Ladislav Svante Rieger (1916–1963)

Teorie grup

In: Eliška Pecinová (author): Ladislav Svante Rieger (1916–1963). (Czech). Praha: Matfyzpress, 2008. pp. 75–98.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400762

Kapitola 2

Teorie grup

2.1 Uspořádané a cyklicky uspořádané grupy

Prvním tématem, kterým se Ladislav Svante Rieger v rámci své vědecké činnosti zabýval, byla teorie uspořádaných a cyklicky uspořádaných grup. Studiu v této oblasti se věnoval v posledních letech druhé světové války, dosažené výsledky shrnul v dizertační práci, kterou předložil k obhajobě na konci roku 1945; publikovány byly v pracích [R1], [R2] a [R3]. O jejich vědecké kvalitě svědčí cena *Královské české společnosti nauk*, jež mu byla udělena roku 1948.

Doplňme, že 29. 4. 1948 referoval L.S. Rieger v *Jednotě* na téma *O cyklicky uspořádaných grupách* a 29. 8. 1949 vystoupil na *společném 3. sjezdu matematiků československých a 7. sjezdu matematiků polských* v Praze s přednáškou *O uspořádaných a cyklicky uspořádaných grupách*.

První dvě části své dizertace L.S. Rieger dokončil v listopadu roku 1944, třetí část o rok později. Pracoval na tomto tématu s pomocí Vladimíra Kořínka za obtížných válečných poměrů.[1]

Jednou z největších komplikací Riegrova výzkumu byl omezený přístup ke světové odborné literatuře. Později se např. ukázalo, že zásadní a klíčový pojem zavedený v článku [R1] – pojem (normální) velikostní podgrupy, viz dále – je jen speciálním případem obecnějšího pojmu (l-ideálu) představeného G. Birkhoffem (1911–1996) v práci [Bir42]. V článku [R1] jsou tak dokázány některé výsledky, které byly publikovány již dříve. S těmito obtížemi se L.S. Rieger potýkal i u řady pozdějších témat a vědeckých prací.

Nyní popíšeme hlavní myšlenky Riegrovy práce z oblasti uspořádaných grup, v následujících oddílech se budeme podrobněji věnovat jednotlivým tématům. Zejména se soustředíme na nejdůležitější dosažené výsledky a jejich zařazení do kontextu vývoje světové matematiky.

Grupa[2] se nazývá *uspořádaná*, pokud je **lineárně** uspořádána a relaci uspo-

[1] V Archivu AV ČR (fond V. Kořínek, karton 46) je dochována jejich korespondence týkající se této problematiky z let 1943 až 1944. Její přehled je uveden v oddílu 1.7.4.

[2] Nebude-li uvedeno jinak, budeme grupu v dalším textu zapisovat multiplikativně. Jednotka (jednotkový prvek) bude značena e.

řádání je možno násobit zleva i zprava. Obdobně grupa, která je uspořádána trojčlennou (ternární) relací cyklického uspořádání (viz dále), se nazývá *cyklicky uspořádaná*, jestliže lze relaci cyklického uspořádání násobit zleva i zprava. Uspořádané grupy jsou v jistém smyslu zvláštním případem grup cyklicky uspořádaných (viz dále).

Ukázalo se, že je-li grupa uspořádanou či cyklicky uspořádanou grupou, je tím již do značné míry určena její algebraická struktura. Hlavním úkolem tří Riegrových prací bylo zkoumat vliv těchto uspořádání (obecných i speciálních) na strukturu grupy. První publikace [R1] je věnována výhradně uspořádaným grupám, druhá [R2] na ni navazuje zavedením grup cyklicky uspořádaných, v práci [R3] jsou oba typy grup studovány s využitím topologických prostředků. Každá část je rozdělena do tří podčástí (§ 1 až § 9).

2.1.1 *O uspořádaných a cyklicky uspořádaných grupách, I* [R1] (1947)

Definice: Nechť je grupa G **lineárně** uspořádána relací $<$.[3] Jestliže

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)(\forall z \in G)(x < y \;\Rightarrow (zx < zy \text{ } et \text{ } xz < yz)),$$

potom G nazýváme *uspořádanou grupou.*

Snadno nahlédneme, že uspořádání na grupě G lze definovat pomocí tzv. pologrupy P *pozitivních* prvků. Nechť je dána podmnožina $P \subseteq G$, pro kterou platí:

1. $(\forall x \in P)(\forall y \in P)(xy \in P)$,
2. $(\forall x \in P)(\forall z \in G)(zxz^{-1} \in P)$,
3. $(\forall x \in P)((x \neq e \text{ } et \text{ } x \notin P) \;\Rightarrow\; x^{-1} \in P)$.

Potom je uspořádání grupy G definováno předpisem

$$x < y \;\Leftrightarrow\; yx^{-1} \in P \;\Leftrightarrow\; x^{-1}y \in P.$$

V případě aditivní grupy reálných čísel je pologrupou P pozitivních prvků pologrupa všech kladných reálných čísel. Uvažujeme-li uspořádání na multiplikativní grupě kladných reálných čísel, pak P je množina reálných čísel větších než jedna.

Téměř veškerá tvrzení týkající se uspořádaných grup L.S. Rieger dokazuje přes pozitivní prvky, pojem pozitivního prvku je základním a přirozeným nástrojem pro práci s uspořádanými grupami. Důkazy bývají často založeny na zkoumání vlastností pologrupy všech pozitivních prvků.

[3] Relace $<$ má tedy tyto vlastnosti:

1. $(\forall x \in G)(non(x < x))$,
2. $(\forall x \in G)(\forall y \in G)((x \neq y \text{ } et \text{ } non(x < y)) \;\Rightarrow\; y < x)$,
3. $(\forall x \in G)(\forall y \in G)(\forall z \in G)((x < y \text{ } et \text{ } y < z) \;\Rightarrow\; x < z)$.

§ 1: *Základní vlastnosti uspořádaných grup*

Nejjednodušším případem uspořádaných grup jsou tzv. archimedovsky uspořádané grupy. Jejich algebraická struktura je předepsána následovně:

Definice: Uspořádaná grupa G se nazývá *archimedovsky uspořádaná*, pokud ke každým dvěma pozitivním prvkům $x, y \in G$ existuje přirozené číslo n, pro které $x^n > y > e$.

Příkladem archimedovsky uspořádané grupy je např. aditivní grupa reálných čísel s přirozeným uspořádáním.

L.S. Rieger podává na počátku své práce důkaz věty, že *každá archimedovsky uspořádaná grupa je komutativní a u-izomorfní*[4] *s vhodnou podgrupou aditivní grupy reálných čísel.*

První část věty (která se týká komutativity) byla dokázána již v roce 1901 O. Hölderem[5] [Höl01], později též R. Baerem[6] [Bae29] a H. Cartanem[7] [Car39]. Žádný z těchto důkazů však L.S. Riegrovi nebyl znám. Druhá část věty je nejjednodušším případem Hahnovy fundamentální věty o uspořádaných komutativních grupách ([Hah07], viz dále).

Pro uspořádané grupy, jež nejsou uspořádány archimedovsky, je situace daleko složitější. Do počátku čtyřicátých let dvacátého století však byl systematicky studován pouze případ komutativních grup, a to právě H. Hahnem. Proto se L.S. Rieger začal zabývat obecnými uspořádanými grupami. V následující části uvidíme, jak zmiňovanou Hahnovu větu zařadil do teorie obecných uspořádaných grup.

Jedním z nejvýznamnějších výsledků Riegrovy práce [R1] je nalezení nutných a postačujících podmínek pro to, aby grupu bylo možné uspořádat. K jeho důkazu L.S. Rieger použil výše zmiňovanou větu o archimedovsky uspořádaných grupách. Výsledek je uveden ve dvou větách. Jelikož jsou jejich tvrzení poměrně komplikovaná a není zapotřebí je zde uvádět v úplném znění, budeme je prezentovat (po potřebných definicích) pouze ve zkrácené podobě.

Definice: Nechť G je uspořádaná grupa. *Absolutní hodnotou* $|x|$ prvku $x \in G$, $x \neq e$, rozumíme pozitivní z prvků x, x^{-1}. Dále klademe $|e| = e$.

Nechť $x, y \in G, x \neq e, y \neq e$. Říkáme, že prvek x má *stejnou velikost* jako prvek y, a píšeme $Vel(x) = Vel(y)$, jestliže existují přirozená čísla m, n, pro která $|x| < |y|^n, |y| < |x|^m$. Říkáme, že x má *větší velikost* než y, a píšeme $Vel(x) > Vel(y)$, jestliže $|x| > |y|^n$ pro každé přirozené n.

---

[4]Říkáme, že dvě uspořádané grupy $(G, <)$ a $(H, <')$ jsou *u-izomorfní*, jestliže existuje grupový izomorfismus $f : G \to H$ takový, že $(\forall x \in G)(\forall y \in G)(x < y \Leftrightarrow f(x) <' f(y))$. L.S. Rieger používá termín *izomorfní a podobné (co do uspořádání)*.

[5]Otto Hölder (1859–1937), německý matematik, věnoval se zejména konvergenci Fourierových řad, v roce 1884 objevil tzv. Hölderovu nerovnost. Zabýval se též teorií grup.

[6]Reinhold Baer (1902–1979), německý matematik, věnoval se především teorii grup a geometrii.

[7]Henri Cartan (1904–?), francouzský matematik, pracoval zejména v algebraické topologii a v teorii Lieových algeber; byl zakládajícím a aktivním členem skupiny Bourbaki, viz poznámka 43.

Relace $Vel(x) = Vel(y)$ je ekvivalence na množině všech prvků grupy G různých od jednotky. Třídy této ekvivalence[8] tvoří (lineárně) uspořádanou množinu $M(G)$, což je tzv. *systém velikostí* grupy G, který je ke každé uspořádané grupě dán jednoznačně.[9]

Věta A: Nechť G je uspořádaná grupa a $M(G)$ její systém velikostí. Potom je v G jednoznačně určen systém podgrup

$$\dots \subseteq \hat{G}_\xi \subset G_\xi \subseteq \dots \subseteq G,\ \xi \in M(G)$$

tak, že:

1. ke každému $\xi \in M(G)$ patří jedna dvojice podgrup $\hat{G}_\xi \subset G_\xi$,
2. pro každá $\xi, \eta \in M(G)$ je
$$\dots \subseteq \hat{G}_\xi \subset G_\xi \subseteq \dots \subseteq \hat{G}_\eta \subset G_\eta \subseteq \dots$$
právě tehdy, když $\xi < \eta$,
3. platí jisté vlastnosti V1, V2, V3.

Věta B: Nechť v grupě G existuje systém podgrup

$$\{e\} \subseteq \dots \subseteq \hat{G}_\xi \subset G_\xi \subseteq \dots \subseteq \hat{G}_\eta \subset G_\eta \subseteq \dots,$$

který splňuje vlastnosti V1, V2, V3 z Věty A. Potom je uspořádání grupy G určeno tak, že systém podgrup $\{\hat{G}_\xi, G_\xi\}$ je právě systém z Věty A a uspořádanou množinu indexů $M = (\dots, \xi, \dots, \eta, \dots)$ lze považovat za systém velikostí tohoto uspořádání.

Podgrupy z Věty A a Věty B jsou definovány takto:

$$G_\xi = \{x \in G : Vel(x) \leq \xi\} \cup \{e\},$$

$$\hat{G}_\xi = \{x \in G : Vel(x) < \xi\} \cup \{e\}.$$

Nazývají se *základní velikostní podgrupy.*

Aby bylo možno tvořit libovolné průniky a součty podgrup G_ξ a $\hat{G}_\xi$, provede se jisté rozšíření systému $\{\hat{G}_\xi, G_\xi\}$ o další potřebné podgrupy. Takto vzniklý systém $S(G)$ se nazývá *úplný systém velikostních podgrup.* Jeho prvky jsou označovány jako *(obecné) velikostní podgrupy*[10].

Stejné problematice se později věnovali E.P. Šimbireva [Šim47][11], K. Iwasawa (1917–1998) [Iwa48], A.I. Mal'cev (1909–1967) [Mal'49] a V.D. Podderjugin [Pod57]. L. Fuchs (nar. 1924) ve své knize *Partially Ordered Algebraic Systems* [Fuch63][12] na str. 51 udává Riegrův výsledek včetně důkazu v pozměněné

[8] Tyto třídy jsou též známy pod názvem *Archimedovy třídy.*

[9] Uvědomme si, že je-li G archimedovsky uspořádanou grupou, pak $M(G)$ obsahuje právě jednu velikost.

[10] Tyto podgrupy jsou plně charakterizovány vlastností $(x \in S \ et \ Vel(y) \leq Vel(x)) \Rightarrow y \in S$.

[11] V této práci je podána postačující podmínka, aby se grupa dala uspořádat; z ní např. plyne, že každou volnou grupu lze uspořádat.

[12] Jedná o stěžejní a vůbec první monografii o uspořádaných algebraických strukturách.

podobě. Podle našeho názoru je však průhlednější původní Riegrovo znění. V souvislosti s touto větou L.S. Riegra citují i V.M. Kopytov a N.Ya. Medvěděv v monografii *The theory of lattice-ordered groups* [KM94] a G.P. Graham [Gra68].[13]

Jako důsledek obecnější věty, která je též v této části Riegrovy práce dokázána, platí následující:

Je-li velikostní podgrupa $N \in S(G)$ normální podgrupou[14] *uspořádané grupy G, potom faktorová grupa G/N je též uspořádanou grupou s uspořádáním daným předpisem*

$$xN < yN \Leftrightarrow (\forall z \in N)(yx^{-1} > z).$$

V prvním paragrafu je uvedeno několik nutných podmínek pro to, aby velikostní podgrupa byla normální podgrupou uspořádané grupy. V následujícím uvádíme některé konkrétní důsledky obecnějších vět, které L.S. Rieger v prvním paragrafu své práce dokázal.

- Jestliže je systém velikostí $M(G)$ konečný, pak každá podgrupa systému $S(G)$ je normální v G.
- Je-li $M(G)$ dobře uspořádaná množina[15], pak každá podgrupa systému $S(G)$ je normální v G.
- Jestliže $c \neq e$ je prvek z centra[16] grupy G a $Vel(c) = \xi$, potom podgrupy $\hat{G}_\xi, G_\xi$ jsou normální v G.

L.S. Rieger zde též ukazuje, jak vypadají tři známé věty o izomomorfismu pro případ uspořádaných grup.

Poznámka: V recenzi práce [R1] otištěné v časopise *Mathematical Reviews* upozorňuje G. Birkhoff, že L.S. Rieger zřejmě nečetl jeho práci *Lattice ordered groups* [Bir42].[17] Tvrdí, že Riegrovy velikostní podgrupy jsou identické jím zavedeným *l-ideálům* ve svazově uspořádaných grupách[18]. L.S. Rieger tak znovu objevil velikostní podgrupy a dokazoval pro ně jisté vlastnosti, které již bylyv obecnější formě dokázané v [Bir42].

Podotkněme, že obecnější svazově uspořádané grupy zahrnují (lineárně) uspořádané grupy (každá uspořádaná grupa je též svazově uspořádaná).

Birkhoffův l-ideál je definován jako normální podgrupa s vlastností

$$(V1) \quad (x \in N \; et \; |y| \leq |x|) \Rightarrow y \in N, \text{ kde } |x| = x \vee x^{-1}.$$

[13] Doplňme, že v dnešní době se o uspořádatelnosti grupy zpravidla udává věta z práce [Ohn52] M. Ohniského (viz např. [Gla99]).

[14] Připomeňme, že podgrupa N grupy G se nazývá *normální*, jestliže $(\forall x \in N)(\forall z \in G)$ $(zxz^{-1} \in N)$, neboli s každým prvkem obsahuje N všechny prvky konjugované.

[15] Uspořádaná množina se nazývá *dobře uspořádaná*, jestliže každá její neprázdná podmnožina obsahuje nejmenší prvek.

[16] *Centrum* C_G grupy G je definováno takto: $C_G := \{c \in G : (\forall z \in G)(cz = zc)\}$.

[17] Přestože jeden její výsledek L.S. Rieger cituje v [R2], str. 33.

[18] *Svazově uspořádanou grupou* je nazývána částečně uspořádaná grupa, která je – jako částečně uspořádaná množina – zároveň svazem (viz část 3.1.1).

Velikostní podgrupy (jež obecně nemusí být normálními podgrupami) jsou charakterizovány vlastností

$$(V2) \quad (x \in S \; et \; Vel(y) \leq Vel(x)) \Rightarrow y \in S.$$

Vlastnosti $(V1)$ a $(V2)$ jsou však (pro uspořádané grupy) ekvivalentní, proto normální velikostní podgrupy jsou speciálním případem l-ideálů. G. Birkhoff v [Bir42] dochází např. k analogickému výsledku jako L.S. Rieger, že faktorová grupa svazově uspořádané grupy podle l-ideálu je opět svazově uspořádaná.

§ 2: *Lexikografický součin, komutativní případ*

Pojem lexikografického součinu je běžně znám pro případ násobení ordinálních typů a čísel. Zde je zaveden i do oblasti uspořádaných grup.

Lexikografický součin[19] $(S_{lex})_{\xi\in M}(M_\xi)$ uspořádaných grup M_ξ přes lineárně uspořádanou indexovou množinu M je určitá podgrupa kartézského součinu

$$(S_{kart})_{\xi\in M}(M_\xi) \text{ grup } M_\xi,$$

která má jisté vlastnosti. Díky nim lze jednoduše zvolit její uspořádání tak, že se stane uspořádanou grupou. Obecný kartézský součin uspořádaných grup je pouze částečně uspořádanou grupou[20].

Příkladem lexikografického součinu je kartézský součin $G = \Pi_{i\in I} G_i$ přes (lineárně uspořádanou) konečnou množinu I uspořádaných grup G_i. Uspořádání na výsledné grupě G je dáno takto:

$g < h$ právě tehdy, když $g_j < h_j$, kde j je nejmenší $i \in I$, pro které $g_i \neq h_i$.

Obecně platí následující vztah mezi lexikografickým a direktním součinem[21]:

Věta: Lexikografický součin uspořádaných grup je direktním součinem právě tehdy, když uspořádání indexové množiny je dobré.

Lexikografický součin je jedním z ústředních pojmů teorie uspořádaných grup. Jedním ze základních (za obecných podmínek však značně náročných) úkolů této teorie je vnořit danou uspořádanou grupu při zachování jejího systému velikostí do lexikografického součinu uspořádaných grup již lexikograficky nerozložitelných. Tato úloha je plně vyřešena pro případ uspořádaných komutativních grup, a to již zmiňovanou Hahnovou fundamentální větou:

Věta: Každá komutativní uspořádaná grupa G o systému velikostí $M(G)$ je u-izomorfní s vhodnou podgrupou lexikografického součinu

$$(S_{lex})_{\xi\in M(G)}(R_\xi) \text{ aditivních grup reálných čísel } R_\xi = R.$$

Vidíme tedy, že lexikografické součiny aditivních grup reálných čísel jsou jakýmisi univerzálními uspořádanými komutativními grupami. L.S. Rieger dále

[19] Poprvé byl lexikografický součin použit v roce 1907 H. Hahnem v práci [Hah07].

[20] Relace částečného uspořádání nezaručuje, že všechny prvky jsou navzájem porovnatelné.

[21] *Direktní součin grup* je takový kartézský součin grup, že každý prvek tohoto součinu (tj. posloupnost jejich prvků) má pouze konečný počet nejednotkových složek.

dokázal nutnou a postačující podmínku pro to, aby uspořádaná grupa byla komutativní. Tak je ukázána souvislost mezi obecnými a komutativními grupami, která zařazuje Hahnovu větu do obecné teorie uspořádaných grup.

§ 3: ***Diskrétně uspořádané grupy***

Definice: *Diskrétně uspořádaná grupa* G je taková uspořádaná grupa, v níž existují prvky g, g' takové, že $g < g'$, ale pro žádné $h \in G$ není $g < h < g'$. (Odtud plyne, že pro každý prvek $a \in G$ existuje $a' \in G$ tak, že $a < a'$, ale pro žádné $b \in G$ není $a < b < a'$.)

Diskrétně uspořádaná grupa H se nazývá *naprosto diskrétně uspořádaná*, jestliže každá faktorová grupa H/N, kde $N \in S(H)$ je normální velikostní podgrupa v H, je diskrétně uspořádaná.

Snadno lze ukázat, že diskrétně uspořádané grupy jsou právě ty, u nichž existuje nejmenší pozitivní prvek. Příkladem naprosto diskrétně uspořádané grupy je lexikografický součin přes dobře uspořádanou množinu (a tedy direktní součin) nekonečných cyklických grup (cyklů).

L.S. Rieger v práci [R1] dokázal, že struktura **každé** naprosto diskrétně uspořádané grupy je dána lexikograficky uspořádaným direktním součinem nekonečných cyklů. Podobně dokázal, že za poněkud slabších předpokladů na diskrétnost lze každý prvek grupy rozložit na konečný součin mocnin určitých prvků, jenž je v jistém smyslu jednoznačný a komutativní až na „určitý zbytek malé velikosti“.[22]

2.1.2 *O uspořádaných a cyklicky uspořádaných grupách, II* [R2] (1948)

V práci [R2] jsou studovány grupy, v nichž je dána místo dvojčlenné relace lineárního uspořádání trojčlenná relace cyklického uspořádání. Jak uvidíme později, cyklické uspořádání má k lineárnímu uspořádání blízký vztah. Tato trojčlenná relace byla v Československu zavedena E. Čechem v knize *Bodové množiny* [Čech36].[23] L.S. Rieger byl první, kdo se začal intenzivněji zabývat teorií cyklicky uspořádaných grup a kdo zde získal fundamentální výsledky. Podle vynikajícího slovenského matematika Jána Jakubíka (nar. 1923)[24], se

[22] Na závěr ještě doplňme, že článek [R1] údajně vyšel též ve francouzském překladu (podle Věry Macháčkové-Riegerové). Tuto verzi se však nepodařilo dohledat.

[23] Ve své pozdější knize *Topologické prostory* [Čech59] zavádí též tzv. *cyklické prostory* jako souvislé prostory s cyklickým uspořádáním (splňujícím jisté vlastnosti).

[24] Viz Černák, Š. a Kolibiar, M., *Životné jubileum akademika Jána Jakubíka*, Math. Slovaca **33** (1983), 321–326; Kolibiar, M., *K životnému jubileu akademika Jakubíka*, ČPM **108** (1983), 425–431; Kolibiar, M., *Professor Ján Jakubík sexagenarian*, CMJ **33(108)** (1983), 657–664; Csontóová, M., Černák, Š. a Ploščica, M., *Seventy years of Professor Ján Jakubík*, Math. Slovaca **44** (1994), 483–487; Ploščica, M., *The 70th birthday of Professor Ján Jakubík*, Tatra Mt. Math. Publ. **5** (1995), 5–12; Černák, Š., *Eighty years of Professor Ján Jakubík*, Math. Slovaca **53(5)** (2003), 543–550; Dvurecenskij, A., *In honour of Prof. Ján Jakubík on the occasion of his 80th birthday*, Soft Comput. **7** (2003), 439.

L.S. Rieger díky pracím [R1], [R2] a [R3] stal zakladatelem teorie cyklicky uspořádaných grup.[25]

§ 4: *Cyklicky uspořádané grupy*

Definice: Nechť P je alespoň tříprvková množina, na níž je dána trojčlenná relace $< x, y, z <$ pro $x, y, z \in P, x \neq y, x \neq z, y \neq z$. Tato relace se nazývá *relace cyklického uspořádání*, jestliže splňuje následující vlastnosti:

1. $< x, y, z < \Rightarrow < y, z, x <$,
2. nastává vždy právě jedna z možností
$$< x, y, z < \text{ a } < y, x, z <,$$
3. $(< x, y, z < \ et \ < x, z, v <) \Rightarrow < x, y, v < \quad$ (a též $< y, z, v <$).

Definice: Nechť G je grupa, jejíž prvky tvoří cyklicky uspořádanou množinu v relaci $< \cdots <$. Jestliže pro libovolně zvolené prvky $x, y, z \in G, x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$, a $v \in G$ platí

$$< x, y, z < \Rightarrow \ (< vx, vy, vz < \ et \ < xv, yv, zv <),$$

pak říkáme, že G je *cyklicky uspořádaná grupa*.

Příkladem cyklicky uspořádané grupy je multiplikativní grupa komplexních čísel s absolutní hodnotou rovnou jedné. Cyklické uspořádání je tu geometricky názorné a znamená, že třemi prvky v pořadí cyklické relace procházíme při oběhu po jednotkové kružnici v kladném (či záporném) smyslu.

Uspořádané grupy jsou v jistém smyslu speciálním případem grup cyklicky uspořádaných. Snadno se totiž lze přesvědčit, že z každé uspořádané grupy G je možno utvořit cyklicky uspořádanou grupu G. Stačí pro $x, y, z \in G$, $x \neq y$, $x \neq z, y \neq z$, položit $< x, y, z <$, když buď $x < y < z$, nebo $y < z < x$, nebo $z < x < y$. Takové cyklické uspořádání se nazývá *nevlastní cyklické uspořádání.*

Pro lepší představu nyní uvažujme Gaussovu rovinu. Při „stočení“ reálné přímky do jednotkové kružnice se středem v počátku je právě popsané cyklické uspořádání multiplikativní grupy komplexních čísel s absolutní hodnotou rovnou jedné nevlastním cyklickým uspořádáním přirozeného uspořádání aditivní grupy reálných čísel.

Výše uvedený vztah mezi lineárním a cyklickým uspořádáním množiny zobecnil E. Čech v již zmiňované knize *Bodové množiny* [Čech36]. Pomocí Čechova výsledku L.S. Rieger dokázal následující tvrzení:

[25] J. Jakubík byl hlavním Riegrovým pokračovatelem v teorii cyklicky uspořádaných grup a autorka této práce mu vděčí za řadu odkazů na další matematiky, kteří v dané oblasti na Riegra navazovali.

Věta: Obsahuje-li uspořádaná grupa G takový prvek $z \in G, z > e$, největší své velikosti, že jím vytvořený cykl (z) je normální podgrupou v G,[26] potom faktorová grupa $G/(z)$ (je-li alespoň tříprvková) je cyklicky uspořádanou grupou a její cyklické uspořádání je dáno jednoznačně.

Dokázal též nutné a postačující podmínky stanovující, kdy je dané cyklické uspořádání (zároveň též uspořádané) grupy G, resp. grupy $G/(z)$ (z předchozí věty) nevlastní. Dalším výsledkem je tvrzení, že každá konečná cyklicky uspořádaná grupa tvoří konečný cykl.

Nakonec je podána „obrácená“ věta, jež praví, že každá cyklicky uspořádaná grupa může být považována za faktorovou grupu jisté uspořádané grupy (určené až na izomorfismus jednoznačně) podle cyklu nějakého prvku z centra (této uspořádané grupy):

Věta: Nechť F je cyklicky uspořádaná grupa. Pak existuje a je až na u-izomorfismus jednoznačně určena uspořádaná grupa G a v ní normální cyklická podgrupa $(z) \neq (e)$ taková, že $G/(z)$ je izomorní s F a podobně cyklicky uspořádaná.[27]

K důkazu této věty L.S. Rieger použil Schreierovu[28] teorii rozšíření grup (viz [Zas37]). Na jeho výsledky později navázal S. Świerczkowski v práci [Świ59a], v níž dokázal významnou větu o reprezentaci cyklicky uspořádaných grup (viz dále). Jak již bylo řečeno, Ladislav Svante Rieger byl první, kdo dosáhl v této oblasti matematiky zásadních výsledků (jedním z nich je výše uvedená věta). L. Fuchs v knize [Fuch63] věnoval celou jednu část cyklicky uspořádaným grupám; v ní se odkazuje pouze na L.S. Riegra.

§ 5: *Uspořádané grupy s konečným počtem velikostí*

Pátý paragraf je věnován hlubšímu studiu uspořádaných grup, které mají n velikostí. Případ $n = 1$ odpovídá archimedovsky uspořádaným grupám, a je tedy vyřešen na začátku práce.

Případ $n = 2$ je v práci podrobně probrán. Opět je zde použita Schreierova teorie rozšíření[29], výsledkem je její modifikace pro uspořádané grupy.

L.S. Rieger dokázal, že *každá uspořádaná grupa o dvou velikostech je (až na u-izomorfismus) dána jako jisté uspořádané rozšíření G podgrupy G_1 aditivní grupy reálných čísel, že G/G_1 je u-izomorfní s určitou podgrupou multiplikativní grupy kladných reálných čísel.* Dané rozšíření je v práci explicitně popsáno.

Jako důsledek je odvozeno tvrzení pro případ obecného konečného počtu n velikostí uspořádané grupy. Jelikož explicitní tvar takové grupy je velice komplikovaný a nepřehledný, L.S. Rieger jej udává pouze rekurentně. Jak sám píše, spokojil se jen s určením „povšechné formy“ takové uspořádané grupy.

[26] Pak musí prvek z ležet v centru grupy G.

[27] Jedná se o obdobu u-izomorfismu pro cyklické uspořádání.

[28] Otto Schreier (1901–1929).

[29] Schreierova teorie rozšíření řeší následující úlohu: Jsou dány grupy F a N. Je třeba charakterizovat všechny nadgrupy $G \supset N$ takové, že N je normální v G a G/N je izomorfní s F.

Obecným závěrem této problematiky je, že *každá uspořádaná grupa s konečným počtem velikostí může být reprezentována určitou (uspořádanou) grupou n-tic reálných čísel.*

Z tohoto výsledku vyplývá následující příklad:

Uspořádanou grupu G_n s n velikostmi (nekomutativní, o niž se hlavně zajímáme) můžeme získat jako direktní součin uspořádaných grup $G_{n_1}, \dots, G_{n_k}$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ (kde alespoň jeden z faktorů je nekomutativní grupa). Uspořádání tohoto součinu je dáno lexikograficky (tj. jako u lexikografického součinu uspořádaných grup).[30]

§ 6: *Uspořádané grupy, v nichž velikostní grupy nejsou normální*

Na závěr práce [R2] vyvrátil L.S. Rieger domněnku, že v každé grupě musí být alespoň některé (netriviální) velikostní podgrupy normálními podgrupami.

Věta: Nechť $B_1, B_2, \dots$ je posloupnost uspořádaných grup. Potom je jednoznačně určena uspořádaná grupa G těchto vlastností:

1. žádná velikostní podgrupa není normální v G,
2. G obsahuje grupy $B_1, B_2, \dots$ jako podgrupy.

2.1.3 *O uspořádaných a cyklicky uspořádaných grupách, III* [R3] (1948)

Uspořádané grupy patří mezi nejznámější topologické grupy. Přičemž topologickou grupou je grupa, jež je opatřena takovou topologií, že násobení a přiřazení inverzního prvku jsou spojitá zobrazení.[31] V rámci teorie topologických grup jsou uspořádané grupy zmiňovány již v práci R. Baera [Bae29] či H. Cartana [Car39]. L.S. Rieger používá ve své době převážně uznávané pojetí topologické grupy, jež zavedl např. L.S. Pontrjagin (1908–1988) (viz [Pon38]).

Cílem práce [R3] bylo charakterizovat co nejvíce z algebraické struktury uspořádané, resp. cyklicky uspořádané grupy, tentokrát pomocí její tzv. přirozené topologie (viz dále)[32]. Je zde využito výsledků z předchozích prací [R1] a [R2], částečně pak z obecné teorie topologických grup. L.S. Rieger poznamenává, že pro topologizaci uspořádaných grup není vhodný klasický pojem topologického prostoru, jak jej zavedl F. Hausdorff (1868–1942). Proto tedy nebylo možno převzít výsledky té obecné teorie topologických grup, která vychází z Hausdorffovy axiomatiky.

---

[30] Příkladem reprezentace grupy G_2 může být vhodná podgrupa grupy afinních transformací (reálné) přímky (tj. grupy substitucí tvaru $x' = a + bx$). Grupa G_2 by v tomto případě byla množinou $\{(a, b) : b > 0\}$, pro kterou $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 + b_1 a_2, b_1 b_2)$. Grupu G_n bychom získali vhodným rozšířením grupy G_2.

[31] Jak uvádí L.S. Rieger, pod pojmem topologická grupa si můžeme též představit grupu, v níž je definovaná konvergence posloupností s vlastností, že limita součinů je rovna součinu limit (pokud tyto limity existují).

[32] Termín *přirozená topologie* zavedl u nás pro uspořádané množiny E. Čech v práci *Topologické prostory* [Čech37].

Víceméně všechny nově používané pojmy jsou v následujících pasážích definovány. Připomeňme, že základní terminologii topologických prostorů čtenář nalezne v oddílu 3.1.2. Zařazení těchto matematických základů bylo voleno tak, aby nebyla porušena kontinuita výkladu týkajícího se Riegrových prací.

§ 7: *Přirozená topologisace uspořádané a cyklicky uspořádané grupy*

Definice:[33] Grupa G se nazývá *topologická grupa*, je-li dán tzv. *úplný systém* Σ *okolí jednotky* $e \in G$, tj. systém Σ podmnožin[34] grupy G, pro něž platí:

1. průnik všech okolí systému Σ obsahuje pouze jednotku e,
2. průnik kterýchkoliv dvou okolí jednotky ze systému Σ obsahuje opět nějaké okolí ze systému Σ,
3. ke každému okolí $A \in \Sigma$ existuje okolí $B \in \Sigma$ tak, že
$$BB^{-1} \subseteq A,$$
4. ke každému okolí $A \in \Sigma$ a k libovolnému prvku $g \in A$ existuje okolí $C \in \Sigma$ tak, že
$$Cg \subseteq A,$$
5. ke každému okolí $A \in \Sigma$ a k libovolnému prvku $g \in G$ existuje okolí $D \in \Sigma$ tak, že
$$gDg^{-1} \subseteq A.$$

Nyní pro úplnost uvedeme známé pojmy z teorie topologických prostorů, jak jsou definovány pro topologické grupy:

Množina $H \subseteq G$ se nazývá *otevřená*, jestliže je množinovým sjednocením vhodných, tzv. otevřených okolí prvků $x \in H$, což jsou množiny tvaru Ax, kde A je okolí jednotky. Množina $I \subseteq G$ se nazývá *uzavřená*, je-li doplňkem množiny otevřené v G.

Definice: Nechť G je topologická grupa s úplným systémem Σ okolí jednotky a H její podgrupa. Pak systém Σ_H průniků $A \cap H, A \in \Sigma$, se nazývá *úplný systém relativních okolí jednotky* podgrupy H. Říkáme též, že topologická podgrupa H je *vnořena* do topologické nadgrupy G.

Věta: Nechť G je uspořádaná grupa. Položme za tzv. *přirozený systém* Σ *okolí jednotky* všechny množiny tvaru

$$A_a = \{x \in G : a^{-1} < x < a\}, \text{ kde } e < a \in G.$$

Potom G je topologickou grupou.

[33] Viz [Pon38].
[34] L.S. Rieger pro podmnožiny používá termín *komplexy*.

Tato věta se vyskytuje v řadě dřívějších prací, např. u R. Baera a H. Cartana. L.S. Rieger ji zde dokazuje pro Pontrjaginovu definici topologické grupy. Dále v tomto paragrafu dokazuje mj. následující dvě věty:

Věta: Nechť G je uspořádaná grupa a $S(G)$ její úplný systém velikostních podgrup. Potom velikostní podgrupy $S \in S(G)$ jsou topologickými grupami v G. Topologie daná v nich tím, že jsou to uspořádané grupy (jako podgrupy uspořádané grupy), je totožná s topologií danou jejich vnořením do topologické grupy G.

Věta: Nechť G je cyklicky uspořádaná grupa. Potom všechny množiny tvaru

$$A_a = \{x \in G : < a^{-1}, x, a <\}, \text{ kde } a \in G \text{ a } < a^{-1}, e, a <,$$

tvoří úplný systém okolí jednotky a tvoří tzv. *přirozenou topologii cyklicky uspořádané grupy.*

§ 8: *Úplné uspořádané grupy*

Definice: Topologická grupa se nazývá *úplná*, jestliže je uzavřenou podgrupou v každé topologické grupě, do níž je vnořena.

Úplným obalem topologické grupy G se nazývá topologická grupa $\bar{G}$, pro kterou platí:

1. G je vnořena do grupy $\bar{G}$,
2. $\bar{G}$ je úplná grupa,
3. do každé úplné grupy, do níž je vnořena grupa G, lze vnořit též $\bar{G}$.

Definice: Nechť G je uspořádaná grupa, která není diskrétní. *Fundamentální posloupností* v G nazveme takovou posloupnost $(g_\alpha)_{\alpha=1}^{\kappa}$ prvků z G (kde κ je nekonečné ordinální číslo dané určitým způsobem), pro kterou platí Cauchyova podmínka

$$(\forall u \in G)(u > e \ \Rightarrow (\exists \alpha_u)[\alpha_u < \kappa \ et \ (\forall \alpha_1)(\forall \alpha_2)([\alpha_1 > \alpha_u \ et \ \alpha_2 > \alpha_u] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g_{\alpha_1} g_{\alpha_2}^{-1}| < u)]).$$[35]

Speciálním případem fundamentální posloupnosti je *jednotková* fundamentální *posloupnost.* Její přesná definice je dosti komplikovaná, proto ji zde uvádět nebudeme a čtenáře odkážeme na [R3], str. 14.

Definice: Nechť G je uspořádaná grupa. Říkáme, že posloupnost $(g_\alpha)_{\alpha=1}^{\kappa}$ prvků z G konverguje k prvku $g \in G$ a píšeme

$$\lim_{\alpha \to \kappa} g_\alpha = g,$$

jestliže posloupnost $(g_\alpha g^{-1})_{\alpha=1}^{\kappa}$ je jednotková.

[35] Pokud bychom jako speciální případ uvažovali posloupnost prvků aditivní grupy reálných čísel indexovanou přirozenými čísly, získáme známou definici cauchyovské posloupnosti.

V osmém paragrafu je podána konstrukce úplného obalu $\bar{G}$ uspořádané grupy G, a to prostřednictvím fundamentálních posloupností. Jedná se o analogické úvahy jako u Cantorovy metody fundamentálních (cauchyovských) posloupností, která slouží ke konstrukci reálných čísel (neboli ke konstrukci úplného obalu uspořádané aditivní grupy racionálních čísel).[36]

Konkrétně L.S. Rieger dokazuje následující tvrzení:

Je-li G diskrétní grupa, pak $\bar{G} = G$. V opačném případě je $\bar{G} = F/J$, kde F je množina všech fundamentálních posloupností z G, která je (spolu s násobením posloupností) grupou, a J je množina všech jednotkových fundamentálních posloupností, která je normální podgrupou v G. V $\bar{G}$ má limitu nejen každá fundamentální posloupnost prvků z G, ale i každá fundamentální posloupnost prvků z $\bar{G}$.

§ 9: *Souvislost, lokální kompaktnost a kompaktnost*

V úplném závěru Riegrovy práce [R3] jsou uvedeny některé algebraické výsledky pro uspořádané a cyklicky uspořádané grupy, které jsou odvozeny z jejich přirozené topologie. L.S. Rieger zde studuje pojmy zavedené v následujících definicích:

Definice: Topologická grupa se nazývá *totálně nesouvislá*, jestliže existuje úplný systém okolí jednotky sestávající z množin současně otevřených i uzavřených.

Definice: Topologická grupa se nazývá *kompaktní*, jestliže je jako topologický prostor kompaktní.[37]

Topologická grupa G se nazývá *lokálně kompaktní*, jestliže existuje nějaké okolí jednotky, jehož uzávěr je – jako podprostor prostoru G – kompaktní prostor.

L.S. Rieger podává nutnou a postačující podmínku pro to, aby uspořádaná grupa byla totálně nesouvislá, resp. lokálně kompaktní.[38] Z jeho výsledků např. plyne, že neexistují netriviální (tj. nediskrétní) uspořádané, totálně nesouvislé a lokálně kompaktní grupy. Přitom je známo, že existují dokonce kompaktní, totálně nesouvislé, netriviální (tj. nekonečné) uspořádané topologické prostory (např. Cantorovo diskontinuum).

Nejvýznamnějším výsledkem práce [R3] je následující věta:

Věta: Nechť G je nekonečná cyklicky uspořádaná grupa. Potom G je kompaktní grupa právě tehdy, když je izomorfní a podobně cyklicky uspořádaná s multiplikativní grupou komplexních čísel s absolutní hodnotou rovnou jedné.

[36] L.S. Rieger též uvádí, že tato metoda není vhodná pro obecný případ topologické grupy. Daný postup je možno přenést na cyklicky uspořádané grupy.

[37] Topologický prostor P je kompaktní, jestliže z každého systému otevřených množin, který pokrývá P (tj. jejichž sjednocením je P), lze vybrat konečný podsystém, který rovněž pokrývá P.

[38] Poznamenává, že v případě cyklicky uspořádaných grup se v této problematice nedosahuje zajímavých výsledků.

2.1.4 Navazující práce a citace v monografiích

V roce 1956 se Riegrovými výsledky inspiroval F.A. Behrend a v práci [Beh56] je použil k charakterizaci tzv. neúplných systémů.

V teorii cyklicky uspořádaných grup navázal na L.S. Riegra na konci padesátých let již zmiňovaný S. Świerczkowski. V této souvislosti Ján Jakubík vzpomíná:

V päťdesiatych rokoch minulého storočia som bol na študijnej ceste v Poľsku, kde som prednášal o problematike usporiadaných množín. Poľský matematik S. Świerczkowski sa ma pýtal, či viem niečo o cyklicky usporiadaných grupách. Hovoril, že on v tomto smere začal pracovať. Bol veľmi potešený, keď som mu poskytol podrobné údaje o článkoch L. Riegra.

Świerczkowski v práci [Świ59a] pomocí Riegrových výsledků dokázal, že pro cyklicky uspořádanou grupu G existuje uspořádaná grupa H taková, že $G \subseteq K \times H$, kde K je cyklicky uspořádaná grupa komplexních čísel s absolutní hodnotou rovnou jedné. Direktní součin $K \times H$ je cyklicky uspořádaná grupa, která má na podmnožině prvků z G cyklické uspořádání rovné původnímu cyklickému uspořádání grupy G. Cyklickému uspořádání věnoval Świerczkowski i práci [Świ59b].

Roku 1967 se F. Menegazzo v práci [Men67] zaměřil na abelovské cyklicky uspořádané grupy a prostřednictvím Świerczkowského výsledků a tzv. Riegrovy grupy tyto grupy blíže charakterizoval.

V sedmdesátých letech převzali výzkum v teorii cyklicky uspořádaných grup sovětští matematici: S.D. Želeva [Žel76], [Žel81a] a [Žel81b], A.I. Zabarina [Zab82] a [Zab85], jmenujme též práci A.I. Zabariny a G.G. Pestova [ZP84].

V osmdesátých letech se zájem o cyklicky uspořádané grupy přesouvá též do Brna, a to v rámci studia cyklicky uspořádaných množin (viz dále). Řada výsledků z prací Vítězslava Nováka (1935–2005)[39] [Nov82], [Nov84] a Vítězslava Nováka a Miroslava Novotného (nar. 1922)[40] [NN83], [NN85], [NN89] byla později aplikována právě v článcích o cyklicky uspořádaných grupách.

Na Slovensku se cyklicky uspořádanými grupami zabýval zejména Ján Jakubík ([Jak89] [Jak90], [Jak91], [Jak94], [Jak98] a [Jak02])[41] spolu se svými aspiranty G. Pringerovou ([JP88a], [JP88b] a [JP94]), Š. Černákem ([ČJ87], [Čer88], [Čer89] a [Čer95]) a M. Harmincem ([Har88]).

---

[39] Chvalina, J. a Novotný, M., *Profesor Vítězslav Novák sedmdesátníkem*, PMFA **50** (2005), 254–255.

[40] Viz Novák, V., *Profesor Miroslav Novotný šedesátiletý*, ČPM **107** (1982), 208–217 (též CMJ **32(107)** (1982), 338–343); Novák, V. a Půža, B., *K sedmdesátinám prof. RNDr. Miroslava Novotného, DrSc.*, Math. Bohemica **117** (1992), 325–329 (též CMJ **42** (1992), 379–382); Chvalina, J., Meduna, A. a Novák, V., *Profesor Miroslav Novotný osmdesátiletý*, PMFA **47** (2002), 168–170.

[41] V těchto pracích zkoumal J. Jakubík mimo jiné vlastnosti rozkladů lexikografických součinů u speciálního typu cyklicky uspořádaných grup, které označil jako *dc-grupy*. Dále např. zavedl pojem *cyklicky polouspořádané grupy*, čímž zobecnil pojem *částečně polouspořádané grupy*.

V souvislosti s cyklicky uspořádanými grupami L.S. Riegra citují např. D. Gluschankof [Glu93], M. Droste, M. Giraudet a D. Macpherson [DGM95] a V.M. Tararin [Tar01].

Dále jsou Riegrovy práce [R1], [R2] a [R3] citovány např. v pracích J.B. Rolla [Rol93], D. Macphersona a C. Steinhorna [MS96], J. Rachůnka [Rach02], M. Giraudeta a W.C. Hollanda [GH02].

Publikace [R1], [R2], [R3] jsou též citovány ve významných monografiích o uspořádaných algebraických strukturách. Kromě již zmiňovaných knih L. Fuchse *Partially Ordered Algebraic Systems* [Fuch63] a V.M. Kopytova a N.Ya. Medvěděva *The theory of lattice-ordered groups* [KM94] se jedná o díla zabývající se přímo problematikou grup. Jmenujme např. práci A.I. Kokorina (1908–1987) a V.M. Kopytova *Linejno uporjadočennye gruppy* [KK72], R.B. Mury a A.H. Rhemtully *Orderable groups* [MR77], dále V.M. Kopytova *Rešetočno uporjadočennye gruppy* [Kop84] či V.M. Kopytova a N.Ya. Medvěděva *Pravouprjadočennye gruppy* [KM96].

V souvislosti se studiem cyklického uspořádání Riegra zmiňuje též G. Birkhoff v knize *Lattice theory* [Bir67].

Oddíl o Riegrově působení v oblasti grup uspořádaných, a zejména cyklicky uspořádaných, uzavřeme slovy Jána Jakubíka:

Dovoľujem si vysloviť nádej, že výskum cyklicky usporiadaných grúp nadväzujúci na dielo L.S. Riegra bude pokračovať aj v budúcich rokoch.

2.1.5 Vznik a vývoj teorie uspořádaných grup

Studium uspořádaných grup bylo zahájeno na počátku dvacátého století, kdy O. Hölder [Höl01] charakterizoval archimedovsky uspořádané grupy. Dalších významných výsledků bylo dosaženo až koncem čtyřicátých let, a to v otázce popisu struktury uspořádaných grup. L.S. Rieger v [R1] popisuje tyto grupy pomocí (obecných) velikostních podgrup, A.I. Mal'cev [Mal'49] a K. Iwasawa [Iwa48] (nezávisle na sobě) prostřednictvím konvexních podgrup.

Ve stejných letech A.I. Mal'cev [Mal'48] a B.H. Neumann (1909-2002) [Neu49] nezávisle dokázali, že uspořádané grupy mohou být vnořeny do uspořádaných podílových okruhů. Od té doby byla této problematice věnována značná pozornost, byly studovány nové třídy grup definovaných na základě jejich vlastností týkajích se uspořádatelnosti.

Jednou z důležitých otázek padesátých let byla otázka existence algebraicky jednoduché uspořádané grupy. Kladnou odpověď podal jako první C.G. Chehata [Cheh52]. Podstatné zjednodušení a zobecnění Chehatova výsledku později podal významný československý algebraik (toho času v Austrálii) Vlastimil Dlab (nar. 1932)[42] [Dla68], který se kromě příbuzné problematiky dále zabýval např. počtem možných upořádání grupy.

[42] Viz Procházka, L., *Šedesátiny profesora Vlastimila Dlaba*, Math. Bohemica **117** (1992), 429–435 (též CMJ **43** (1993), 187–192).

Od padesátých let vyšla řada monografií věnovaných uspořádaným grupám, mezi prvními jmenujme např. práci N. Bourbaki[43] [Bou52], P. Ribenboima (nar. 1928) [Rib63] či A.I. Kokorina a V.M. Kopytova [KK72]. Obecnými algebraickými strukturami se zabýval již zmiňovaný L. Fuchs [Fuch63] či A.A. Vinogradov v článku [Vin67] (angl. [Vin70]).

Řada pozdějších monografií týkajících se též uspořádaných grup je uvedena v předchozí části, pro doplnění ještě připomeňme monografii A.M.W. Glasse [Gla81].

Situace v Československu

Na závěr poznamenejme několik slov o československých matematicích, kteří se v padesátých až sedmdesátých letech zabývali uspořádanými množinami či uspořádanými grupami.[44] Zejména se jedná o osobnosti brněnského výzkumu, zahájeného po roce 1945 Josefem Novákem (1905–1999)[45]. K nejvýznamnějším matematikům z této oblasti patří vynikající vědec a pedagog M. Novotný či F. Šik (1921–2002)[46]. Miroslav Novotný stál na počátku šedesátých let u zrodu tradičních letních škol o uspořádaných množinách a obecné algebře a založil též seminář obdobného zaměření. František Šik zahájil na konci padesátých let dlouhou a úspěšnou sérii prací o uspořádaných grupách, jeho hlavní výsledky se týkají reprezentace svazově uspořádaných grup pomocí subdirektních součinů speciálně uspořádaných grup.

V sedmdesátých letech publikoval již zmiňovaný Vítězslav Novák řadu významných prací z oblasti uspořádaných, a zejména pak cyklicky uspořádaných množin. Uspořádané množiny studovali i K. Čulík a M. Sekanina (1931–1987)[47]. Karel Čulík se zabýval lexikografickým součtem částečně uspořádaných množin, hlavní výsledky Milana Sekaniny se týkají vztahu topologických prostorů a částečně uspořádaných množin.

Ze slovenských matematiků připomeňme jednoho z nejuznávanějších, Jána Jakubíka, a jeho studenty. J. Jakubík se teorii uspořádaných grup začal vě-

---

[43]Nicolas Bourbaki byl pseudonym, pod kterým publikovala skupina francouzských matematiků. Jejich první kongres (čítající osm účastníků) se konal roku 1935. Mezi zakládajícími členy byli např. Henri Cartan, André Weil (1906–1998), Claude Chevalley (1909–1984), René de Possel (1905–1974), Jean Dieudonné (1906–1992) a Szolem Mandelbrojt (1899-1983). Cílem této skupiny bylo reformovat tehdejší matematické myšlení a položit pevné základy moderní matematiky.

[44]Zde se nebudeme omezovat pouze na lineárně uspořádané grupy, na rozdíl od předchozích oddílů.

[45]Fischer, O., Hájek, J., Koutník, V., Novotný, M. a Sekanina, M., *60 let akademika Josefa Nováka*, ČPM **90** (1965), 236–246; Kraemer, E., *Akademik Josef Novák šedesátníkem*, PMFA **10** (1965), 345; Frolík, Z. a Zítek, F., *Sedmdesát let akademika Josefa Nováka*, ČPM **100** (1975), 208–214 (též CMJ **25(100)** (1975), 330–335); Hušek, M. a Koutník, V., *Akademik Josef Novák sedmdesátiletý*, PMFA **20** (1975), 61–65; Frolík, Z. a Koutník, V., *Akademik Josef Novák osmdesátiletý*, ČPM **110** (1985), 218–224 (též CMJ **35(110)** (1985), 338–344); Frič, R. a Kent, D.C., *In memoriam of Professor Josef Novák*, CMJ **50** (2000), 221–223.

[46]Viz Rachůnek, J. a Šmarda, B., *Život a dílo Františka Šika*, PMFA **48** (2003), 258-259.

[47]Viz Rosický, J., *Zemřel docent Milan Sekanina*, ČPM **113** (1988), 321–327 (též CMJ **39(114)** (1989), 181–186); Novák, V. a Rosický, J., *In memory of Prof. Milan Sekanina, List of publications*, Arch. Math. Brno **25** (1989), 1–4; Šik, F., *Vzpomínka na docenta Milana Sekaninu*, PMFA **33** (1988), 348–350.

novat na konci padesátých let dvacátého století. V šedesátých letech pracoval zejména v oblasti svazově uspořádaných grup, v sedmdesátých letech též studoval lineárně uspořádané grupy. V polovině osmdesátých let svou pozornost dále zaměřil na cyklicky uspořádané grupy.

2.2 Knížka *O grupách a svazech* [R34] (1952)

Do Riegrova výzkumu v oblasti teorie grup patří jak časově, tak tématicky jeho práce *O grupách a svazech* [R34]. Je jedinou popularizační knížkou v jeho matematické tvorbě. Přiblížíme ji nyní podrobněji.

Riegrova knížka *O grupách a svazech* je určena zejména čtenářům se středoškolskými matematickými znalostmi. Byla publikována nákladem 2 750 výtisků v edici *Cesta k vědění*, která byla založena roku 1939 *Jednotou českých matematiků a fyziků* a kladla si za cíl seznámit čtenáře přístupnou formou s vyššími partiemi matematiky a přírodních věd.[48]

L.S. Rieger plní náročný a zodpovědný úkol – popularizovat dva značně abstraktní obory moderní matematiky. Snaží se, aby čtenář nabyl přesvědčení, že přes svou abstraktnost mají tyto dvě disciplíny nezanedbatelné uplatnění při řešení reálných problémů. O účelu své knihy píše:

> *V podstatě mi šlo o toto: seznámit čtenáře s některými základními pojmy theorie grup a theorie svazů, které obě mají v současné matematice obdobný a základní význam. Ukázat na různorodém příkladovém materiálu, že běží v obou případech o velmi obecnou matematickou zákonitost, kterou jsme objevili v nejrůznějších jejích konkretních tvarech, v matematice i přímo ve skutečnosti. Upozornit a pokud lze i ukázat na aplikace v přírodních a technických vědách. Předvést několik typických ukázek důkazových method. Naznačit úkoly obou theorií a alespoň v hlavních rysech ukázat některé další výsledky, jichž bylo dosaženo poměrně nedávno.*
>
> ...
>
> *Šlo jen o to, aby si čtenáři odnesli z této knížky alespoň přesvědčení, že ani abstraktní algebraické theorie, jakými jsou theorie grup a svazů, nejsou samoúčelné abstraktní hříčky zasvěcených matematiků.*[49]

Kniha nebyla koncipována jako učebnice, proto mohla být zpočátku psána poměrně „volně“, bez velkého důrazu na matematickou přesnost. L.S. Rieger se vyhýbá používání matematických pojmů pro čtenáře neznámých, pokud nejsou bezpodmínečně nutné,[50] jde mu o co nejpřístupnější podání. Všechny definice a věty jsou však podány exaktně. Na konci každého oddílu je uvedeno několik cvičení sloužících k prohloubení a k porozumění předcházejícímu textu.

[48] První svazek edice *Cesta k vědění* vydala *Jednota* roku 1940. Byla to knížka *O rovnicích* Š. Schwarze o rozsahu 94 stran. Riegrova rozsáhlejší knížka *O grupách a svazech* (207 stran) vyšla roku 1952 jako 65. svazek této edice již v *Přírodovědeckém vydavatelství* (po likvidaci aktivit *Jednoty* v letech 1949–1951), viz též část 6.2.3.

[49] [R34], str. 3–4.

[50] Např. místo spojení množina prvků používá *souhrn předmětů*.

Na závěr tohoto úvodního pojednání dodejme, že po více než dvaceti letech byla u nás vydána monografie L. Berana (nar. 1938) *Grupy a svazy* [Ber74]. Tato kniha poskytující úvod do teorie grup a svazů spolu s obsáhlým přehledem metod a dosažených výsledků byla určena pro posluchače vysokých škol matematického zaměření. Přestože se tedy jedná o mnohem náročnější knihu, je pravděpodobné, že její téma bylo inspirováno Riegrovou knížkou, kterou zde L. Beran též cituje.

2.2.1 Část 1.: *Theorie grup*

Na začátku první části L.S. Rieger uvádí několik konkrétních příkladů „grupové zákonitosti" (z matematiky i přírody). Postupným objasňováním toho, co je všem těmto příkladům společné, dochází k definici pojmu grupy. Jeho přístup je velmi názorný a metodický. L.S. Rieger dospívá k tomu, že pojem grupy vhodně vystihuje matematickou podstatu pravidelnosti útvarů.

Rieger zde např. představuje pojem tzv. zákrytového pohybu (v dnešní řeči symetrie) nějakého rovinného útvaru. Podává příklad grupy permutací konečně mnoha prvků, grupy symetrií trojúhelníka, grupy matic, ale i pro nás neobvyklou grupu idealizovaných barev (jako základní barvy uvažuje modř, červeň a žluť tak, že jejich smíšením vznikne neutrální barva – mající funkci jednotky).

Dále na konkrétních příkladech ukazuje, že dvě grupy mohou mít – přes odlišný charakter svých prvků – „analogické násobení", čímž se dostává k pojmu izomorfismu a k abstraktnímu pojetí grupy. V návaznosti na to Rieger dokazuje věty o izomorfní reprezentaci konečné grupy grupou permutací a grupou matic. Pozornost také věnuje cyklickým grupám a multiplikativním grupám zbytkových tříd modulo p.

Zobecněním izomorfismu L.S. Rieger dospívá k definici homomorfismu a s ním úzce spojenému pojmu normální podgrupy. Podrobně dokazuje první a druhou větu o izomorfismu a názorně zavádí i pojem jednoduché grupy[51]. Pro objasnění tohoto pojmu dodává:

> *Takové grupy mají tedy, obrazně řečeno, tu vlastnost, že si je již nemůžeme zjednodušit a zmenšit tím, že je „pozorujeme z dálky" tvořením podílové grupy. Jednoduché grupy jsou tedy jedním druhem základních stavebních kamenů obecných grup.*[52]

V teoreticky nejnáročnějším oddílu zavádí pojem normalizátor prvku[53] a dokazuje třídovou rovnici pro konečné grupy[54]. Dále se věnuje grupám permutací a na závěr provádí krok za krokem poměrně náročný důkaz věty, že alternující grupa A_n (tj. grupa sudých pemutací) je jednoduchá pro $n > 4$.

[51] *Jednoduchá grupa* je taková grupa, v níž neexistují vlastní netriviální normální podgrupy.

[52] [R34], str. 77.

[53] *Normalizátor prvku a* grupy G je množina (podgrupa) všech prvků grupy G, které s prvkem a komutují.

[54] *Třídová rovnice* pro konečnou grupu G má následující tvar: $n = 1 + h_2 + ... + h_r$, kde n je řád grupy G, která se rozpadá do r tříd vzájemně konjugovaných prvků, přičemž i-tá třída obsahuje h_i prvků (první obsahuje pouze jednotku grupy G).

První část je zakončena přehledem poměrně nových výsledků (kompoziční řady, direktní rozklad grupy, p-grupy, Sylowovy podgrupy) a aplikacemi teorie grup v topologii.

Více než deset let po Riegrově smrti byla tato část jeho knížky [R34] upravena J. Blažkem k samostatnému vydání a v roce 1974 publikována jako 34. svazek edice *Škola mladých matematiků* pod názvem *O grupách* [R51].

2.2.2 Část 2.: *Theorie svazů*

Oddíl pojednávající o teorii svazů je pojat podobně jako první část věnovaná grupám. L.S. Rieger nejprve na různých příkladech z denního života představuje pojem úplného a částečného uspořádání. Pojem svaz pak zavádí pomocí relace $\leq$ neostrého částečného uspořádání. Jako první ukazuje příklad svazu přirozených čísel s relací $x \leq y \iff x$ dělí y.

Dále Rieger dokazuje ekvivalenci tohoto zavedení s klasickou definicí svazu, tedy pomocí binárních operací spojení a průseku.[55] Axiomy svazu porovnává s axiomy grupy, čímž umožňuje čtenáři lepší vhled do dané problematiky.

V další kapitole Rieger zavádí, analogicky jako u teorie grup, základní svazové pojmy; izomorfismus, homomorfismus a izomorfní reprezentace. V závěru práce je též uveden příklad šesti vzájemně izomorfních svazů (o obecném počtu 2^{2^n} prvků).

Po těchto úvodních partiích souvisejících s definicí svazu jsou zavedeny axiomy existence jednotky, nuly, distributivity a doplňku, čímž L.S. Rieger dospívá k definici Booleovy algebry (tj. komplementárního distributivního svazu). Dále věnuje pozornost konečným Booleovým algebrám.

Dokazuje, že každá konečná Booleova algebra může být izomorfně reprezentována svazem všech podmnožin jisté (vhodné) množiny (pro nekonečné Booleovy algebry je taková reprezentace též možná, ne však svazem **všech** podmnožin vhodné množiny). V důsledku toho má každá konečná Booleova algebra 2^n prvků (pro vhodné n). Rieger poznamenává, že graficky lze konečnou Booleovu algebru znázornit jako krychli postavenou na jeden vrchol v prostoru dimenzi n (a uvádí příklad pro $n = 4$).

Jako analogii k racionálním funkcím na množině reálných čísel zavádí na Booleových algebrách booleovské funkce. Dále definuje pojem normální formy booleovské funkce a popisuje algoritmus pro její sestrojení.

Tato část práce [R34] je více zaměřena na aplikaci studovaných struktur, než tomu bylo v případě grup. Tím je též čtenáři zdůrazněn význam Booleových algeber. L.S. Rieger zde podrobně popisuje aplikace Booleovy algebry $\{0, 1\}$ v elektrotechnice, např. v reléově-kontaktních systémech (elektrický zvonek nebo telefonní centrála) či při konstrukci počítacích strojů, a výrokové logice (v této souvislosti se vlastně Booleova algebra objevila).

Na závěr je čtenář seznámen s novějšími výsledky získanými v teorii svazů; je zde nastíněna problematika modulárních a komplementárních svazů, chápání projektivní geometrie jako svazu či spojitě dimenzionální projektivní geometrie.

[55] Viz část 3.1.1.

2.2.3 Situace v oblasti učebnic teorie grup a svazů

V době, kdy L.S. Rieger dokončil svou knížku *O grupách a svazech*, existovala u nás pouze jedna knížka o grupách. Tou byl *Úvod do theorie grup* [Bor44] významného brněnského matematika Otakara Borůvky. Přestože se jedná o elementární úvod založený pouze na středoškolských znalostech, je tato práce pro začínajícího studenta matematiky dosti náročná.

Jedním důvodem je její značná abstraktnost. O. Borůvka navíc vyvíjí teorii grup z obecnější teorie grupoidů[56], jimiž se zabýval ve svých vědeckých pracích. Po zavedení potřebných pojmů týkajících se množin a zobrazení totiž do své učebnice zařadil kapitolu o grupoidech, jež obsahuje z velké části jeho vlastní výsledky. Grupy jsou pak definovány jako asociativní kvazigrupy, neboli grupoidy s jednoznačným dělením – tj. s vlastností $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\exists!\, x \in G)$ $(\exists!\, y \in G)(ax = b \textit{ et } ya = b)$, v nichž je násobení asociativní.

Teorie svazů byla na začátku padesátých let dvacátého století hojně studovanou disciplínou, přestože se tehdy rozvíjela necelých dvacet let. V československé matematice existovala pouze jediná česky psaná práce věnovaná svazům (článek [Koř49] Vladimíra Kořínka, který byl prvním českým matematikem zabývajícím se systematicky teorií svazů, viz část 3.5.1). Učebnice neexistovala žádná.

Zejména tyto okolnosti vedly L.S. Riegra k sepsání knížky [R34], chtěl umožnit mladým čtenářům seznámení s tehdejšími intenzivně studovanými a rychle se rozvíjejícími matematickými obory.

[56] Množina se nazývá *grupoid*, jestliže je na ní definována binární operace násobení.

Literatura

[Bae29] Baer, R., *Zur Topologie der Gruppen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **160** (1929), 208–226.

[Beh56] Behrend, F.A., *A contribution to the theory of magnitudes and the foundations of analysis*, Math. Z. **63** (1956), 345–362.

[Ber74] Beran, L., *Grupy a svazy*, SNTL, Praha, 1974.

[Bir42] Birkhoff, G., *Lattice ordered groups*, Ann. Math. **43** (1942), 298–331.

[Bir67] Birkhoff, G., *Lattice theory*, AMS, Providence, 1967, 1. vyd. AMS, New York, 1940; 2. vyd. AMS, New York, 1948; 3. vyd. též AMS, Providence, 1973; rusky *Teorija struktur*, Izd. inost. lit., Moskva, 1952; *Teorija rešetok*, Nauka, Moskva, 1984.

[Bor44] Borůvka, O., *Úvod do theorie grup*, KČSN, Praha, 1944.

[Bou52] Bourbaki, N., *Eléments de mathématiques*, Livre II, Chapitre VI, Act. Sci. et Ind., Hermann, Paris, 1952.

[Car39] Cartan, H., *Un theorème sur les groups ordonnés*, Bull. sci. math. astron. II **63** (1939), 201–205.

[Čech36] Čech, E., *Bodové množiny*, JČMF, Praha, 1936, 2. vyd. Academia, Praha, 1966; 3. vyd. Academia, Praha, 1974.

[Čech37] Čech, E., *Topologické prostory*, ČPMF **66** (1937), D225–D264.

[Čech59] Čech, E., *Topologické prostory*, ČSAV, Praha, 1959.

[Čer88] Černák, Š., *Completion and Cantor extension of cyclically ordered groups*, Proc. Univ. Alg. Symp., 1988, pp. 13–22.

[Čer89] Černák, Š., *Cantor extension of an abelian cyclically ordered group*, Math. Slovaca **39** (1989), 31–41.

[Čer95] Černák, Š., *Lexicographic products of cyclically ordered groups*, Math. Slovaca **45** (1995), 29–38.

[ČJ87] Černák, Š. a Jakubík, J., *Completion of a cyclically ordered group*, CMJ **37(1)** (1987), 157–174.

[DGM95] Droste, M., Giraudet, M., a Macpherson, D., *Periodic ordered permutation groups and cyclic orderings*, J. of Combinatorial Theory **B 63(2)** (1995), 310–321.

[Dla68] Dlab, V., *On a family of simple ordered groups*, J. Austral. Math. Soc. **8** (1968), 591–608.

[Fuch63] Fuchs, L., *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Budapest, 1963, rusky *Častično uporjadočennye algebraičeskie sistemy*, Mir, Moskva, 1965; německy *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966; Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966.

[GH02] Giraudet, M. a Holland, W.C., *Ohkuma structures*, J. on the Theory of Ordered Sets and its Applications **19(3)** (2002), 223–237.

[Gla81] Glass, A.M.W., *Ordered permutation groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[Gla99] Glass, A.M.W., *Partially ordered groups*, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1999.

[Glu93] Gluschankof, D., *Cyclic ordered groups and MV-algebras*, CMJ **43(2)** (1993), 249–263.

[Gra68] Graham, G.P., *Full orders and their families of convex subgroups on locally nilpotent groups*, J. Algebra **8** (1968), 257–261.

[Hah07] Hahn, H., *Über nichtarchimedische Grössensysteme*, Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. Wien, Abt. IIa **116** (1907), 601–655.

[Har88] Harminc, M., *Sequential convergences on cyclically ordered groups*, Math. Slovaca **38** (1988), 249–253.

[Höl01] Hölder, O., *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. **53** (1901), 1–64.

[Cheh52] Chehata, C.G., *An algebraically simple ordered group*, Proc. London Math. Soc. **2** (1952), 183–197.

[Iwa48] Iwasawa, K., *On linearly ordered groups*, J. Math. Soc. Jap. **1** (1948), 1–9.

[Jak89] Jakubík, J., *Retracts of abelian cyclically ordered groups*, Archivum mathematicum **25** (1989), 13–18.

[Jak90] Jakubík, J., *Cyclically ordered groups with unique addition*, CMJ **40(3)** (1990), 534–538.

[Jak91] Jakubík, J., *Completions and closures of cyclically ordered groups*, CMJ **41(1)** (1991), 160–169.

[Jak94] Jakubík, J., *On extended cyclic orders*, CMJ **44** (1994), 661–675.

[Jak98] Jakubík, J., *Lexicographical product decompositions of cyclically ordered groups*, CMJ **48(2)** (1998), 229–241.

[Jak02] Jakubík, J., *On half cyclically ordered groups*, CMJ **52(2)** (2002), 275–294.

[JP88a] Jakubík, J. a Pringerová, G., *Radical classes of cyclically ordered groups*, Math. Slovaca **38** (1988), 255–268.

[JP88b] Jakubík, J. a Pringerová, G., *Representations of cyclically ordered groups*, ČPM **113** (1988), 197–208.

[JP94] Jakubík, J. a Pringerová, G., *Direct limits of cyclically ordered groups*, CMJ **44(2)** (1994), 231–250.

[KK72] Kokorin, A.I. a Kopytov, V.M., *Linejno uporjadočennye gruppy*, Nauka, Moskva, 1972, anglicky *Fully ordered groups*, J. Wiley & Sons, New York, 1974.

[KM94] Kopytov, V.M. a Medvěděv, N.Ya., *The theory of lattice-ordered groups*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 1994.

[KM96] Kopytov, V.M. a Medvěděv, N.Ya., *Pravouprjadočennye gruppy*, Naučnaja kniga, Novosibirsk, 1996, anglicky *Right ordered groups*, Plenum Publishing Corp., New York, 1996.

[Kop84] Kopytov, V.M., *Rešetočno uporjadočennye gruppy*, Nauka, Moskva, 1984.

[Koř49] Kořínek, V., *Svazy, v nichž obecně platí věta Jordan-Hölderova*, Rozpravy II. třídy České akademie **59(23)** (1949), 1–32.

[Mal'48] Mal'cev, A.I., *O vključenij gruppovych algeber v algebry s dělenijem*, Doklady Akad. Nauk SSSR **60** (1948), 1499–1501.

[Mal'49] Mal'cev, A.I., *Ob uporjadočennych gruppach*, Izd. AN SSSR, ser. matem. **13** (1949), 473–482.

[Men67] Menegazzo, F., *Ordini cyclici nei gruppi abeliani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **38** (1967), 217–237.

[MR77] Mura, R.B. a Rhemtulla, A.H., *Orderable groups*, Marcel Dekker, New York, Basel, 1977.

[MS96] Macpherson D. a Steinhorn C., *On variants of o-minimality*, Annals of Pure and Applied Logic **79(2)** (1996), 165–209.

[Neu49] Neumann, B.H., *On ordered groups*, American Math. J. **71** (1949), 1–18.

[NN83] Novák, V. a Novotný, M., *Dimension theory for cyclically and cocyclically ordered sets*, CMJ **33** (1983), 647–653.

[NN85] Novák, V. a Novotný, M., *Universal cyclically ordered sets*, CMJ **35** (1985), 158–161.

[NN89] Novák, V. a Novotný, M., *On representation of cyclically ordered sets*, CMJ **39** (1989), 127–132.

[Nov82] Novák, V., *Cyclically ordered sets*, CMJ **32** (1982), 460–473.

[Nov84] Novák, V., *Cuts in cyclically ordered sets*, CMJ **34** (1984), 322–333.

[Ohn52] Ohniski, M., *Linear order on a group*, Osaka J. Math. **2** (1952), 17–18.

[Pod57] Podderjugin, V.D., *Uslovija uporjadočivaemosti gruppy*, Izd. AN SSSR, ser. matem. **21** (1957), 199–208.

[Pon38] Pontrjagin, L.S., *Nepreryvnye gruppy*, ONTI, Moskva, 1938, 2. vyd. Gos. izd. tekhniko-teoret. lit., Moskva, 1954; 3. vyd. Nauka, Moskva, 1973; 4. vyd. Nauka, Moskva, 1984, 1988; anglicky *Topological groups*, 1. vyd. Princeton University Press, Princeton, 1939; Princeton University Press, London, 1946; 2. vyd. Gordon & Breach, New York, 1966; německy *Topologische Gruppen*, Leipzich, Teubner, 1957–1958.

[Rach02] Rachůnek, J., *Prime spectra of non-commutative generalizations of MV--algebras*, Algebra Universalis **48(2)** (2002), 151–169.

[Rib63] Ribenboim, P., *Théorie des groupes ordonnés*, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, 1963.

[Rol93] Roll, J.B., *Locally partially ordered groups*, CMJ **43(3)** (1993), 467–481.

[Świ59a] Świerczkowski, S., *On cyclically ordered groups*, Fund. Math. **47** (1959), 161–166.

[Świ59b] Świerczkowski, S., *On cyclically ordered intervals of integers*, Fundam. Math. **47** (1959), 167–172.

[Šim47] Šimbireva, E.P., *K teorii častično uporjadočennych grup*, Matematičeskij Sbornik **20** (1947), 145–178.

[Tar01] Tararin, V.M., *On automorphism groups of cyclically ordered sets*, Siberian Math. J. **42(1)** (2001), 190–204.

[Vin67] Vinogradov, A.A., *Uporjadočennye algebraičeskie sistemy*, Itogi Nauki, Ser. Mat., Algebra, Topologija, Geometrija 1965 (1967), 83–131.

[Vin70] Vinogradov, A.A., *Ordered algebraic systems*, American Mathematical Society Translations, Ser. 2 **96** (1970), 69–118.

[Zab82] Zabarina, A.I., *K teorii cikličeski uporjadočennych grupp*, Matem. zametki (1982), 3–12.

[Zab85] Zabarina, A.I., *O linejnom i cikličeskom porjadkach v gruppe*, Sibir. matem. žurn. **26** (1985), 204–207.

[Zas37] Zassenhaus, H., *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Teubner, Berlin-Leipzig, 1937, anglicky *The theory of groups*, 1. vyd. Chelsea Publishing Company, New York, 1949; 2. vyd. Chelsea Publishing Company, New York, 1958.

[ZP84] Zabarina, A.I. a Pestov, G.G., *K teoreme Sverčkovskogo*, Sibir. matem. žurn. **25** (1984), 46–53.

[Žel76] Želeva, S.D., *O cikličeski uporjadočennych gruppach*, Sibir. matem. žurn. **17** (1976), 1046–1051.

[Žel81a] Želeva, S.D., *Cikličeski i T-godno uporjadočennye gruppy*, Godiš. VUZ, prilož. matem. **17** (1981), 137–149.

[Žel81b] Želeva, S.D., *O poluodnoradno cikličeski uporjadočennych gruppach*, Godiš. VUZ, prilož. matem. **17** (1981), 123–136.