

Jarník's note of the lecture course Punktmengen und reelle Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen 1928)

Illustrations

In: Martina Bečvářová (author); Ivan Netuka (author): Jarník's note of the lecture course Punktmengen und reelle Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen 1928). (English). Praha: Matfyzpress, 2010. pp. [114]–[132].

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401009>

Terms of use:

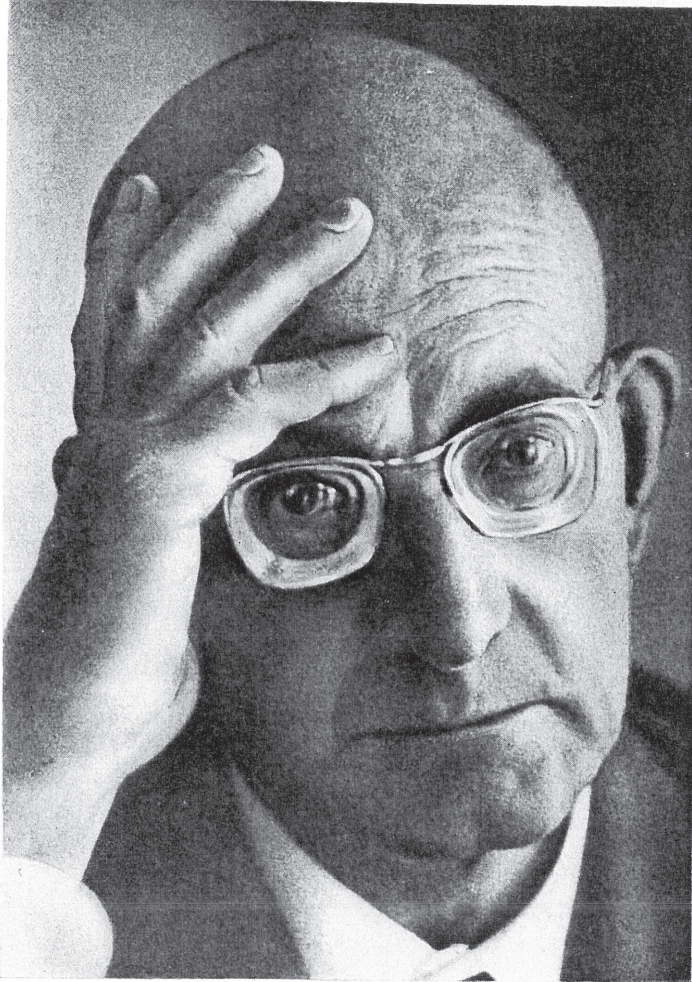
© Bečvářová, Martina

© Netuka, Ivan

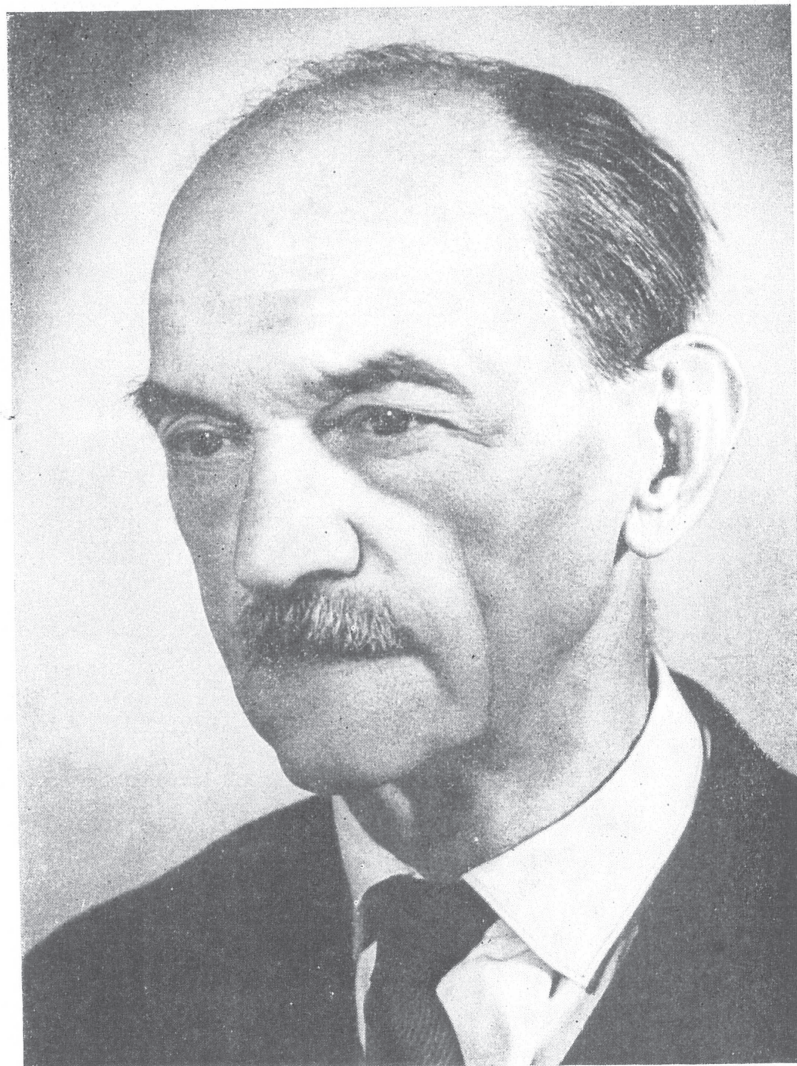
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



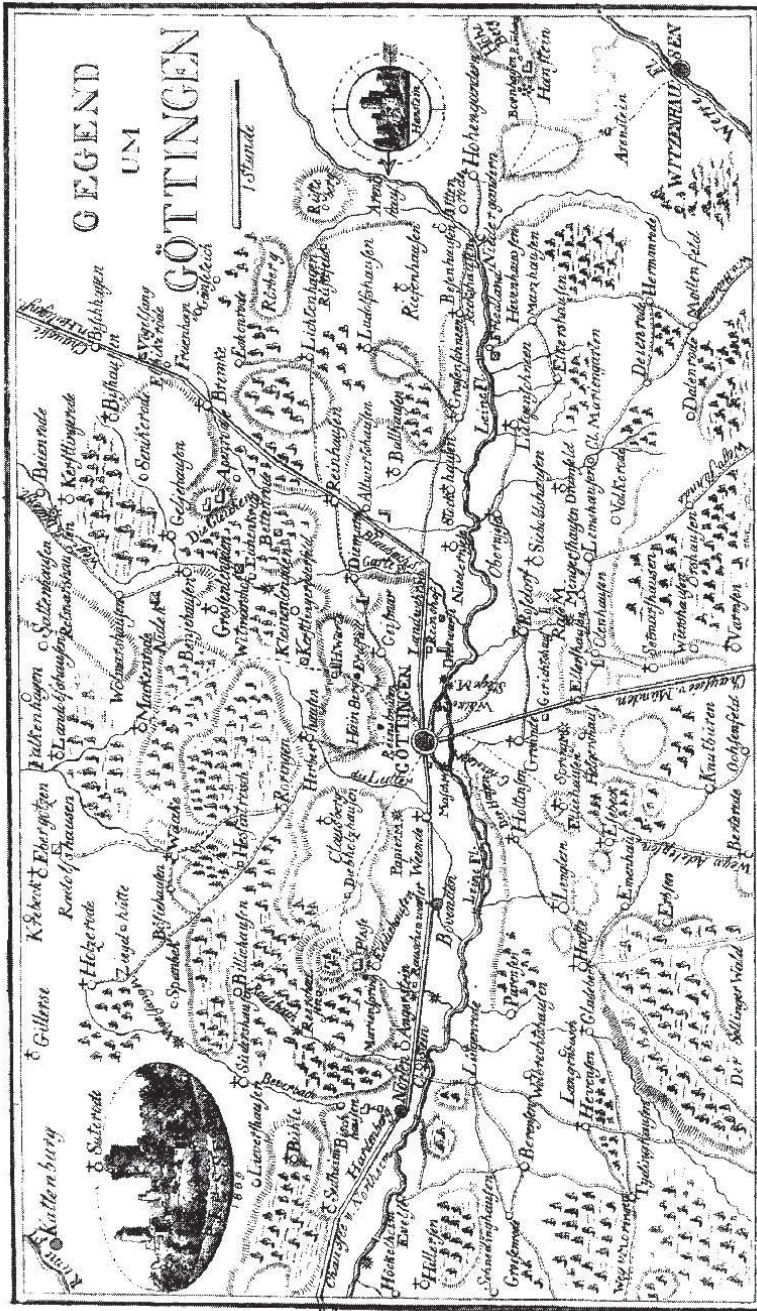
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

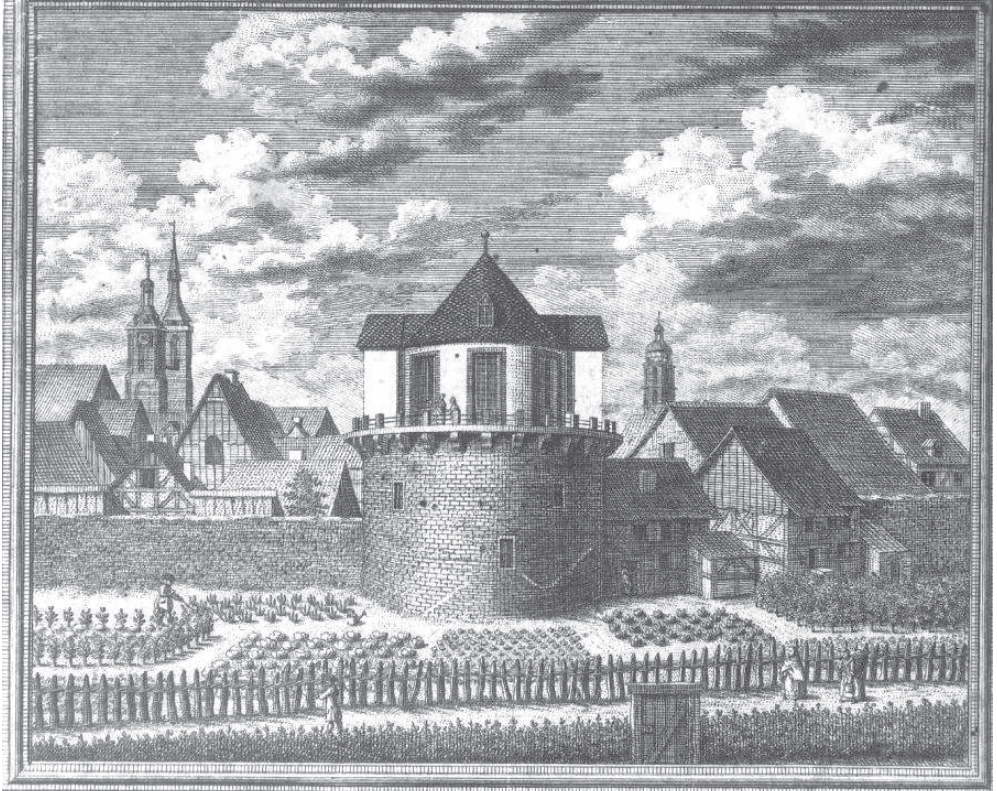


H. Arendt



V. Jarmik





Stern-Warte zu Göttingen

verfertigt von J. F. Kallenhofen, 1773





MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, L. E. J. BROUWER,
RICHARD COUBANT, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER,
THEODOR V. KÁRMÁN, ARNOLD SOMMERFELD

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

CONSTANTIN CARATHÉODORY
IN MÜNCHEN.

95. BAND



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1926

où $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ constituent un système de n entiers positifs choisis arbitrairement. En remplaçant, dans ce produit π_1 , chaque facteur non fermé $E_k^{r_k}$ par le produit de $n - k + 1$ ensembles $E_{k,1}^{r_k s_1} E_{k,2}^{r_k s_2} \dots E_{k,n-k+1}^{r_k s_{n-k+1}}$, tous les s étant des entiers quelconques déterminés, nous déduisons du produit π_1 le second produit π_2 . En remplaçant, dans ce produit π_2 chaque facteur non fermé $E_{k,i}^{r_k s_i}$ par le produit de $n - k + 1$ ensembles

$$E_{k,i,1}^{r_k s_i t_1} E_{k,i,2}^{r_k s_i t_2} \dots E_{k,i,n-k+1}^{r_k s_i t_{n-k+1}},$$

les t déterminés, choisis arbitrairement, nous aurons le troisième produit π_3 , et ainsi de suite. Il est bien évident qu'en recommençant ainsi cette opération, on finira par arriver à un produit π_μ (μ fini) dont chaque facteur est un ensemble fermé. Ce produit π_μ étant un ensemble fermé, nous l'appellerons *ensemble fermé de $n^{\text{ième}}$ espèce*. Tous les produits π_μ que nous définissons ont un nombre fini de facteurs à un nombre fini d'indices; ils forment par suite un ensemble énumérable. Nous dirons qu'un ensemble fermé π_μ de $n^{\text{ième}}$ espèce est *ensemble canonique de $n^{\text{ième}}$ espèce*, si le produit $E\pi_1 \pi_2 \pi_3 \dots \pi_\mu$ contient une infinité non dénombrable de points. Il est clair que tous les ensembles canoniques π_μ de $n^{\text{ième}}$ espèce forment un ensemble énumérable; nous pouvons donc les écrire de la manière suivante :

$$e_n^1, e_n^2, e_n^3, \dots, e_n^\nu, \dots$$

Si l'on fait varier le nombre n , on obtient un tableau à double entrée (e). Nous dirons que ce tableau (e) est *tableau canonique d'ensembles E*.

3. Considérons maintenant les propriétés du tableau canonique (e). Chaque ensemble e_n^ν étant un des produits π_μ , nous dirons que e_n^ν est *diviseur régulier* de e_m^ν ($m > n$), s'il y a parmi les facteurs du produit e_m^ν tous les facteurs du produit e_n^ν . Nous dirons qu'une suite

$$e_{n_1}^{\nu_1}, e_{n_2}^{\nu_2}, e_{n_3}^{\nu_3}, \dots, e_{n_k}^{\nu_k}, \dots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots)$$

est *chaîne régulière*, si e^{ν_k} est diviseur régulier de $e_{n_{k+1}}^{\nu_{k+1}}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

La partie commune à tous les ensembles $e_{n_k}^{\nu_k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) d'une chaîne régulière sera nommée *noyau de cette chaîne régulière*.

Cela posé, le Tableau canonique (e) possède les propriétés suivantes :

- 1° Le noyau de toute chaîne régulière est contenu dans E;
- 2° Tout point de E (à une infinité dénombrable près) est contenu dans un au moins des noyaux;

3° L'ensemble e_n^y étant donné, il existe, dans la $(n - 1)^{\text{ième}}$ ligne, un ensemble $e_{n-1}^{y'}$ et un seul qui est un diviseur régulier de e_n^y ;

4° Tout ensemble e_n^y est un diviseur régulier d'un au moins des ensembles $e_m^{y'} (m > n)$;

5° Soit e_n^y un diviseur régulier de $e_m^{y_i} (m > n)$; quel que soit un ensemble M non dénombrable de points de E ($e_n^y - e_m^{y'}$), il existe toujours un ensemble $e_m^{y'} (y' \neq y)$ contenant une infinité non dénombrable de points de M et qui admet l'ensemble e_n^y pour son diviseur régulier.

4. Passons maintenant à la démonstration du théorème fondamental :

THÉORÈME. — *Tout ensemble de points non dénombrable mesurable B contient un ensemble parfait.*

Tout d'abord le théorème est évident s'il existe au moins une chaîne régulière, dont le noyau (toujours fermé) est non dénombrable. Passons donc au cas où le noyau de toute chaîne régulière est dénombrable.

Dans ce cas, quels que soient un ensemble e_n^y et un ensemble parfait π contenu dans e_n^y et contenant une infinité non dénombrable de points de E, il existe (en vertu de 5°), dans π , deux ensembles parfaits π_1 et π_2 sans point commun et contenant une infinité non dénombrable de points de E, tels que π_1 appartient à $e_m^{y'} (m > n)$, π_2 à $e_m^{y''} (y'' \neq y')$, $\pi_1 e_m^{y'} = 0$, $\pi_2 e_m^{y''} = 0$, où e_n^y et $e_m^{y''}$ sont deux ensembles dont e_n^y est un diviseur régulier. Nous dirons que π_1 et π_2 sont *ensembles déduits de π* .

Cela posé, prenons dans e_1^1 un ensemble parfait π contenant une infinité non dénombrable de points de E. D'après ce qui précède, nous pouvons déduire de π deux ensembles π_1 et π_2 ; de l'ensemble π_{α_1} ($\alpha_1 = 1$ ou 2) deux ensembles $\pi_{\alpha_1 \alpha_2}$ et $\pi_{\alpha_1 \alpha_2}$; $\pi_{\alpha_1 \alpha_2}$ ($\alpha_2 = 1$ ou 2) deux ensembles $\pi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ et $\pi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ et ainsi de suite. Le procédé se poursuit indéfiniment, de sorte qu'on obtient une suite infinie d'ensembles parfaits :

$$(1) \quad \pi_{\alpha_1}, \pi_{\alpha_1 \alpha_2}, \pi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \dots, \pi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k}, \dots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, \dots$ est une suite infinie arbitraire d'entiers dont chacun est égal à 1 ou 2. La partie commune X à tous les ensembles π de la suite (1) appartient, d'après 1°, à l'ensemble donné E; l'ensemble de tous les X est évidemment un ensemble parfait contenu dans E, ce qui démontre la proposition.

Alexandrov, Punktmengen und reelle Funktionen.

Göttingen, Sommersemester 1928.

Wir werden meistens auf der Graden der reellen Zahlen arbeiten; demnach ~~Satz~~ für uns eine feste Einheit ist 'dennoch' welche Eigenschaften der reellen Graden für uns mangelhaft sind.

Wir betrachten einen metrischen Raum, d. h. eine ~~Menge~~ Menge R mit $f(x, y)$, wo eine Ordnung $f(x, y)$ für jedes $x \in R, y \in R$ definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

1) $f(x, y)$ ist eine nicht negative Zahl, die dann und nur dann verschwindet, wenn $y = x$

2.) $f(x, y) = f(y, x)$ 3.) $f(x, x) \leq f(x, y) + f(y, z)$ 4)

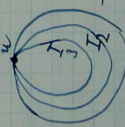
Ein solcher Raum heißt vollständig, wenn man zu ihm keinen Punkt $\xi \notin R$ hinzufügen kann, so dass die Menge $R + \xi$ zu einem metrischen Raum gemacht werden kann, wo ξ nicht höher und die Metrik von R in der neuen Abbildung von $R + \xi$ erhalten wäre.

9) Dadurch ist Häufungspunkt, Rand, abgeschlossene, offene Mengen und Umgebungen in R auf die übliche Weise definiert.

M ist also offen in \bar{M} , also $\bar{M} - M = \Phi$, wo Φ abgeschlossen in \bar{M} , also ist Φ abgeschlossen auf der reellen Geraden. * Also

$$M = \bar{M} - \Phi, \text{ w. z. b. w.}$$

Wir betrachten nun die kompakten Intervalle zu Φ , I_1, I_2, \dots ; diese verbergen wir in Kreise und heften sie in dem (zusammenfallenden) Endpunkten aneinander:



So bekommen wir ein homöomorphes Abb. $M' \rightarrow M$.

M' ist freilich auch nulldimensional; auch $M' + U$ (Man verlege $M' + U$ so:

aus jedem Kreis I_n nehme man einen Bogen um u der Länge $\frac{1}{2}$, dessen Endpunkte in komplementärem Fortsetzungsbogen dem I_n enthaltenen Teil von M' gehören;

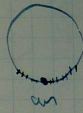
* und freilich nirgends dicht.
** Dort liegt M

den Bildes $u + \delta$ die auf diesen Bogen enthaltenen Punkte von M' sind in $M' + U$ offene Menge vom Durchmesser $< \varepsilon$; Alle Rest von $M' + U$ kann man offenbar in δ gut abzählen viele getrennt in δ eine offene Menge vom Durchmesser $< \varepsilon$ teilen)

$M' + U$ ist wieder abgeschlossen und kompakt, also kompakt, also homöomorph zu einer abgeschlossener, beschränkter, nirgends dichten Menge auf der Zahlengeraden. (M'')

M' ist also homöomorph zu M'' , aus dem ein Punkt entfernt ist.

Wir bitten bilden M'' homöomorph auf einen Kreis ab, schneiden diesen Kreis in Punkte ξ , aufhalten ihn in eine Strecke und diese ~~Strecke~~ wir ins Unendliche (so dass irrationale Punkte in \mathbb{Q} liegen)



Dadurch wird $M'' - \xi$ zu einer abgeschlossenen, nirgends dichten Menge von Irrationalzahlen.

nicht annehmen: denn jede Folge von diesen Mengen M_1, M_2, \dots gehört ganz zu einer Klasse α ; ihre Vereinigung oder Durchschnitt also sicher zur Klasse $\alpha+1$.

Eine ganz besonders wichtige Rolle spielen die Klassen \mathcal{F} und \mathcal{G} . Lemmata besteht der Satz:

{ Es sei $f(x)$ stetig eine stetige Funktion, die in einer Menge M definiert ist. Die Menge der Stetigkeitspunkte ist in M ein \mathcal{G} .

Beweis: Es sei $w_x f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|x-x_0| < \delta} f - \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|x-x_0| < \delta} f$.

Die Unstetigkeitspunkte sind die Punkte von M , in welchen $w_x f > 0$.

Es sei $F_n = \{x; w_x f \geq \frac{1}{n}\}$; F_n ist abgeschlossen in M ; $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ist genau die Menge aller Unstetigkeitspunkte, sie ist ein \mathcal{F} (in bez. auf M).

untermenge in bez. auf M ist also ein \mathcal{G} in bezug auf M , v. z. d. w.

Die ganze Mathematik beruht sich in Hauptsätze auf die Mengen \mathcal{F} und \mathcal{G} ; dem ^{später} metrische Punktmenge ~~ist~~ M gibt es ein \mathcal{F} und ein \mathcal{G} so, dass

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = M \quad (45)$$

Mass von \mathcal{F} = Mass von M = Mass von \mathcal{G} . Das ist der Grund, warum sich jede messbare Funktion f auf eine Menge von Mass ε ($\varepsilon > 0$ beliebig) wie eine stetige Funktion, und bis auf eine Menge vom Mass 0 wie eine Funktion 1. Klasse verhält.

{ Es sei $f(x)$ auf einer Menge (des Eukl. Raumes) erklärt und stetig; dann läßt sich $f(x)$ zu einer auf einem $\mathcal{G} \supset M$ stetigen Funktion ergänzen.

Beweis: M sei die abgeleitete Stelle von M . Es sei $x \in \overline{M-M}$. Es sind zwei Fälle möglich: 1. \mathcal{F} für jede Folge $x_n \rightarrow x$, $x_n \in M$ ist $f(x_n), f(x_n), \dots$ konvergent. 2.) Es ist dies nicht der Fall.

$f(x)$ ist stetig auf D^* ; wäre nun
 $f(y) = f(z) = t$ für $y \neq z$, $y \in D^*$, $z \in D^*$,
 so gäbe (da D^* in M enthalten ist)
 es zwei Folgen $(y_n) \rightarrow y$, $(z_n) \rightarrow z$
 mit $f(y_n) \rightarrow t$, $f(z_n) \rightarrow t$; ~~es~~
 liegt aber $t \in M$ es sei $f(y_n) = t_n$,
 $f(z_n) = u_n$; t_n, u_n liegen in M ; es ist
 $t_n \rightarrow t$, $u_n \rightarrow t$; $f^{-1}(t_n) = y_n \rightarrow y$
 $f^{-1}(u_n) = z_n \rightarrow z$.
 t liegt aber in Δ ; in Δ soll
 aber f^{-1} stetig ~~erwartet~~ sein; also
 müsste $f^{-1}(t_n) \rightarrow f^{-1}(t)$, $f^{-1}(u_n) \rightarrow f^{-1}(t)$
 was wegen $y \neq z$ nicht der Fall ist.
 Also ist f eine eindeutige
 und (eindeutig) stetige Abbildung
 von D^* auf ~~M~~ $\Delta \cap D^*$.
 Auf dieser Teilmenge von $\Delta \cap D^*$ ist
 die Umkehrung dieser stetigen (eindeutigen)
 Abbildung definiert aus $f(y_n) \rightarrow f(y)$
 $(f^{-1}(t_n), f^{-1}(u_n)) \rightarrow f^{-1}(t)$ in dieser Teilmenge

~~folgt $f_n \rightarrow f$, dann ~~stetig~~~~
 Die (auf M definierte) Funktion f^{-1}
 wurde zu einer auf $\Delta \cap D^*$ stetigen Funktion
 erweitert. Wenn nun $t \in \Delta \cap D^*$, $t_n \in \Delta \cap M$
 $t_n \rightarrow t$, so gibt es genau ein
 $x \in D^*$, $x_n \in M$ mit $f(x) = t$, $f(x_n) = t_n$
 Es ist $x_n = f^{-1}(t_n)$. Wäre nicht
 $x = \lim x_n$, so müsste $t \in \Delta \cap D^*$, $-M$
 sein (dann auf M , M hätte wir Hausdorff-
 morphie). Man könnte dann eine
 Folge $y_n \in M$, $y_n \rightarrow x$ finden, es
 wäre dann $f(y_n) = t_n \rightarrow f(x) = t$.
 Also hätten wir eine Folge
 $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$ aus M , die
 gegen einen Punkt konvergiert,
~~aus $\Delta \cap D^*$~~
 für welche aber
 $f^{-1}(t_1), f^{-1}(t_2), f^{-1}(t_3), f^{-1}(t_4), \dots$
 $\equiv x_1, y_2, x_2, y_3, \dots$ nicht
 konvergieren würde, was ~~gegen die~~
 Voraussetzung widerspricht, dass

$$\rho(x, y) = \frac{\rho_F(x, y) (\rho(x, F) + \rho(y, F))}{1 - \rho_F(x, y)}$$

Für $\rho_F(x, y) < \frac{1}{4}$ ist also wegen

$$\rho(x, F) \leq \rho_F(x, y) + \rho(x, F)$$

$$\rho(x, y) \leq 2 \rho_F(x, y) (\rho(x, y) + 2 \rho(x, F))$$

$$\rho(x, y) \leq \frac{4 \rho(x, F) \rho_F(x, y)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\leq 8 \rho(x, F) \rho_F(x, y) \rightarrow 0.$$

Also ist dies wirklich eine erlaubte Änderung der Metrik von G .

Nun sei M ein G_0 im vollständigen

Raum R ; G_n offen im R , $M = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$

$F_n = R - G_n$; es ist $\rho_F(x, y) < 1$ bei

$x \in M, y \in M$. Man bilde

$$\rho^*(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_{F_n}(x, y);$$

das ist eine Endformungsfunktion für M . Es ist

$$\rho_{F_n}(x, y) \leq \frac{\rho(x, y)}{\rho(x, y) + \rho(x, F_n)};$$

$$\rho^*(x, y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho(x, y)}{\rho(x, y) + \rho(x, F_n)};$$

Es sei x fest in M gegeben
(Es sei $\epsilon > 0$; wir wählen $N = N(\epsilon)$)

$$\text{so, dass } \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2};$$

es sei $a = \min_{n=1, \dots, N} \rho(x, F_n)$; es ist $a = a(\epsilon) > 0$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \frac{\rho(x, y)}{\rho(x, y) + \rho(x, F_n)} \leq \frac{\rho(x, y)}{\rho(x, y) + a}$$

Für $\rho(x, y) < \eta = \eta(\epsilon)$ ist der letzte Ausdruck $< \epsilon$.

Also: für $y \in M$, $\rho(x, y) < \eta(\epsilon, x)$ ist $\rho^*(x, y) < \epsilon$.

Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen.

Betrachten wir Funktionen (reelle Funktio-
nen), die auf $\langle 0, 1 \rangle$ definiert sind.

Ein Funktionssystem von Funktio-
nen heißt ein Bairesches System,

wenn 1) mit $f_1(x), f_2(x)$ auch

$$f_1(x) \pm f_2(x), f_1(x) \cdot f_2(x), \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

gehören, solange die Operationen aus-
führbar sind; Schnittpunkte)

2.) $\&$ mit $f_1(x), f_2(x), \dots$

auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ zum System gehört,

wenn die Folge konvergiert (für $0 \leq x \leq 1$).

Der Durchschnitt von beliebig vielen

Baireschen Systemen ist wieder ein

Bairesches System. Weiter ist die Gesamt-
heit aller $\&$ auf $\langle 0, 1 \rangle$ definierbaren Funkt.

nen auch ein Bairesches System.

Also gibt es zu jedem Funktionensystem
 Σ ein kleinstes Bairesches System, das
 Σ enthält (nämlich der Durchschnitt aller
B. Systeme, die Σ enthalten).

Ein System von Punktfolgen* heißt
ein Borelsches System, wenn es ~~zu~~
mit einer Folge M_1, M_2, \dots von Punkt-
mengen auch ihren Durchschnitt und
ihre Vereinigungsmenge enthält.

Der Durchschnitt von beliebig vielen Borel-
schen Systemen ist wieder ein Borelsches
System; alle Punktfolgen bilden auch
ein Borelsches System. Also gibt es zu
jedem System Σ von Mengen ein kleinstes
Borelsches System, das Σ enthält
(nämlich der Durchschnitt aller B. Systeme,
die Σ enthalten).

* auf der Zylindergeraden, aber auf $\langle 0, 1 \rangle$.

Die Suskinsche - oder A-Mengen
 über ein Mengensystem M
 sind folgendermaßen definiert:

Man nehme aus M irgend ein
 strahlbares Mengensystem und
 nummeriere es so:

$$* \left\{ \begin{array}{l} M_1, M_2, \dots; M_{11}, M_{12}, M_{21}, \dots; \\ M_{111}, M_{112}, M_{121}, \dots; M_{1111}, \dots \end{array} \right.$$

(i_1, i_2, \dots, i_k voneinander unabh.
 natürliche Zahlen). Aus diesem
 abzählbaren System nehme man
 eine Reihe - sog. Kette heraus:

$$M_{i_1}; M_{i_1, i_2}; M_{i_1, i_2, i_3}; \dots$$

(i_k fest in der ganzen Folge;

ebenso i_2 von dem 2. Glied an usw.)

Der Durchschritt aller Mengen
 dieser Kette heißt Kern der Kette.

Und die Vereinigungsmenge der
 Kerne aller Ketten, die aus dem

System (*) gebildet werden können,
 heißt eine Suskische Menge über M .

Es gibt ein System von Folgen
 natürlicher Zahlen, so dass durch

$$I^{(M)}$$

wo M alle Mengenfolgen aus M
 durchläuft, genau alle A-Mengen
 über M dargestellt werden.

Beweis: wir nehmen eine ~~Folge~~
 System * aus M und werden es so
 nummerieren:

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_k} = M$$

wo $M(i_1, i_2, \dots, i_k) = 2^{i_1-1} + 2^{i_2-1} + \dots + 2^{i_k-1}$.

(Also im dyadischen System:

$$M(i_1, i_2, \dots, i_k) = \underbrace{100\dots 0}_{i_1-1 \text{ Nullen}} \underbrace{1}_{i_2-1} \dots \underbrace{100\dots 0}_{i_k-1}$$

Allgemein

$$M_{h_1} \dots h_k = M_{h_1}^{i_1} M_{h_2}^{i_2} \dots M_{h_k}^{i_k}$$

$$\cdot M_{h_1}^{i_1 i_2} M_{h_2}^{i_2 i_3} \dots M_{h_k}^{i_k i_1}$$

$$\cdot M_{h_1}^{i_1 i_2 i_3} \dots M_{h_k}^{i_k i_1 i_2}$$

Es ~~ist~~ $X \subset A(A^{i_1 i_2} \dots)$ ist gleichbedeutend mit:

Es ~~ist~~ gibt eine Folge i_1, i_2, \dots und eine Folge von Folgen $h_1^l, h_2^l, \dots, h_k^l$, $l=1, 2, \dots$, so dass

$$X \subset M_{h_1}^{i_1} M_{h_2}^{i_2} \dots M_{h_k}^{i_k} M_{h_1}^{l_1} M_{h_2}^{l_2} \dots M_{h_k}^{l_k}$$

für alle k . Das ist aber nach dem Bildungsgesetz der $M_{h_1} \dots h_k$ gleichbedeutend damit, dass

$$X \subset M_{h_1} h_2 \dots h_k$$

für alle k und eine geeignete Folge h_1, h_2, \dots n. v. b. w.

Nun wir also die A-Mengen über das System der offenen und abgeschlossenen Mengen in Bezug auf die Menge J der Irrationalen betrachten, dürfen wir unterscheiden, ob entweder von abgeschlossenen oder offenen Mengen ausgehen, denn jedes F ist ein G , jedes G ein F . Also zeigen können wir sogar als das Grundsystem M die Menge der rationalen Umgebungen $[i_1, i_2, \dots, i_k]$ nehmen, da sich jede offene Menge in J aus abzählbar vielen solchen Umgebungen aufbauen lässt.

$[i_1, i_2, \dots, i_k]$ ist die Menge aller Irrationalen, deren Kettenbruchentwicklung mit $i_1 + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \dots + \frac{1}{i_k}$ beginnt.

Satz: Jede nicht abzählbare A -Menge enthält eine perfekte Teilmenge (hat also die Mächtigkeit des Kontinuums).

Beweis: Ein $A = \{F_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$; die F_{i_1, \dots, i_k} sind paarweise un- k -ten Ranges,

$F_{i_1, \dots, i_k} \supset F_{i_1, \dots, i_{k-1}}$. Wir streichen alle Mengen F_{i_1, \dots, i_k} weg, für welche

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_k} = S(F_{i_1, \dots, i_k}, h_{i_1, \dots, i_k})$$

(bei verändert. h_{i_1, \dots, i_k})

abzählbar ist.

Dann enthält also jedes übrigbleibende

F_{i_1, \dots, i_k} un abzählbar viele Punkte von A . In F_{i_1, \dots, i_k} gibt es dann ein k^{tes} , so dass es unter den übrigbleibenden

F_{i_1, \dots, i_k} mindestens zwei

geometrisch verschiedene gibt: denn

sonst würde es (nur) eine übrigbleibende Kette durch F_{i_1, \dots, i_k} geben, und

die hat nur einen Punkt als Durchschnitt.

und nicht abzählbar viele.

Wir nehmen also ein übriggebliebenes

$F_1 = \Phi$; finden ein k_1 , zu welchem

es zwei A -verschiedene Nachfolger

Φ_0, Φ_1 gibt; dann gibt es

zu Φ_0 wieder zwei verschiedene Nach-

folger Φ_{00}, Φ_{01} und ebenso Φ_{10}, Φ_{11} zu Φ_1 ,

u. s. w.

$$\Psi_k = \sum_{h_1, \dots, h_k=0}^1 \Phi_{h_1, \dots, h_k}$$

sind abgeschlossene Mengen, ebenso

$$\Psi = \Psi_1 \Psi_2 \dots$$

Ψ ist in A enthalten. Und Ψ ist

un abzählbar, denn jede Folge

$$\Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \dots$$

definiert einen

denkbar einen Punkt von Ψ .

u. z. b. w.