bylo v úlohách počítajících obsahy polí. Obsah podstavy se vynásobí výškou a 640 loktů^3 se převede na pytle a na stovky čtyřnásobných měřic.

R42: $d = 10$, $v = 10$

$10 - \frac{1}{9} \cdot 10 = 10 - (1 + \frac{1}{9}) = 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$(8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}) \cdot (8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}) = 79 + \frac{1}{108} + \frac{1}{324}$

$(79 + \frac{1}{108} + \frac{1}{324}) \cdot 10 = 790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$

$(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}) + \frac{1}{2} \cdot (790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}) = 1185$

$1185 \cdot \frac{1}{20} = 59 + \frac{1}{4}$

Postup řešení je shodný s předcházejícím příkladem, avšak hodnoty, se kterými se zde počítá, nejsou tak příznivé. Převody na pytle a stovky čtyřnásobných měřic vedou k příhodnějšímu tvaru výsledku.

K2´ : $d = 12$, $v = 8$

$12 + \frac{1}{3} \cdot 12 = 12 + 4 = 16$

$16 \cdot 16 = 256$

$256 \cdot (5 + \frac{1}{3}) = 1\,365 + \frac{1}{3}$

Úloha je zadána pomocí jednoduchého náčrtku, který zachycuje tvar podstavy a rozměry. V prvním kroku se spočítá obsah čtverce o straně o třetinu větší než zadaný průměr podstavy. Vynásobením $\frac{2}{3}$ výšky se získá objem válce v pytlích. Postup odpovídá výrazu $(d + \frac{1}{3} \cdot d)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot v$, který je ekvivalentní s postupem $(d - \frac{1}{9} \cdot d)^2 \cdot v \cdot \frac{3}{2}$ známým z úloh z Rhindova papyru.

R43: $v = 9$, $d = 6$

$9 - 1 = 8$

$8 + \frac{1}{3} \cdot 8 = 10 + \frac{2}{3}$

$(10 + \frac{2}{3}) \cdot (10 + \frac{2}{3}) = 113 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$

$(113 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}) \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = (113 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}) \cdot 4 = 455 + \frac{1}{9}$

$\frac{1}{20} \cdot (455 + \frac{1}{9}) = 22 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{45}$

Rozměry zadané v úvodu úlohy byly zaměněny. Podle následujícího výpočtu je průměr podstavy roven 9 a výška 6 loktům. Objem se počítá tak, aby vyšel rovnou v pytlích. Řešení však není správné, neboť se zde spletly dohromady postupy známé z úloh R41 a K2´ do chybného vztahu $((d - \frac{1}{9} \cdot d) \cdot (1 + \frac{1}{3}))^2 \cdot \frac{2}{3}\, v$.

Komolý jehlan

Komolý jehlan v moskevském papyru představuje o něco obtížnější předmět počítání. Těleso je v zadání zachyceno ideogramem, který nejlépe vystihoval jeho tvar. Můžeme je chápat jako nedostavěnou pyramidu se čtvercovou základnou. Výška je označena termínem *setatej*, délku strany horní a dolní základny popisují termíny *cherej* a *ḥerej*. Jednotky, s nimiž se zde počítá, nejsou v příkladu uvedeny, důležitější byl samotný postup řešení.

M14: $v = 6$, $a = 4$, $b = 2$

$4^2 = 16$

$4 \cdot 2 = 8$

$2^2 = 4$

$16 + 8 + 4 = 28$

$\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$

$28 \cdot 2 = 56$

Délky stran horní a dolní podstavy jsou umocněny a také vzájemně vynásobeny, poté se výsledek vynásobí třetinou výšky. Postup tedy odpovídá výrazu $V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot v$.

Jak byl postup řešení odvozen, úloha nijak nenaznačuje. Je možné, že egyptští písaři metodu řešení stanovili empiricky díky svým bohatým konstrukčním zkušenostem.[11]

[11] K různým výkladům viz např. B. Gunn – T. E. Peet, „Four geometrical problems from the Moscow mathematical papyrus“, *The Journal of Egyptian Archaeology* 15 (1929), s. 167–185; K. Vogel, „The truncated pyramid in Egyptian mathematics“, *The Journal of Egyptian Archaeology* 16 (1930), s. 242–249; W. R. Thomas, „Moscow mathematical papyrus no. 14“, *The Journal of Egyptian Archaeology* 17 (1931), s. 50–52. Za zmínku stojí, že v řecké matematice se výpočet objemu jehlanu podle vztahu $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot v$ objevuje v 5. stol př. Kr. u Démokrita a dokazuje jej až Eukleides.