Konstrukce zlatého řezu

In: Vlasta Chmelíková (author): Zlatý řez nejen v matematice. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2009. pp. 23–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400793

2 Konstrukce zlatého řezu

Způsobů, jak konstrukčně rozdělit úsečku zlatým řezem, je více. Některé konstrukce pocházejí ze starověku, některé vznikly teprve nedávno. Zde je přehled různých konstrukcí, s kterými jsem se při zkoumání zlatého řezu setkala. Konstrukce jsou doplněny symbolickým zápisem jednotlivých kroků, aby bylo zřejmé, v jakém pořadí byly provedeny. V zápisech je u každého kroku uveden nejprve objekt, který se v tuto chvíli konstruuje, poté za středníkem následují vlastnosti tohoto objektu, podle kterých poznáme, jak jej sestrojit. Některé postupy nepopisují rozdělení dané úsečky ve zlatém řezu, ale nalezení chybějící části původní úsečky, je-li dána větší (menší) část z jejího rozdělení zlatým řezem. Pořadí konstrukcí je naprosto náhodné. U všech konstrukcí je uveden početní důkaz, kterým je ověřeno, že řešení skutečně odpovídá zadání, tedy že poměry délek příslušných úseček se skutečně rovnají zlatému číslu. Autorem konstrukce 1 byl pravděpodobně Hérón z Alexandrie[1] (viz 5.2). Konstrukce 4 je inspirována konstrukcí z Eukleidových Základů v tvrzení XI. v knize druhé (viz 5.1). Konstrukce 5, 6 a 7 vznikly jako úpravy konstrukcí, které jsou uvedeny v práci [6] na stranách 27–33. Konstrukce 8 je úpravou konstrukce uvedené v knize [4] na stranách 22–23, konstrukce 9 je úpravou konstrukce z knihy [38], strany 24–25. Konečně konstrukce 10 je uvedena spíše jako zajímavost. Není totiž konstrukcí v pravém slova smyslu, ale návodem, jak získat zlatý řez úsečky skládáním papíru.

Konstrukce 1

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

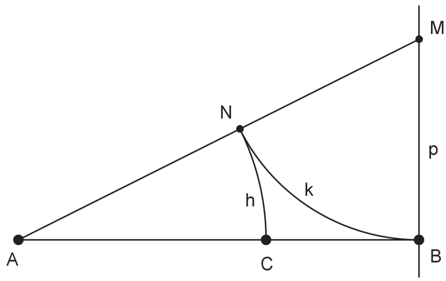
Postup konstrukce (obr. 2.1):

1. $\leftrightarrow p; p \perp AB, B \in p$,
2. $M; M \in p, |MB| = \frac{1}{2}|AB|$,
3. $k; k(M, |MB|)$,
4. $N; N \in (k \cap AM)$,

[1] Řecká jména jsou psána (vyjma citací, kde je zachován tvar podle originálu) podle *Slovníku antické kultury*, Svoboda, Praha 1947.

5. $h; h(A, |AN|)$,

6. $C; C \in (h \cap AB)$.



Obrázek 2.1: Konstrukce 1

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$\begin{aligned}
|BM| &= \frac{a}{2}, \\
|MN| &= |BM| = \frac{a}{2}, \\
|AM| &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \\
|AC| &= |AN| = |AM| - |MN| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).
\end{aligned}$$

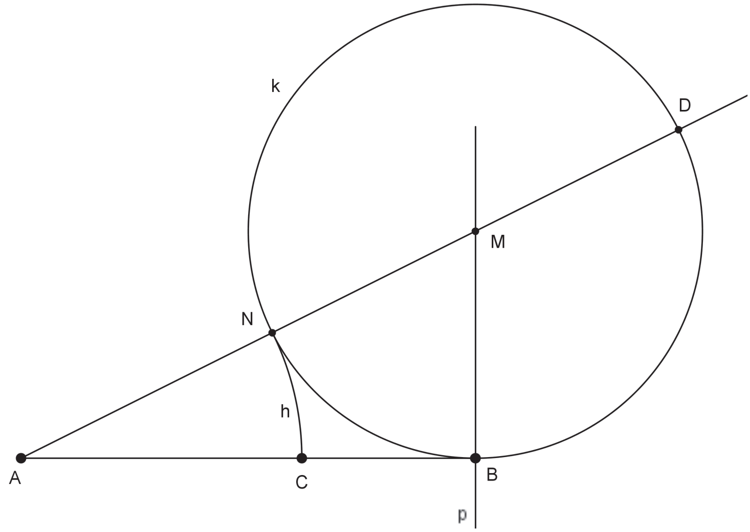
Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

⊠

Konstrukci 1 lze snadno dokázat také pomocí mocnosti bodu ke kružnici. Pro potřeby tohoto důkazu označíme druhý průsečík kružnice k s přímkou AM písmenem D (obr. 2.2). Potom platí:

$$\begin{aligned}
|AN| \cdot |AD| &= |AB|^2, \\
|AC| \cdot |AD| &= |AB|^2, \\
\frac{|AD|}{|AB|} &= \frac{|AB|}{|AC|},
\end{aligned}$$



Obrázek 2.2: Konstrukce 1 – důkaz pomocí mocnosti bodu ke kružnici

$$
\begin{aligned}
\frac{|AN| + |ND|}{|AB|} &= \frac{|AC| + |CB|}{|AC|}, \\
\frac{|AC| + |AB|}{|AB|} &= \frac{|AC| + |CB|}{|AC|}, \\
\frac{|AC|}{|AB|} + 1 &= 1 + \frac{|CB|}{|AC|}, \\
\frac{|AC|}{|AB|} &= \frac{|CB|}{|AC|}, \\
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{|AC|}{|CB|},
\end{aligned}
$$

což jsme chtěli dokázat.

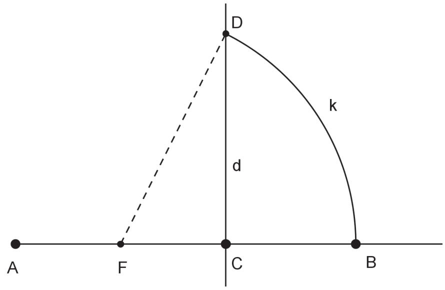
$\boxtimes$

Konstrukce 2

Je dána úsečka AC libovolné délky. Úkolem je nalézt na polopřímce AC bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém řezu a současně $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.3):

1. $F; F \in \frac{1}{2}|AC|$,
2. $d; d \perp AC, C \in d$,
3. $D; |CD| = |AC|, D \in d$,
4. $k; k(F, |FD|)$,
5. $B; B \in (\mapsto AC \cap k)$.



Obrázek 2.3: Konstrukce 2

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AC. Nechť $|AC| = b$. Potom:

$$\begin{aligned}
|AF| &= |CF| = \frac{b}{2}, \\
|CD| &= b, \\
|DF| &= |BF| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2}\sqrt{5}, \\
|AB| &= |AF| + |BF| = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5} = \frac{b}{2}(1+\sqrt{5}), \\
|BC| &= |BF| - |CF| = \frac{b}{2}\sqrt{5} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(\sqrt{5}-1).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{b}{2}(1+\sqrt{5})}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{b}{\frac{b}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

⊠

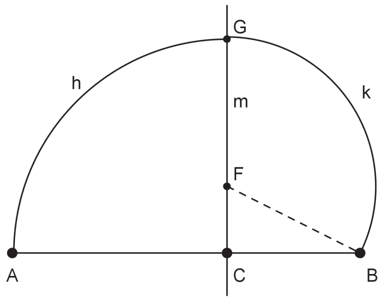
Konstrukce 3

Je dána úsečka BC libovolné délky. Úkolem je nalézt na polopřímce BC bod A tak, aby bod C dělil úsečku AB zlatým řezem a současně $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.4):

1. $\leftrightarrow m; m \perp BC, C \in m$,
2. $F; F \in m, |FC| = \frac{1}{2}|BC|$,
3. $k; k(F, |FB|)$,

4. $G; G \in (\mapsto CF \cap k)$,
5. $h; h(C, |CG|)$,
6. $A; A \in (\mapsto BC \cap h)$.



Obrázek 2.4: Konstrukce 3

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky BC. Nechť $|BC| = c$. Potom:

$$\begin{aligned}
|CF| &= \frac{c}{2},\\
|BF| &= |FG| = \sqrt{c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c}{2}\sqrt{5},\\
|AC| &= |CG| = |CF| + |FG| = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\sqrt{5} = \frac{c}{2}(1+\sqrt{5}),\\
|AB| &= |AC| + |BC| = \frac{c}{2}(1+\sqrt{5}) + c = \frac{c}{2}(3+\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{c}{2}(3+\sqrt{5})}{\frac{c}{2}(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,\\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{c}{2}(1+\sqrt{5})}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

⊠

Konstrukce 4

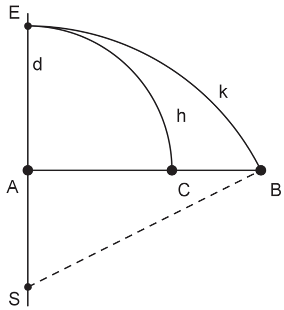
Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.5):

1. $d; d \perp AB, A \in d$,
2. $S; S \in d, |AS| = \frac{1}{2}|AB|$,
3. $k; k(S, |SB|)$,
4. $E; E \in (\mapsto SA \cap k)$,

5. $h; h(A, |AE|)$,

6. $C; C \in (AB \cap h)$.



Obrázek 2.5: Konstrukce 4

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB.

Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$\begin{aligned}
|AS| &= \frac{a}{2}, \\
|SB| &= |ES| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \\
|AE| &= |AC| = |ES| - |AS| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

⊠

Konstrukce 5

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.6):

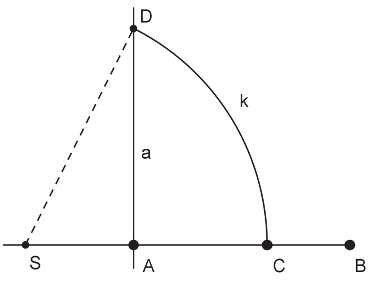
1. $\leftrightarrow a; a \perp AB, A \in a$,

2. $D; D \in a, |AD| = |AB|$,

3. $S; S \in \leftrightarrow AB, |AS| = \frac{1}{2}|AB|$,

4. $k; k(S, |SD|)$,

5. $C; C \in (k \cap AB)$.



Obrázek 2.6: Konstrukce 5

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$\begin{aligned}
|AD| &= a,\\
|AS| &= \frac{a}{2},\\
|DS| &= |CS| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5},\\
|AC| &= |CS| - |AS| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1),\\
|BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,\\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

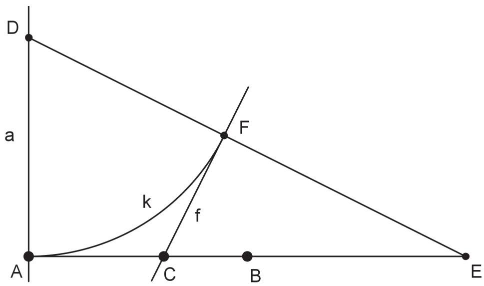
$\boxtimes$

Konstrukce 6

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.7):

1. $\leftrightarrow a; a \perp AB, A \in a$,
2. $D; D \in a, |AD| = |AB|)$,
3. $k; k(D, |AB|)$,
4. $E; E \in \mapsto AB, |AE| = 2|AB|$,
5. $F; F \in (k \cap DE)$,
6. $\leftrightarrow f, f \perp DE, F \in f$,
7. $C; C \in (f \cap AB)$.



Obrázek 2.7: Konstrukce 6

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$\begin{aligned} |AD| &= |BE| = a, \\ |AE| &= 2a, \\ |DE| &= \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}, \\ |DF| &= a, \\ |FE| &= |DE| - |DF| = a\sqrt{5} - a = a(\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Trojúhelníky AED a FEC jsou podobné podle věty uu,[2] proto platí:

$$\frac{|FE|}{|CE|} = \frac{|AE|}{|DE|}$$

a z tohoto vztahu vypočítáme délku úsečky CE:

$$|CE| = \frac{|FE| \cdot |DE|}{|AE|} = \frac{a(\sqrt{5}-1) \cdot a\sqrt{5}}{2a} = \frac{a\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Vyjádříme délky dalších úseček:

$$\begin{aligned} |AC| &= |AE| - |CE| = 2a - \frac{a\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \\ |BC| &= |CE| - |BE| = \frac{a\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2} - a = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \\ \frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi. \end{aligned}$$

⊠

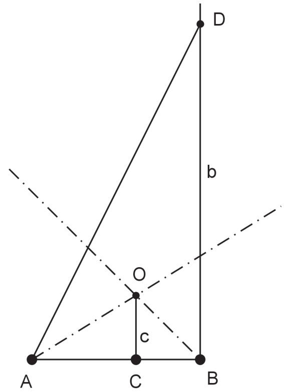
Konstrukce 7

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

[2] Dva trojúhelníky jsou podobné podle věty uu, shodují-li se ve dvou úhlech.

Postup konstrukce (obr. 2.8):

1. $\leftrightarrow b; b \perp AB, B \in b$,
2. $D; D \in b, |BD| = 2|AB|$,
3. $\triangle ABD$,
4. $O; O$ je střed kružnice vepsané $\triangle ABD$[3],
5. $\leftrightarrow c; c \perp AB, O \in c$,
6. $C; C \in (c \cap AB)$.



Obrázek 2.8: Konstrukce 7

Důkaz:

Než začneme počítat, je třeba si uvědomit, že délka úsečky BC je totožná s poloměrem ϱ kružnice vepsané trojúhelníku ABD. Tento poloměr vypočítáme pomocí běžně užívaných vzorců, které lze najít například ve středoškolských matematických tabulkách. Při výpočtu použijeme tyto vzorce:

$\varrho = \dfrac{S}{s}$, kde S značí obsah trojúhelníku a s poloviční obvod, přičemž $S = \dfrac{ab}{2}$ (v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b) a $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ (v libovolném trojúhelníku se stranami a, b, c).

Opět si nejprve vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$\begin{aligned}
|BD| &= 2a,\\
|AD| &= \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5},\\
S &= \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2, \quad s = \frac{a + 2a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}),\\
\varrho &= |BC| = \frac{S}{s} = \frac{a^2}{\frac{a}{2}(3+\sqrt{5})} = \frac{2a}{3+\sqrt{5}} = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}),\\
|AC| &= |AB| - |BC| = a - \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,\\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

⊠

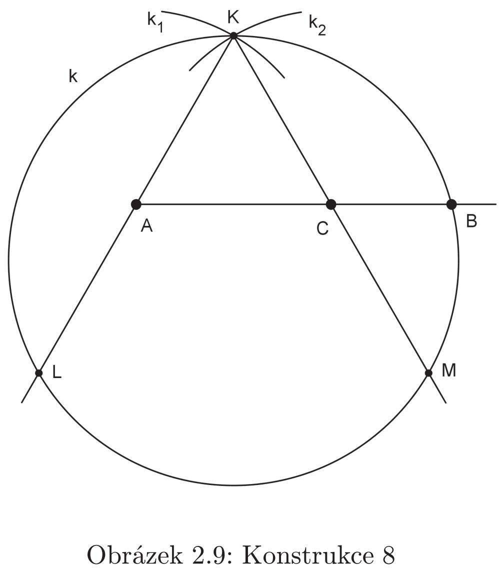
[3]Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku je průsečíkem os vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku.

Konstrukce 8

Je dána úsečka AC libovolné délky. Úkolem je nalézt na polopřímce AC bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém řezu a současně $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.9):

1. $k_1; k_1(A, |AC|)$,
2. $k_2; k_2(C, |AC|)$,
3. $K; K \in (k_1 \cap k_2)$,
4. $L; L \in \mapsto KA, |KL| = 2|KA|$,
5. $M; M \in \mapsto KC, |KM| = 2|KC|$,
6. $k; K \in k, L \in k, M \in k$[4],
7. $B; B \in (\mapsto AC \cap k)$.



Obrázek 2.9: Konstrukce 8

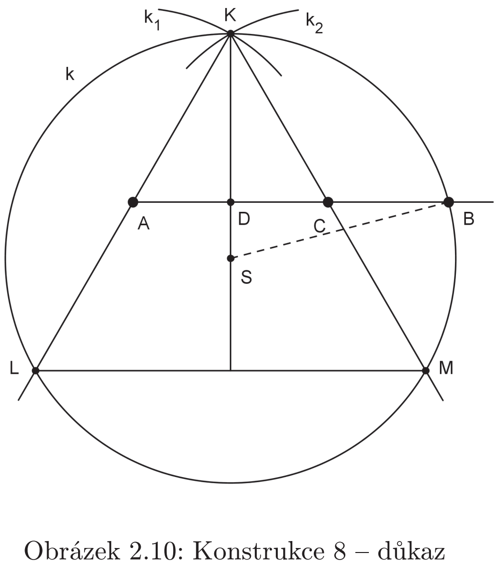
Důkaz:

Pro potřeby důkazu označím písmenem D střed úsečky AC a písmenem S střed kružnice k (což je kružnice opsaná trojúhelníku

[4]Kružnice k je kružnicí opsanou trojúhelníku KLM. Středem kružnice opsané danému trojúhelníku je průsečík os stran tohoto trojúhelníku.

KLM, obr. 2.10). V důkazu je opakovaně využit vzorec pro výpočet výšky rovnostranného trojúhelníku[5] (trojúhelníky ACK a KLM jsou rovnostranné) a fakt, že v rovnostranném trojúhelníku výšky splývají s těžnicemi a s osami stran, čili jejich průsečík dělí každou z nich v poměru 2 : 1. Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AC. Nechť $|AC| = b$. Potom:

$$
\begin{aligned}
|AD| &= |CD| = \frac{b}{2}, \\
|AK| &= |CK| = b, \\
|DK| &= \frac{b}{2}\sqrt{3}, \\
|LM| &= |KM| = |KL| = 2b, \\
|SK| &= |BS| = \frac{2}{3} \cdot \frac{2b}{2}\sqrt{3} = \frac{2b}{3}\sqrt{3}, \\
|DS| &= |SK| - |DK| = \frac{2b}{3}\sqrt{3} - \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{6}\sqrt{3},
\end{aligned}
$$



Obrázek 2.10: Konstrukce 8 – důkaz

[5]Výšku v rovnostranného trojúhelníku, jehož strany mají délku a, vypočteme podle vzorce $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

$$
\begin{aligned}
|BD| &= \sqrt{|BS|^2 - |DS|^2} = \sqrt{\left(\frac{2b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{b}{6}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{b}{2}\sqrt{5}, \\
|BC| &= |BD| - |CD| = \frac{b}{2}\sqrt{5} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|AB| &= |BD| + |AD| = \frac{b}{2}\sqrt{5} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$
\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{b}{2}(1+\sqrt{5})}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{b}{\frac{b}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}
$$

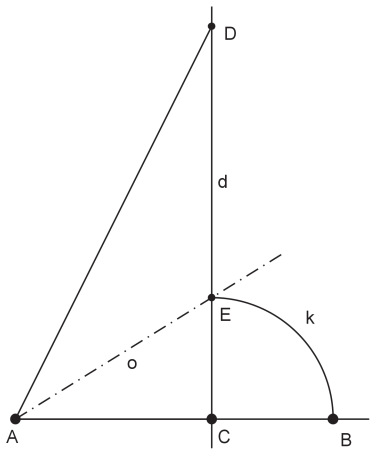
$\boxtimes$

Konstrukce 9

Je dána úsečka AC libovolné délky. Úkolem je nalézt na polopřímce AC bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém řezu a současně $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.11):

1. $d; d \perp AC, C \in d$,
2. $D; |DC| = 2|AC|, D \in d$,
3. $\triangle ACD$,
4. $\leftrightarrow o$; osa vnitřního úhlu u vrcholu A (v $\triangle ACD$),
5. $E; E \in (o \cap CD)$,
6. $k; k(C, |CE|)$,
7. $B; B \in (\hookrightarrow CA \cap k)$.



Obrázek 2.11: Konstrukce 9

Důkaz:

V důkazu využijeme goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku a vzorec $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, který v našem případě bude platit i bez absolutní hodnoty ($\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ použijeme pro podíl délek úseček, bude tedy kladný).

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AC. Nechť $|AC| = b$. Potom:

$$
\begin{aligned}
|CD| &= 2b,\\
|AD| &= \sqrt{b^2 + (2b)^2} = b\sqrt{5},\\
|\sphericalangle DAC| &= \alpha,\\
\cos\alpha &= \frac{b}{b\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},\\
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\\
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{|CE|}{|AC|} \Rightarrow |CE| = |BC| = |AC|\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b}{2}(\sqrt{5}-1),\\
|AB| &= |AC| + |BC| = b + \frac{b}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{b}{2}(1+\sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$
\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{b}{2}(1+\sqrt{5})}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,\\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{b}{\frac{b}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}
$$

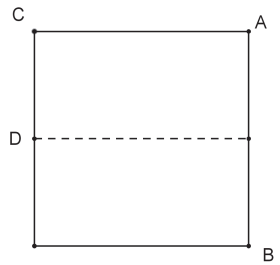
⊠

Konstrukce 10

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup pomocí přehýbání papíru:

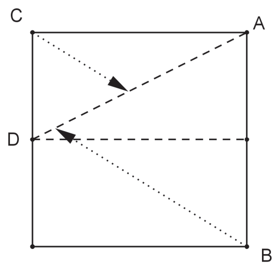
Z papíru vystřihneme čtverec, jehož délka je rovna délce úsečky AB. Tento čtverec přeložíme v polovině (vznikne obdélník) a opět rozevřeme. Střed strany protější ke straně AB označíme písmenem D, druhý krajní bod úhlopříčky čtverce vedené z bodu B označíme písmenem C (obr. 2.12).



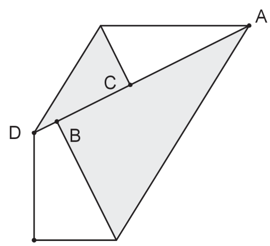
Obrázek 2.12: Konstrukce 10 a)

Papír přeložíme podél pomyslné úsečky AD a opět rozložíme. Dále přiložíme bod C na přehyb AD tak, aby úsečka CD byla částí úsečky AD. Obdobně vrchol B přiložíme na přehyb AD tak, aby úsečka AB byla částí úsečky AD (obr. 2.13).

Nyní bod C dělí úsečku AB ve zlatém řezu tak, jak bylo požadováno v zadání (obr. 2.14).



Obrázek 2.13: Konstrukce 10 b)



Obrázek 2.14: Konstrukce 10 c)

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$
\begin{aligned}
|AC| &= a, \\
|CD| &= \frac{a}{2}, \\
|AD| &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Po přiložení vrcholů B, C na přehyb AD (obr. 2.14):

$$
\begin{aligned}
|AC| &= |AD| - |CD| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|AB| &= a, \\
|BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$
\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}
$$

$\boxtimes$

U této úlohy je třeba si uvědomit, že postup je sice teoreticky přesný, ale v praxi je velmi obtížné této přesnosti dosáhnout. Stoprocentní přesnost těžko zajistíme při rýsování, natož při přehýbání papíru, kde má velký vliv nejen preciznost naší práce, ale navíc i druh, síla, vlhkost papíru a další okolnosti.