Pavel Trojovský

Kořeny a vývoj pojmu konvergentní číselná řada

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Člověk-umění-matematika. Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 166–177.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400568

LEONHARD EULER

(1707 – 1783)

KOŘENY A VÝVOJ POJMU

KONVERGENTNÍ ČÍSELNÁ ŘADA

PAVEL TROJOVSKÝ

Z hlediska studia historie číselných řad jsou zajímavé například tyto úlohy z *Rhindova papyru* (viz [8], str. 21), který byl sepsán matematikem Ahmesem asi 1650 př. n. l. z pramenů patrně o 200 až 400 let starších:

- V 64. úloze se řeší rozdělení 10 měr obilí mezi 10 osob, má-li rozdíl osoby každé k osobě druhé činit na obilí postupně 1/8 míry.
  Pozoruhodné je, že Ahmes dává návod, který ukazuje, že egyptští počtáři znali vzorec pro součet n po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti.
- V 79. úloze je řeč o žebříku, jehož stupně jsou 7, 49, 343, 2401, 16807, a vedle čísel stojí slova: obraz, kočka, myš, ječmen, míra.
  Což znamená v naší řeči: Je 7 osob, každá má 7 koček, každá kočka sežere 7 myší, každá myš 7 klasů a z každého klasu může vyrůst 7 měřic ječmene. Jaký je celkový součet?
  Jde tedy o úkol nalézt součet $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 19\,607$.
  Z této úlohy vidíme, že se Egypťané zabývali již i úlohami na nalezení součtu konečné geometrické řady: $a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$.

Ve starém Řecku se v souvislosti s číselnými řadami objevují aporie, zdánlivě nepřekonatelné logické potíže, sloužící jako „důkazy“ správnosti učení eleatské školy, která odsuzovala dialektiku. Formuloval je ZÉNÓN (asi 490 – 430 př. n. l.) a patří mezi ně například tato (viz [6], str. 96):

Dichotomie. „Pohyb neexistuje, protože to, co se pohybuje, musí dojít do středu dříve než do konce.“

Jinak řečeno, pohybuje-li se objekt z bodu A do bodu B, pak musí projít nejprve bodem C, který dělí úsečku AB na polovinu, pak bodem D, který je středem úsečky BC atd.

Zénón ve své úvaze předpokládal, že úsečka je vždy větší než bod, zrnko písku, které má konečné minimální rozměry (odmítal nekonečnou dělitelnost látky). Podstata aporie je v Zénónově přesvědčení, že součet nekonečného počtu úseček musí být nekonečný. Můžeme se tedy snad právem domnívat, že se Zénón svými aporiemi staví i proti konečným součtům nekonečných geometrických řad, získaným svými vrstevníky. Vycházíme-li totiž z toho, že prostor i čas jsou neomezeně dělitelné, pak k žádné aporii nedojdeme, neboť pohybující se bod proběhne úsečku AB za $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ časových jednotek, což při použití vzorce pro součet nekonečné geometrické řady dá skutečně 1.

V EUKLEIDOVĚ díle *Základy* (4. – 3. stol. př. n. l.) (viz [2], str. 123) se VIII. kniha zabývá „spojitými proporcemi“, čili geometrickou posloupností, a 35. věta z IX. knihy řeší součet konečné geometrické řady.

Eukleides to v naší algebraické řeči řešil takto: Nechť jsou A_{n+1}, A_n, A_{n-1}, ..., A_1 členy takové řady. Pak platí:

$$A_{n+1} : A_n = A_n : A_{n-1} = \cdots = A_2 : A_1$$

a tedy i

$$(A_{n+1} - A_n) : A_n = (A_n - A_{n-1}) : A_{n-1} = \cdots = (A_2 - A_1) : A_1 .$$

Odtud podle dříve dokázané vlastnosti proporce (viz 12. věta ze VII. knihy) plyne:

$$(A_{n+1} - A_1) : (A_n + A_{n-1} + \cdots + A_1) = (A_2 - A_1) : A_1 .$$

Eukleides zde byl tedy velice blízko ke vzorci pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti (označíme-li $A_{n+1} : A_n = q$ a $A_n + A_{n-1} + \cdots + A_1 = s_n$):

$$s_n = A_1 \frac{1-q^n}{1-q} .$$

Z díla ARCHIMÉDA ze Syrakus (okolo 287 až 212 př. n. l.) jsou pro nás z hlediska řad zajímavé např. práce (více viz např. [1], str. 57):

- *Kvadratura paraboly*, v níž na základě exhaustivní metody zjistil, že obsah úseče paraboly je roven 4/3 obsahu trojúhelníka ABC, jenž je úseči vepsán. K tomuto výsledku došel na základě nalezení součtu geometrické řady:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}$$

- *O spirálách*, kde odvozuje plochu omezenou závitem spirály, k čemuž používá vzorců:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} .$$

S úlohami vedoucími na součty prvních n členů aritmetické a geometrické posloupnosti se setkáváme v Indii u ÁRJABHÁTTY I. (nar. asi 476). Ten uvádí i pravidla pro součet konečné řady dvojmocí, resp. trojmocí přirozených čísel.

V sanskrtském, ve verších – ovšem bez důkazů – psaném, *Vědeckém sborníku* jihoindického učence NÍLAKANTHY (15. až 16. st.), napsaném v letech 1501 – 1502 (viz [3], str. 170), nalézáme několik nekonečných číselných řad sloužících pro výpočet π. Byly získány z obecné mocninné řady pro délku oblouku kružnice o poloměru r a středovém úhlu φ (jde tedy v podstatě o rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$ v mocninnou řadu):

$$r\varphi = \frac{r \sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{r \sin^3\varphi}{3\cos^3\varphi} + \frac{r \sin^5\varphi}{5\cos^5\varphi} - \cdots ,$$

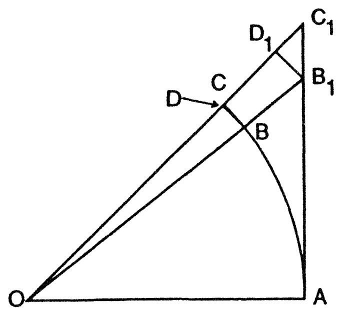
k níž dodal dokonce i omezení $\sin\varphi < \cos\varphi$ (dopustil se jen drobné nepřesnosti, správně mělo být $\sin\varphi \leqq \cos\varphi$). Zřejmě si tedy uvědomoval její konvergenci pro $0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$ a divergenci pro $0 < \varphi \leqq \pi/2$.

Volbou $r = 1$ a $\varphi = \pi/4$ obdržel pak právě řadu:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + K_n \,,$$

kde K_n je opravný člen, který již pro malá n podstatně zlepšuje aproximaci.

Jak odvodil původní mocninnou řadu ve *Vědeckém sborníku* uvedeno není, ale o způsobu jejího odvození jsme snad alespoň částečně informováni anonymní prací *Vysvětlující komentář*, která byla ovšem sepsána až v první polovině 17. století. Zde nalézáme odvození, které můžeme v dnešní symbolice reprodukovat takto:



BC představuje velmi malý oblouk kružnice o poloměru 1; BD a B_1D_1 jsou úsečky kolmé k OC.

Na základě podobnosti trojúhelníků:
- $\triangle OBD$ a $\triangle OB_1D_1$ platí $|BD| : |B_1D_1| = 1 : |OB_1|$
- $\triangle B_1C_1D_1$ a $\triangle OC_1A$ platí $|B_1D_1| : |B_1C_1| = 1 : |OC_1|$

Odkud po dosazení za $|B_1D_1|$, vyjádřeného z druhého vztahu, do první rovnice získáme

$$|BD| = \frac{|B_1C_1|}{|OB_1| \,.\, |OC_1|}$$

a po přibližném nahrazení úsečky BD obloukem BC a úsečky OC_1 úsečkou OB_1 dostáváme

$$|\widehat{BC}| = \frac{|B_1C_1|}{1 + |AB_1|^2} \,.$$

Úhel $\varphi = \sphericalangle AOC_1$ rozdělíme na n stejných (velmi malých) dílů a na základě posledního odvozeného vztahu pak vyjádříme délku oblouku AC jako součet příslušných malých obloučků (uvažujeme limitní případ)

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t/n}{1 + (kt/n)^2} \,.$$

Následně na základě opakovaného použití identity (pro $b < c$)

$$\frac{b}{c} = 1 - \frac{c-b}{b} \cdot \frac{b}{c} \,,$$

získáme řadu

$$\frac{b}{c} = 1 - \frac{c-b}{b} + \frac{(c-b)^2}{b^2} - \cdots,$$

sloužící pro rozvoj výrazu $\frac{t/n}{1+(kt/n)^2}$ (pouze položíme $b = 1$ a $c = 1 + (kt/n)^2$). Takto získáme

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{n} \left(1 - (kt/n)^2 + \cdots + (-1)^n (kt/n)^{2n-2} + \cdots\right)$$

a díky znalosti, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

pak již obdržíme hledanou řadu.

Kromě této pomalu konvergující řady pro výpočet π jsou zde uvedeny i jiné řady, které dávají při stejném počtu členů značně přesnější aproximace – například

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1^5 + 4.1} - \frac{1}{3^5 + 4.3} + \frac{1}{5^5 + 4.5} - \cdots\right).$$

Hodnota π je ve *Vědeckém sborníku* vyjádřena zlomkem 104348/33215, tedy, omezíme-li se na 11 míst, získáme 3,1415926539, které má deset správných desetinných míst.

RICHARD SWINESHEAD (14. století) se zabýval rovnoměrně zrychleným pohybem. V souvislosti s tím řeší tuto úlohu: Uvažuje pohyb, při němž v časových intervalech délky $1/2$, $1/2^2$, $1/2^3$, ... (tedy ve tvaru geometrické posloupnosti) se postupně rychlosti mění podle aritmetické posloupnosti 1, 2, 3, ... Činí závěr, že střední rychlost je 2. Jde tedy o řadu

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 3 + \cdots = 2\,.$$

Swinesheadův slovní důkaz můžeme reprodukovat následovně (vychází ze znalosti součtu geometrické řady):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots &= 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} + \cdots &= \frac{1}{4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Po vertikálním sečtení těchto řad dostaneme ihned hledanou řadu

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 3 + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2\,.$$

NICOLE ORESME (1323 – 1382) ve 3. dílu traktátu *O konfiguraci kvalit* (viz [3], str. 396) rozebírá různé příklady pohybů; objevuje se zde např. řada

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{7}{4}\,.$$

Při sčítání této řady Oresme vychází z toho, že liché členy tvoří geometrickou řadu $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$, jejíž součet je 1, a každý sudý člen vzniká z předchozího lichého členu vynásobením číslem $\frac{3}{4}$ (neboli *lichý* : *sudému*= 4 : 3), tedy součet této řady je $1+\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{7}{4}$.

Oresme uvádí též slovně tuto obecnou geometrickou řadu:

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}+\cdots=a\,,$$

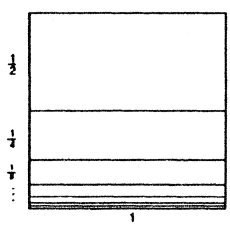
kterou vyvozuje ze vztahu

$$\frac{a}{k}\left[1+\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1}\right]+a\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}=a$$

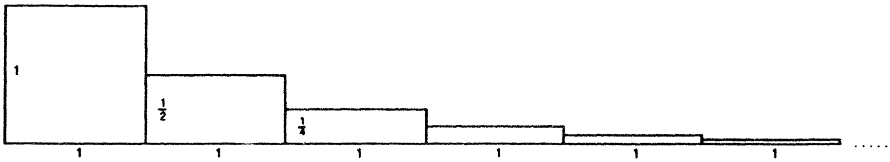
na základě toho, že pro $n\to\infty$ se stane $a\,(1-1/k)^n$ nulovým.

Objevenou řadu komentuje takto: Jestliže odstraníme z 1 stopy její $\frac{1}{1000}$, ze zbytku pak opět odebereme její $\frac{1}{1000}$ atd., pak takto odebereme postupně úplně celou stopu.

Oresme znázorňuje uvažované řady i geometricky, čímž dostává obrazce s nekonečným obvodem a konečným obsahem. Například v případě řady $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ bere dva jednotkové čtverce, z nichž jeden dělí vodorovnými úsečkami na obdélníky o základně $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, … :



Ze čtverce i obdélníků vzniklých výše popsaným dělením vytváří následující útvar s nekonečným obvodem:



Oresme, snad skutečně jako první, dokázal v díle *Questiones super Geometrian Euclidis* divergenci **harmonické řady**. Zabývá se zde mimo jiné těmito úlohami:

(1) Přičítáme-li k veličině a postupně její zmenšující se části a/n, a/n^2, $a/n^3, \ldots$ (kde $n > 1$), pak jejich součet nebude nikdy nekonečný. Oresme si tedy pravděpodobně uvědomoval, že geometrická řada je konvergentní jen v případě, že příslušná geometrická posloupnost je klesající (uvažoval pouze posloupnosti s kladnými členy).

(2) Přičítání nekonečného množství neomezeně ubývajících částí nějaké veličiny k samotné této veličině může dát i nekonečně velký součet, což dokládá Oresme následujícím příkladem:

Hodina se dělí na nekonečné množství úměrných částí a během každého z těchto časových úseků se k úsečce o délce jedné stopy postupně přidávají $\frac{1}{2}$ stopy, $\frac{1}{3}$ stopy, $\frac{1}{4}$ stopy atd. Součet $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$ pak bude nekonečný, neboť součet $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ je větší než $\frac{1}{2}$, součet částí od $\frac{1}{5}$ do $\frac{1}{8}$ je také větší než $\frac{1}{2}$, součet částí od $\frac{1}{9}$ do $\frac{1}{16}$ je také větší než $\frac{1}{2}$ atd.

V roce 1593 ve *Varia Responsa* F. VIÈTA (1540 – 1603) uvádí obecný vzorec pro součet nekonečné geometrické řady (viz [5], str. 437). Z Eukleidových *Základů* převzal vzorec:

$$\frac{s_n - A_n}{s_n - A_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

a ukázal, že pro $A_1/A_2 > 1$ a n blížící se nekonečnu se A_n blíží k 0 a pro součet platí:

$$s = \frac{A_1^2}{A_1 - A_2}$$

V díle *Opus Geometricum* (1647) GREGORY SAINT VINCENT (1584 – 1667) ukázal jako první, že Zénónova aporie „Achilles a želva“ může být odstraněna na základě sečtení nekonečné geometrické řady.

V roce 1660 lord W. BROUNCKER (1620 – 1684) počítal plochu omezenou rovnoosou hyperbolou $xy = 1$, její asymptotou a přímkami $x = 1$ a $x = 2$, čímž došel k řadě (viz [9], str. 227):

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots \left(= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \right)$$

Brouncker ukázal, že platí: polovina prvního členu je větší než součet dvou následujících členů, polovina vzniklého součtu je větší než součet dalších čtyř členů atd., tedy:

$$\frac{1}{1.2}+\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}\right)+\left(\frac{1}{7.8}+\frac{1}{9.10}+\frac{1}{11.12}+\frac{1}{13.14}\right)+\cdots<$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}\right)+\cdots$$

neboli, po opětovném použití již zmíněné vlastnosti, obdržíme

$$\frac{1}{1.2}+\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}\right)+\left(\frac{1}{7.8}+\frac{1}{9.10}+\frac{1}{11.12}+\frac{1}{13.14}\right)+\cdots<$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

Takto dokazuje, že součet původní řady je menší než součet geometrické řady, která má součet 1. Tedy je uvažovaná řada konvergentní.

V roce 1668 vydal JAMES GREGORY (1638 – 1675) spis *Vera Circuli et Hyperbolae Quadrature*, kde dospěl k řadě pro podíl logaritmů. Užívá zde termínů řada konvergentní či divergentní, aniž by je přesně vymezil. V roce 1670 James Gregory napsal do dopisu Newtonovi o nalezení řady pro $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

O objevení této řady napsal stať v roce 1682 i G. W. LEIBNIZ (1646 – 1716).

JAKOB BERNOULLI (1654 – 1705) v letech 1689 – 1704 napsal pět prací o řadách, které však byly publikovány až v roce 1713 jako dodatek díla *Ars Conjectandi*. Jak on, tak jeho bratr JOHANN (1667 – 1748), dokázali velmi zručně manipulovat s řadami, podařilo se jim tak nalézt součty velkého množství různých řad. Ukažme si například, jak určili součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots.$$

Vyšli z harmonické řady

$$A=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots,$$

$$B=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=A-1.$$

Nyní odečetli řadu B od A, tedy $A-(A-1)$, čímž získali řadu

$$C=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=1$$

Řada C je však právě požadovaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, a tedy má součet 1. Získaný výsledek je správný, ač byl odvozen nekorektním způsobem, neboť byla k výpočtu užívána divergentní řada!

Johann provedl též důkaz divergence harmonické řady:
Vertikálním sečtením řad

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots &= 1\\
\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots &= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\
\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots &= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\\
\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots &= \frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\\
&\dots
\end{aligned}$$

získal

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots .$$

Při označení $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ pak říká, že by muselo platit $s=s+1$, což není pro konečné s možné, a tedy řada diverguje.

Jakob Bernoulli také jako první užil pro důkaz divergence řady $1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}+\cdots$ *srovnávací kritérium*, neboť na základě toho, že každý člen této řady je větší než odpovídající člen harmonické řady, udělal závěr, že musí mít nekonečný součet.

V roce 1703 mnich GUIDO GRANDI v díle *Kvadratura kruhu a hyperboly* (viz [5], str. 445) obdržel dosazením $x=1$ do řady

$$1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1+x},$$

řadu $\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\cdots$, což považoval za matematický důkaz toho, že svět byl stvořen z ničeho! Tato řada vedla ke vzniku polemiky, jíž se přímo účastnila řada významných matematiků, na jejímž základě se postupně poznávalo, že je nutno rozlišovat řady konvergentní a divergentní. Leibniz podává toto zdůvodnění výsledku publikované v roce 1712 v *Acta Eruditorum* (viz [5], str. 446): „sudý člen je 0, lichý je 1 a tak to jde až do nekonečna, tedy součtem řady je průměrná hodnota $(0+1)/2=1/2$“. S tímto jeho řešením souhlasili například Jakob, Johann a DANIEL (1700 – 1782) Bernoulliové, J. L. LAGRANGE (1736 – 1813), L. EULER (1707 – 1783) a další. Proti Leibnizovu řešení se staví především PIERE DE VARIGNON (1654 – 1722) a MIKULÁŠ I. BERNOULLI (1687 – 1759).

V roce 1713 pak Mikuláš I. Bernoulli v dopise Leibnizovi používá termínu *divergentní řada*, aniž by ho přesně definoval. V odpovědi na tento dopis Leibniz použil termín „advergentní“ řada, který vysvětluje následovně: „je to taková řada, kterou lze do té míry prodlužovat, že se bude její součet stále lišit od jistého konečného reálného čísla jen o veličinu, která je menší než libovolně zadané číslo". Tímto způsobem tedy Leibniz definoval termín „advergentní (sbíhavá) řada" a její součet, který pak v roce 1821 formuloval A. L. CAUCHY (1789 – 1857) na základě limity. Později se však začal užívat místo termínu „advergentní" ve stejném významu termín „konvergentní", podle Gregoryho, který ho již v roce 1677 používal.

V roce 1714 podává Leibniz v dopise Johannu Bernoullimu i obecnou podmínku pro konvergenci alternující řady. Zmínil se o této podmínce však již 26. 6. 1705 v dopise JAKUBU HERMANNOVI (1678 – 1733). Toto kritérium dnes nazýváme právě *Leibnizovo kritérium.*

Od roku 1730 se zabýval řadami i L. Euler. Ve sporu okolo řady $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ souhlasil s Leibnizem, neboť Euler byl přesvědčen o obecné platnosti matematických vzorců, a tedy soudil, že nekonečná řada je rovna algebraickému výrazu, z něhož byla vyvozena – např.

$$\frac{1}{3} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots \text{ , neboť je získána z řady}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x} \text{ dosazením } x = -2 \text{ ,}$$

či

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots \text{ dosazením } x = -1 \text{ do řady}$$

$$\frac{1-x}{(1+x)^2} = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + \cdots \text{ ,}$$

nebo

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots \text{ , neboť je získána z řady}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x} \text{ dosazením } x = 2 \text{ .}$$

Z posledních dvou výsledků pouze činil závěr, že ∞ hraje roli podobnou jako 0.

Díky přenosu vlastností z polynomů na řady (přistupoval k nim jako k „polynomům nekonečného stupně") získal např. řadu

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots .$$

Tyto způsoby zacházení s řadami mu vyčítá Mikuláš I. Bernoulli např. v dopise z roku 1743, což patrně vedlo Eulera k tomu, že v roce 1745 v dopise CH. GOLDBACHOVI (1690 – 1764) říká, že řada $1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + \cdots$ sice nemá součet, ale že má *hodnotu*, určenou algebraickým výrazem, ze kterého pochází.

Euler při studiu harmonických řad objevil v letech 1734 – 1735 nutnou podmínku pro „konvergenci" řady kladných členů $\lim_{n\to\infty}(s_{k^n} - s_n) = 0$, kde k je libovolně pevně zvolené přirozené číslo větší než jedna a s_n n-tý částečný součet řady.

V roce 1742 C. MACLAURIN (1698 – 1746) v díle *Treatise of Fluxions* formuloval *integrální kritérium* pro konvergenci řady s nezápornými členy geometrickým způsobem (Cauchy podal později toto kritérium analytickým způsobem): srovnával obsah plochy, omezené grafem funkce $f(x)$ a její asymptotou, s obsahem stupňovitého vepsaného a opsaného obrazce, odpovídajícího součtu členů řady $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$. Toto kritérium pak použil Maclaurin pro důkaz divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ a k důkazu konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k = \zeta(k)$ pro $k > 1$.

V roce 1768 J. D' ALEMBERT (1717 – 1783) v *Encyklopedii* uvedl kritérium pro konvergenci řady kladných členů, dnes po něm nazývané *d' Alembertovo podílové kritérium.*

EDWARD WARING (1734 – 1798) v *Meditationes analytical* (1776) (viz [5], str. 465), podává limitní tvar d' Alembertova kritéria, které je dnes většinou připisováno Cauchymu.

Pozornost si zaslouží i výsledek Goldbachův. Zjistil, že členy posloupnosti $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ můžeme doplnit znaménky $+,-$ tak, že součtem vzniklé řady může být naprosto libovolné reálné číslo (napsal o tom v dopise Eulerovi v roce 1742). Jeho výsledek souvisí tedy s větou B. RIEMANNA (1826 – 1866) z roku 1853 o možnosti přerovnat členy neabsolutně konvergující řady tak, že má libovolný součet (či dokonce diverguje).

Významná je stať K. F. GAUSSE (1777 – 1855) *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots,$$

ve které se poprvé skutečně zkoumá, pro které hodnoty α, β, γ a x je řada konvergentní či divergentní.

Na něho navázal A. L. Cauchy, který již důsledně rozlišoval řady na „konvergentní" a „divergentní" a ukázal, že se součet nekonečné řady nesmí ve výpočtech používat tak bezprostředně jako součet řady konečné.

Ve stati o řadě

$$1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \cdots,$$

pak N. H. ABEL (1802 – 1829) ve shodě s Cauchym píše (viz [9], str. 262): „Divergentní řada se nikdy nerovná určité veličině, jest jenom jakýsi výraz jistých vlastností, kterými se naznačují výkony, jimž je řada podrobena. Divergentních řad lze upotřebiti jako znaků, aby se některé věty stručněji vyjádřily, ale nikdy se nesmějí dosazovat místo určitých hodnot. Jestliže se tak činí, dá se dokázati všechno, věci možné i nemožné".

L. DIRICHLET (1805 – 1859) důrazně rozlišuje řady na *absolutně* a *neabsolutně konvergentní*. Zdůrazňuje, že máme u řady dvě možnosti:

lze udat konečné číslo, které je větší než součet libovolného počtu členů; pak je řada „konvergentní" a má součet, který nezávisí na tom, jak jsou členy uspořádány.

nelze toto číslo udat; řada může být „konvergentní“ při jistém přerovnání členů a „divergentní“ při jiném, např.:

a) Řada
$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$
je konvergentní a bude konvergentní i řada
$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots,$$
která vznikla jejím přerovnáním.

b) Řada
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$
je konvergentní, ale řada
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$
vzniklá přerovnáním je naopak divergentní.

LITERATURA:

[1] Edwards C. H., *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.
[2] Eukleides, *Základy*, Jednota českých matematiků, Praha, 1907.
[3] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia Praha, 1978.
[4] ———, *Chrestomatija po istorii matematiki, Matematičeskij analiz*, „Prosveščenie“ Moskva, 1977.
[5] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, 1972.
[6] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia Praha, 1969.
[7] Konforovič A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN Praha, 1989.
[8] Úlehla J., *Dějiny matematiky I.*, „Dědictví Komenského“, Praha, 1900.
[9] ———, *Dějiny matematiky II.*, „Dědictví Komenského“, Praha, 1912.