

Eduard Weyr (1852-1903)

Jaroslav Fuka

Poznámky o Weyrových pracích z analýzy

In: Jindřich Bečvář (editor): Eduard Weyr (1852-1903). (Czech). Praha: Prometheus, 1995.
pp. 129–142.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400555>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

POZNÁMKY O WEYROVÝCH PRACÍCH Z ANALÝZY

A. Eliptické funkce, nekonečné řady a součiny

Jaroslav Fuka

Eduard Weyr se v některých svých pracích zabýval analýzou. Jeho práce [W25], [W33], [W60], [W61], [W67], [W70], [W71], [W73], [W74] lze rozdělit tematicky do dvou skupin:

- I. Práce [W70] a [W73] o vyčíslení nekonečných řad a součinů, jejichž obecný člen je racionální funkcí indexu.
- II. Ostatní práce, jež se týkají eliptických funkcí.

Obecně je zajímavé toto: Všechny práce, až na [W25], [W33], [W70] a [W73], obsahují prakticky jen jiné důkazy výsledků Ch. Hermitea. To nikterak nezmenšuje jejich cenu. Z vlastního podnětu vznikla zřejmě práce [W25], jež je metodického charakteru a v níž si podle mého názoru prof. Weyr chtěl sám ujasnit, zda lze exaktně odvodit vlastnosti základních eliptických funkcí Jacobiho pomocí eliptického integrálu 1. druhu. Práce [W33] je jen českým překladem německé práce [W25]. Poté je pauza zhruba 12 let, po které se vrací k eliptickým funkcím (zdá se, že to bylo téma Weyrovi velmi blízké) již na vyšší úrovni a tu těží vždy z podnětů z prací Ch. Hermitea, jež zřejmě pečlivě studoval. V podstatě jediný samostatný problém, který si sám položil a brilantně řešil, je v práci [W73].

Přistupme nyní k popisu Weyrových prací.

I. V práci [W70] Eduard Weyr podrobně dokazuje Appellovu poznámku z práce v *Comptes Rendus* LXXXVI, že součet nekonečné řady, jejíž n -tý člen a_n je racionální funkcí indexu n , lze vyjádřit pomocí derivací funkce $\log \Gamma(x)$ a v jistých případech pak pomocí elementárních funkcí, totiž logaritmů a goniometrických funkcí. K důkazu tvrzení a k výpočtu se užívá Gaussova vzorce pro logaritmickou derivaci funkce Γ :

$$\frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = \Psi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\log k - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \dots - \frac{1}{z+k} \right).$$

První část Appellova tvrzení se zakládá na vzorci

$$\Psi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - \frac{1}{z+\nu} \right]$$

(autor jej odvozuje) a na rozkladu n -tého členu na částečné zlomky. Druhá část tvrzení pak ještě na důvtipné Gaussově metodě, jejímž užitím lze rozdíl $\Psi(r) - \Psi(0)$ pro racionální r vyjádřit pomocí logaritmů a goniometrických funkcí. Závěrem je vyčísleno několik zajímavých příkladů.

V práci [W73] je analogická otázka jako v článku [W70] řešena pro nekonečné součiny. Výsledek je elegantní. Aby nekonečný součin $P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$, kde u_n je racionální funkce n , konvergoval absolutně, je nutné a stačí, aby u_n byl tvaru

$$u_n = \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_2) \dots (n - \alpha_s)}{(n - \beta_1)(n - \beta_2) \dots (n - \beta_s)},$$

aby žádné z čísel α_i, β_i nebylo celé přirozené a aby platilo

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_s = \beta_1 + \dots + \beta_s.$$

V takovém případě je

$$P = \frac{\Gamma(1 - \beta_1) \dots \Gamma(1 - \beta_s)}{\Gamma(1 - \alpha_1) \dots \Gamma(1 - \alpha_s)}.$$

Dále jsou rozebrány některé (celkem zřejmé a patrně nepřilíš obecné) případy kořenů α_i, β_i , jež umožňují vyjádřit P jakožto racionální funkci α_i a β_i . V závěru je zobecněn výsledek článku Bohumila Bečky z ČPMF 5(1876), 37–38, který se týká jistého nekonečného součinu.

II. Budeme hovořit o práci [W33], ta je českou podobou práce [W25].

V této práci si Eduard Weyr klade za úkol odvodit přesně základní vlastnosti Jacobiho eliptických funkcí $\sin \operatorname{am}(u, k)$,

$$\cos \operatorname{am} u \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} u}, \quad \Delta \operatorname{am} u \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u},$$

vycházejí z definice $\sin \operatorname{am}(u, k)$ jakožto funkce inverzní k (mnohoznačné) analytické funkci dané eliptickým integrálem

$$u = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \quad z = \sin \operatorname{am}(u, k).$$

Předpokládá se, že element (mnohoznačné) analytické funkce

$$\Delta(z) = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$$

v okolí počátku nabývá v počátku $z = 0$ hodnoty $\Delta(0) = 1$ a že je $0 < k < 1$. Popíšeme jeho výsledky v dnešních termínech a sice jen pro funkci $\sin \operatorname{am} u$. Je přirozené, že ostatní dva případy jsou trochu složitější.

Weyr, jak bylo v tehdejší době zvykem, užívá mlčky věty o monodromii a uvědomuje si, že integrál po různých cestách z 0 do bodu z je stejný, právě když jsou cesty homotopické. Nachází pak (v dnešní terminologii) vhodné reprezentanty generátorů homotopické grupy otevřené množiny $G = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{-\frac{1}{k}, -1, 1, \frac{1}{k}\}$ (v autorově terminologii elementární cesty) a vypočte hodnoty integrálu podél těchto cest. Ukažme Weyrův způsob myšlení, je to zajímavé,

na příkladu první elementární cesty a výpočtu příslušné hodnoty u integrálu po ní, fakticky limitního přechodu. Cituji ([W33], str. 41):

... proměnná z projde z počátku 0 kladnou osu x až těsně k bodu 1, nápotom opíše velmi malý kruh, jehož střed jest bod 1 a konečně se přímo vrátí do počátku 0 [Weyrova definice první elementární cesty]. Na první části této cesty nabývá integrál u hodnoty K ; kruhový integrál jest nekonečně malý (je-li kruh totiž nekonečně malý); proměnná z dorazivši do osy x nastupuje opět přímou dráhu, na níž však $\Delta(z)$ nabývá záporných hodnot (vytvořených okroužením bodu rozvětvení 1), pročež z 1 do 0 vzatý integrál u opět hodnoty K nabývá. Jest tedy $2K$ hodnota integrálu u vzatého podél první cesty elementární [Weyrův výpočet integrálu].

Analogicky jsou popsány další tři elementární cesty (okružující zbývající body rozvětvení) a výpočet integrálů po nich.

Tak dostane téměř bezprostředně pro možné hodnoty integrálu $u(z)$ základní vzorec

$$u(z) = \mu 2K + \nu 2iK' + (-1)^\mu u_0, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z},$$

kde

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z)}, \quad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\Delta(z)}$$

a $u_0 = u_0(z)$ je integrál po úsečce spojující 0 s bodem z . Jednoduchou úvahou pak zjistí, že všechny hodnoty integrálu $\int_0^z \frac{dz}{\Delta(z)}$ jsou

$$m4K + n2iK' + u_0$$

nebo

$$m4K + n2iK' + 2K - u_0.$$

Odtud je vidět, že $\sin am u$ je dvoiperiodická s periodami $4K$ a $2iK'$, že platí

$$\sin am(2K - u) = \sin am u$$

a snadno již zjistí, že kořeny rovnice $\sin am v = \sin am u$ pro dané u jsou tvaru:

$$v = \mu 2K + \nu 2iK' + (-1)^\mu u, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}.$$

Specielně získá kořeny (pro $u = 0$) a póly (pro $u = iK'$) funkce $\sin am u$. Analogické výsledky dostává Weyr pro zbývající dvě Jacobiho funkce.

Autor splnil svůj úkol v rámci tehdejšího pojetí přesnosti (viz výše uvedený citát o konstrukci cesty a integrace po ní). Fakt, že jím nalezené cesty jsou vskutku generátory homotopické grupy G pokládá za názorně očividný a nedokazuje jej. Práce je zajímavá z metodického hlediska. Nové výsledky nedosahuje, snad, v rámci tehdejšího pojetí přesnosti je na výši, bohužel však nemám porovnání s jinými pracemi z té doby.

V článku [W60] prof. Weyr nejprve podává zcela elementární důkaz (na několik řádků) rovnosti dvou nekonečných součinů (podaný dříve Hermitem)

$$\prod \left(1 - \frac{2x}{m\pi} \right) e^{\frac{2x}{m\pi}} \quad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

a

$$\left(1 + \frac{2x}{\pi} \right) \prod \left[1 - \frac{2x}{(2n-1)\pi} \right] e^{\frac{2x}{n\pi}} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Každý z nich má hodnotu $\cos x$.

Dále činí tuto poznámku: nekonečný součet

$$(1) \quad \frac{1}{\cos x} = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)}{x^2 - (2\nu-1)^2 \frac{\pi^2}{4}},$$

který se odvodí ze známého rozvoje

$$(2) \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{x^2 - \nu^2 \pi^2},$$

píšeme-li zde $x + \frac{\pi}{2}$ místo x , nekonverguje absolutně, ač součet (2) absolutně konverguje. Tento nepříjemný jev odstraňuje autor vtipně tak, že v (1) přičte a odečte 1, přičemž jednou napíše

$$-1 = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu-1}$$

dle známého Leibnizova vzorce

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Sečtením dvou součtů dostane pro $\frac{1}{\cos x}$ řadu, konvergující absolutně a dokonce rychleji, než konverguje řada (2). Závěrem poznamenává, že tento výsledek lze odvodit užitím Cauchyovy metody rozkladu meromorfní funkce na částečné zlomky pro lichou funkci $\frac{1}{x \cos x}$.

V Jacobiho formuli

$$\int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx = x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$$

stanovil Hermite (*Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce*, Comptes Rendus XCIV, p. 901) hodnotu integrálu v případě, kdy se integruje po úsečce od

0 do K a za druhé po úsečce od K do $K + iK'$, kde K a K' jsou úplné eliptické integrály (viz výše). V práci [W67] Eduard Weyr dokazuje tyto výsledky novou metodou. Výpočet je netriviální.

V práci [W71] je dokázána proslulá Hermiteova formule, která dává rozklad eliptické funkce $F(x)$ o periodách $2K$ a $2iK'$ s póly v bodech a, b, \dots, l uvnitř rovnoběžníku period ve tvaru

$$F(x) = C + A \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B \frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \dots + L \frac{H'(x-l)}{H(x-l)} + \\ + \frac{d}{dx} \left[A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B' \frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \dots + L' \frac{H'(x-l)}{H(x-l)} \right] + \\ + \frac{d^2}{dx^2} \left[A'' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B'' \frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \dots + L'' \frac{H'(x-l)}{H(x-l)} \right] + \dots$$

(tj. existuje pevná funkce eliptická H – je to Jacobiho funkce H , tj. „velké eta“ – a konstanty $A, B, \dots, L, \dots, A^{(n)}, B^{(n)}, \dots, L^{(n)}$, že platí vzorec – konstanty závisejí ovšem na F).

Z ní odvodil Ch. Hermite novou formuli, v níž se funkce $\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}, \dots$ nahradí funkcemi

$$\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}, \dots$$

a přibude člen tvaru

$$-(A' + B' + \dots + L')k^2 \operatorname{sn}^2 x$$

za $\frac{d}{dx}[\dots]$, a podobně

$$-(A'' + B'' + \dots + L'') \frac{d}{dx} k^2 \operatorname{sn}^2 x$$

za $\frac{d^2}{dx^2}[\dots]$, atd.

Přesněji:

$$F(x) = C + \sum a_i \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a_i} + \\ + \sum a'_i \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a'_i \operatorname{cn} a'_i \operatorname{dn} a'_i}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a'_i} - \sum a'_i k^2 \operatorname{sn}^2 x + \\ + \sum a''_i \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a''_i \operatorname{cn} a''_i \operatorname{dn} a''_i}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a''_i} - \sum a''_i \frac{d}{dx} k^2 \operatorname{sn}^2 x + \dots$$

Tento vzorec odvozuje Eduard Weyr tak, že pomocí obecné eliptické funkce $f(x)$ o periodách ω, ω' a dvojnásobném pólu v bodě s v rovnoběžníku period

a jejich derivací sestrojí vhodnou lineární kombinaci, která má tytéž póly jako daná dvojperiodická funkce $F(x)$. Jejich rozdíl je pak dle Liouvilleovy věty konstantní. Vhodnou volbou ω , ω' , f pak Weyr dostane druhý Hermiteův výsledek.

V práci [W74] je novým způsobem dokázána analogie rozkladu racionální funkce na částečné zlomky pro racionální funkce v $\sin x$ a $\cos x$ a dále pro dvojperiodické (tj. eliptické) funkce prvního a druhého druhu, které mají v rovnoběžníku period jediný pól. V této stati jsou podány komentáře k těmto rozkladům. Bohužel je těžko rozhodnout, co jsou výsledky Weyrovy a co výsledky jiných autorů. Práce těsně souvisí s prací [W71].

Závěrem je možno říci toto: Weyrovy práce v oblasti eliptických funkcí a výpočtu nekonečných řad a součinů jsou velmi solidní úrovně. Nejlepší jsou dle mého názoru [W67], [W71] a [W74]. Bohužel jsem neměl čas podrobněji projít literaturu (řada prací citovaných ani u nás v knihovně není). Ale bylo by to zajímavé a stálo by to za podrobnější rozbor. Zdá se, že nejbližší byly Eduardu Weyrovi otázky konstrukce eliptických funkcí z jednoduchých elementů, jež jsou v podstatě algebraického charakteru.

B. Další práce z analýzy

Josef Daneš

Práce [W22], *Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung*, je rozdělena do pěti částí:

- I. Allgemeine Betrachtungen.
- II. Differentialgleichungen mit separablen Veränderlichen.
- III. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.
- IV. Integration gewisser Differentialgleichungen erster Ordnung.
- V. Ueber die Differentialgleichungen von der Form $dy + (Ly^2 + My + N)dx = 0$.

I. V první části se Weyr zabývá diferenciální rovnicí prvního řádu

$$(DR) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) .$$

Nechť $y = F(x, C)$ je obecný integrál (obecné řešení) rovnice (DR). Nechť C_1, C_2, \dots, C_n jsou libovolné konstanty a $y_k = F(x, C_k)$ integrály (řešení) rovnice (DR). Weyr si klade otázku, jaký musí mít rovnice (DR) tvar, tj. jaká musí být pravá strana f , aby pro libovolných n řešení rovnice (DR) platil vztah

$$\mu(y_1, \dots, y_n) = const ,$$

kde μ je vhodná funkce. Označíme-li $\mu_k = \frac{\partial \mu}{\partial y_k}$, potom musí platit

$$\mu_1 f(x, y_1) + \dots + \mu_n f(x, y_n) = 0$$

pro libovolná x, y_1, \dots, y_n . Považujme y_2, \dots, y_n za konstanty a položme

$$-\frac{\mu_k}{\mu_1} = \Phi_{k-1}(y_1), \quad \varphi_{k-1}(x) = f(x, y_k), \quad k = 2, \dots, n.$$

Potom

$$f(x, y_1) = \varphi_1(x)\Phi_1(y_1) + \dots + \varphi_{n-1}(x)\Phi_{n-1}(y_1).$$

Odtud plyne, že rovnice (DR) musí mít tvar

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x)\Phi_1(y) + \dots + \varphi_{n-1}(x)\Phi_{n-1}(y).$$

Uvedený tvar je nutný, ale není postačující pro to, aby rovnice (DR) měla požadované vlastnosti.

II. Výše provedené úvahy dávají pro $n = 2$ následující výsledek. Jestliže pro libovolná řešení y_1, y_2 rovnice (DR) platí vztah $\mu(y_1, y_2) = \text{const}$, potom (DR) musí mít tvar $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\Phi(y)$, tj. jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. V tomto případě tvar pravé strany je i postačující pro to, aby rovnice (DR) měla požadované vlastnosti. Zbytek je věnován aplikacím na teorii rozvinutelných ploch, šroubovitých ploch a teorii homogenních rovnic 1. řádu.

III. Pro $n = 3$ rovnice (DR) musí mít tvar

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x)\Phi_1(y) + \varphi_2(x)\Phi_2(y).$$

Provedeme-li substituci $y = f_1(\eta)$, $x = f_2(\xi)$, potom transformovaná rovnice (DR) má stejné vlastnosti jako rovnice původní, tj. pro libovolná tři řešení této rovnice platí $\nu(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \text{const}$. Funkce f_1 a f_2 volme tak, aby platilo $\frac{dy}{\Phi_2(y)} = d\eta$, $\varphi_2(x) dx = d\xi$. Položme $\frac{\Phi_1(\eta)}{\Phi_2(\eta)} = \varphi(\eta)$, $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \psi(x)$. Potom rovnice (DR) bude mít tvar

$$(DR') \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 1 + \psi(\xi)\varphi(\eta).$$

Z dalších úvah vyplývá, že rovnice (DR') musí mít tvar

$$(T_1) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 1 + \psi(\xi)(ae^{k\eta} + b)$$

nebo tvar

$$(T_2) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 1 + \psi(\xi)(a\eta + b).$$

Substitucí $e^{-k\eta} = \zeta$ lze rovnici (T_1) převést na rovnici (T_2) . Prvním výsledkem tohoto paragrafu je tedy tvrzení, že rovnici (DR) lze převést na rovnici tvaru

(T_2) , což je rovnice lineární. Dalším výsledkem je toto tvrzení: platí-li pro každá tři řešení rovnice (DR) vztah tvaru $\mu(y_1, y_2, y_3) = const$, potom vhodnou substitucí (tvaru $\eta = f(y)$) lze rovnici (DR) převést na rovnici tvaru (T_2) a pro libovolná tři řešení této rovnice platí vztah

$$(P) \quad \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = const .$$

Obecný tvar rovnice (DR) je tedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(y)}{Y'(y)}\varphi(x) + \frac{1}{Y'(y)}\psi(y)$$

a pro libovolná tři řešení rovnice (DR) platí

$$\frac{Y(y_2) - Y(y_1)}{Y(y_3) - Y(y_1)} = const .$$

Obráceně platí, že jakmile pro každá tři řešení diferenciální rovnice prvního řádu platí vztah (P), potom rovnice je nutně lineární.

IV. V této části se Weyr zabývá vztahy typu $\mu(y_1, y_2, x) = 0$ mezi dvěma řešeními y_1, y_2 rovnice (DR) a aplikacemi na lineární i nelineární diferenciální rovnice prvního řádu.

V. Další část je věnována rovnici typu $dy + (Ly^2 + My + N)dx = 0$ a obsahuje zřejmě nejhodnotnější Weyrův výsledek z teorie diferenciálních rovnic, který říká, že dvojpoměr každých čtyř řešení takové rovnice je konstantní, tj.

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \cdot \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = const .$$

Poznamenejme, že uvedená rovnice v sobě zahrnuje Riccatiovu rovnici. Tento výsledek zmiňuje např. Otakar Borůvka v článku *Diferenciální rovnice v rámci dějin matematiky*, Matematické obzory 11(1977), 1-10, s tím, že je bezprostředním důsledkem Eulerova tvrzení o tom, že znalost jednoho partikulárního integrálu Riccatiovu rovnice umožňuje transformaci rovnice na lineární tvar.

K článku [W23], *Několik poznámek vztahujících se k řadám arithmetickým a rekurentním*, poznamenejme následující:

Diferenční posloupností (diferenční posloupnost 1. stupně) posloupnosti

$$(P) \quad u_0, u_1, \dots, u_k, \dots$$

je posloupnost $Du_0, Du_1, \dots, Du_k, \dots$, kde $Du_k = u_{k+1} - u_k$. Indukcí lze definovat diferenční posloupnost n -tého stupně ($D^n u_k$ je diferenční posloupností posloupnosti $D^{n-1} u_k$). Posloupnost (P) se nazývá aritmetickou posloupností (n -tého stupně), je-li její diferenční posloupnost n -tého stupně konstantní a nenulová. Řada $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ se nazývá rekurentní, jestliže pro nějaké

přirozené m , nějaká čísla $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ a všechna dostatečně velká n platí rovnost $\alpha_0 a_{n-m} + \alpha_1 a_{n-m+2} + \dots + \alpha_m a_n = 0$. Hlavním cílem této Weyrovy poznámky je najít všechny rekurentní řady, jejichž koeficienty tvoří aritmetickou posloupnost (libovolného stupně). Po odvození několika (známých) jednoduchých tvrzení (*pravd*) Weyr nakonec dokazuje následující větu: Rekurentní řada $\sum a_k x^k$, jejíž koeficienty tvoří aritmetickou posloupnost n -tého stupně, je McLaurinův rozvoj racionální lomené funkce

$$\frac{a_0(1-x)^n + Da_0x(1-x)^{n-1} + D^2a_0x^2(1-x)^{n-2} + \dots + D^n a_0 x^n}{(1-x)^{n+1}}.$$

V této práci Eduard Weyr nerozlišuje mezi řadou a posloupností čísel tak, jak je to obvyklé dnes; pro oba pojmy užívá termín *řada*.

Článek [W24] z roku 1876, *O vyvinutí odmocnin druhého stupně v řetězce*, je věnován dvěma vzorcům

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{\ddots}}}$$

a

$$\sqrt{a^2 - b} = a - \frac{b}{2a - \frac{b}{2a - \frac{b}{\ddots}}}$$

(vpravo jsou řetězové zlomky), které jsou uváděny v knihách o algebraické analýze (zhruba řečeno o formálním kalkulu), např. s obory platnosti $a, b > 0$ pro první vzorec a $a, b > 0$, $2a \geq b + 1$ pro druhý vzorec. Weyrův bratr Emil podal v Abh. der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften roku 1869 geometrický důkaz druhého vzorce za předpokladu $a^2 > b$ místo $2a \geq b + 1$. V tomto článku Eduard Weyr dokazuje oba vzorce analytickými prostředky (jiný analytický důkaz podal Schlömilch v Zt. für Math. und Phys. 17).

Označme u_k částečné zlomky řetězového zlomku

$$\frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{\ddots}}}$$

tj. $u_1 = \frac{b}{2a}$, $u_2 = \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}$, $u_3 = \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}}$, Weyrův trik spočívá

v substituci $u_n = \frac{\alpha v_n + \beta}{v_n + 1}$, kde α a β jsou voleny tak, aby pro vhodné λ

platilo $v_n = \lambda v_{n-1}$. Jednoduchou úvahou lze dospět k volbě $\alpha = -a + \sqrt{a^2 + b}$, $\beta = -a - \sqrt{a^2 + b}$, takže

$$\lambda = -\frac{b + \beta^2}{b + \alpha^2} = \frac{a - \sqrt{a^2 + b}}{a + \sqrt{a^2 + b}}.$$

Odtud je vidět, že $|v_n| \rightarrow \infty$, takže $u_n \rightarrow \alpha = -a + \sqrt{a^2 + b}$ a odtud snadno plyne první vzorec. Druhý vzorec se dokazuje obdobně ($v_n \rightarrow 0$).

Tento článek vyšel také německy ve Zprávách o zasedání Královské české společnosti nauk v roce 1877 pod názvem *Über die Kettenbruchentwicklung der Wurzelgrößen zweiten Grades* (viz [W26]).

Z úvodu článku *O integrování racionálních diferenciálů* (viz [W41]) vyjímáme:

Je známo, kterak se integruje $\varphi(x) dx$, značí-li $\varphi(x)$ funkci racionálnou. Integrál takový se obecně skládá z části transcendentní (logarithmů neb funkcí cyklometrických) a z části algebraické (opět racionálné funkce). Hermite ukázal ve svém výtečném „Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique“, že lze onu algebraickou část vždy vyčísliti, aniž by bylo třeba znáti kořenové faktory jmenovatele ve výrazu $\varphi(x)$; kdežto dosavadní metoda rozkladu na částečné zlomky předpokládala, že jsou ony faktory známy. Stanovení transcendentní části integrálu arci nelze ve tvaru zakončeném provésti, pokud ony faktory neznáme. Oddělení I. této kratičké práce podává onu metodu Hermite-ovu, v odd. II. pak ukazují, kterak lze stanoviti integrál obecného racionálního diferenciálu pomocí posloupné redukce, jsou-li známy lineární faktory jmenovatele.

Tímto citátem je obsah práce dostatečně charakterizová, v podstatě jde o určování primitivní funkce k racionální funkci.

Weyrova práce *Deux remarques relatives aux séries* s podtitulem *Extrait d'une lettre adresée à F. Gomes Teixeira* (viz [W59]) vyšla v časopise *Journal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* roku 1887.

Uvažujme konvergentní řadu s kladnými členy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a necht' $q \in (0, 1)$. Pro každé m existuje ρ_m tak, že

$$q \sum_{k=m}^{m+\rho_m} a_k > \sum_{k=m+\rho_m+1}^{\infty} a_k.$$

Z této úvahy se odvozuje, že není možné sestavit řadu, která by splňovala podmínky formulované v Gutzmerově článku *Sur une série par Mr. Lerch* (tentýž časopis i ročník, str. 36).

Necht' nyní $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní komplexní řada taková, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty.$$

Weyr ukazuje, že lze zvolit rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left| \sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1} a_k \right| < \infty \quad (m_0 = 1) .$$

V článku *O jisté nespojité funkci*, který vyšel roku 1893 v Rozpravách akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění (viz [W75]) Weyr konstruuje reálnou funkci $\varphi(x)$ reálné proměnné, která je spojitá v každém iracionálním bodě x , zprava spojitá a zleva nespojitá v každém racionálním bodě x . Takové funkce byly již v té době známy (např. Dini nebo Cantor takové funkce sestrojili jako součty nekonečných řad). Weyrova funkce je zajímavá tím, že hodnoty $\varphi(x)$ a $\varphi(x-) - \varphi(x)$ lze explicitně vyjádřit pomocí elementárních funkcí (znakem $\varphi(x-)$ zde označujeme limitu funkce φ v bodě x zleva, Weyr užívá označení $\varphi(x-0)$). Funkce $\varphi(x)$ je definována předpisem

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + \left\{ -\frac{n}{x} \right\}} \right), \quad x \neq 0,$$

$\varphi(0) = 0$; funkce $\varphi(x)$ je lichá. Eduard Weyr řadu pro $\varphi(x)$ píše ve tvaru

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + n_0} \right)$$

a praví, že n_0 značí nejmenší kladný zbytek čísla $-n \pmod{x}$ přičemž tuto definici aritmeticky upřesňuje. Uvedená řada konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném omezeném intervalu neobsahujícím 0. Pro racionální $x = \frac{p}{q} > 0$ s $p, q > 0$ nesoudělnými je potom vzorec pro skok funkce φ dán vztahem

$$\varphi(x-) - \varphi(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(kq+1)},$$

který lze vyjádřit jako algebraický výraz v log, cotg a cos. Při odvozování vlastností funkce φ Eduard Weyr využívá vlastnosti Γ -funkce a funkce $\Psi(x) = \Gamma'(x+1)$.

V úvodu článku *Důkaz o transcendentci čísla e*, který vyšel roku 1894 v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky (viz [W77]) Eduard Weyr píše:

Důkaz o transcendentci čísla e podal nejprve Hermite v krásném pojednání „Sur la fonction exponentielle“, Comptes rendus 1873; pan David Hilbert předložil r. 1893 Gottinkské Společnosti nauk (Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π) zjednodušený důkaz, zároveň s důkazem o transcendentci čísla π , zjednodušiv takto též úvahy p. F. Lindemanna, jenž první dokázal, že irracionalita π není algebraická (Mathem. Annalen t. XX.). Pan A. Hurwitz konečně poukázal k tomu (Göttinger Nachr. 1893 a Comptes Rendus 1893, 17 avril),

že lze důkaz páně Hilbertův v příčině čísla e upravit takovým způsobem, by se zakládal jen na elementárních částech počtu diferenciálního, a mohl být pojat i do počátečních výkladů o počtu infinitesimalném. Důkaz takto zjednodušený jest tento: ... ([W77], str. 27)

Dále následuje důkaz, který je nyní běžně znám (pro polynom stupně r se položí $F(x) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(r)}(x)$, připomene se vzorec $(e^{-x} F(x))' = -e^{-x} f(x)$, na funkci $e^{-x} F(x)$ se použije věta o střední hodnotě atd.)

Celkově o Weyrovi lze (v souvislosti s probíranými pracemi z oblasti analýzy) snad říci toto:

1. Byl zdatným počtářem - zdá se mi, že v jeho pracích právě počítání silně převládá.
2. Měl slušný přehled o matematické literatuře své doby.
3. Byl v kontaktu (alespoň) s některými známými matematiky (viz např. výňatky ze dvou Hermiteových dopisů Weyrovi *Sur la fonction Eulérienne*, ČPMF 23(1894), 65-66, *Sur une intégrale définie*, tamtéž, 273-274, nebo výňatky z Weyrových dopisů Hermiteovi a Teixeiraovi).
4. Věnoval se „osvětové“ činnosti — publikoval řadu článků metodologického charakteru a článků, ve kterých českou veřejnost informoval o nových výsledcích v matematice (jak praví např. F. J. Studnička v ČPMF 21(1892) na str. 121, jedním z hlavních úkolů tohoto časopisu je *vyplňovati literární mezery v oboru matematiky a fysiky u nás se jevíci*).
5. Weyr se těšil obdivu a vážnosti u svých současníků (měl vysoké společenské postavení a zároveň byl nadprůměrným českým matematikem — nejsem schopen odlišit, do jaké míry obdiv byl upřímný).
6. Mám slabost pro češtinu minulého století a nebylo by asi bez zajímavosti trochu rozebrat češtinu matematických textů druhé poloviny 19. století a začátku 20. století. Vůbec se mi zdá, že tehdejší odborné texty měly dost blízko k literárnímu jazyku (skoro až k poezii).

SBORNÍK
JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ
V PRAZE.

Číslo V.

ED. WEYRA

POČET DIFFERENCIÁLNÝ.



V PRAZE.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

DR. JAN VILÉM PEXIDER:

PANA DVORNÍHO RADY
PROF. EDUARDA WEYRA

POČET DIFFERENTIÁLNÝ.

- VĚDECKÁ ÚVAHA KRITICKÁ. -

Men should be, what they seem;
Or those that be not, would they might seem none.

Shakespeare.

TISKEM EMANUELA STIVÍNA V PRAZE. — NÁKLADEM VLASTNÍM.

1902.