$b \in P$, $a \neq b$ vždycky je $J(a, b) \neq \emptyset$. Pak všecky množiny $J(a, b)$ jsou nekonečné.

5·5. Nechť K je množina všech komplexních čísel $x + iy$ takových, že $x^2 + y^2 = 1$. Nechť $Im(x + iy)$ znamená y. Když $\alpha \in K$, $\beta \in K$, $\gamma \in K$, pak nechť $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{C}$ znamená, že $\beta \neq \gamma$ a že $Im \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta} > 0$. Pak $\mathbf{C}$ je cyklické uspořádání množiny K.

KAPITOLA II.

Obecné metrické prostory.

§ 6. Vzdálenost.

6·1. Nechť P je daná množina. Nechť ϱ je konečná funkce v oboru $P \times P$ taková, že

[1] $\varrho(x, x) = 0$; $x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) > 0$;

[2] $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;

[3] $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z)$.

Pak pravíme, že ϱ je *metrika* v P. Množina P se nazývá *metrický prostor* (*metrischer Raum, espace métrique* neboli *espace distancié, metric space*), když byla určitým způsobem zvolena metrika ϱ v P; prvky metrického prostoru se nazývají zpravidla *body* (*Punkt, point, point*); jsou-li a, b dva body, pak jejich *vzdáleností* (*Entfernung, distance, distance*) rozumíme číslo $\varrho(a, b)$.

Metrický prostor P s metrikou ϱ označíme někdy určitěji (P, ϱ), zejména při srovnávání dvou různých metrik v témž P. Písmena P a ϱ budou v celé knize obyčejně znamenati metrický prostor a jeho metriku.

Množina $\mathbf{E}_1$ všech reálných čísel je metrický prostor, definujeme-li $\varrho(x, y) = |x - y|$. V dalším všude, kde není opak výslovně uveden, $\mathbf{E}_1$ znamená metrický prostor s právě zvolenou metrikou.

Obecněji označíme $\mathbf{E}_m$ a nazveme *m-rozměrným euklidovským prostorem* množinu $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_1$ (s m faktory), ve které zvolíme metriku ϱ tak, že pro $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ položíme

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}. \text{ *)}$$

Je zřejmé, že sestrojená funkce ϱ má vlastnosti [1] a [2]. Vlastnost

*) Když a je nezáporné reálné číslo, pak znamená $\sqrt{a}$ stále to *nezáporné* číslo b, pro které platí $b^2 = a$.

[3] dokážeme takto. Pro $1 \leqq i < k \leqq m$ jest $(x_i y_k - x_k y_i)^2 \geqq 0$, tedy $2 x_i y_i x_k y_k \leqq x_i^2 y_k^2 + x_k^2 y_i^2$, tedy

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^{m} x_i y_i x_k y_k \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^{m} (x_i^2 y_k^2 + x_k^2 y_i^2) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} y_i^2,$$

tedy

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right| \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}. \tag{1}$$

Ježto

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{m} x_i y_i,$$

podle (1) je

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)^2 \leqq \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}\right]^2,$$

tedy

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)^2} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}. \tag{2}$$

Píšeme-li sem $x_i - y_i$ místo x_i a $y_i - z_i$ místo y_i, dostaneme $\varrho(x, z) \leqq \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Jiný důležitý příklad metrického prostoru je *Hilbertův prostor*, který budeme značiti H. Je to množina všech takových posloupností $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ $(x_i \in \mathsf{E}_1)$, pro které konverguje řada $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$, při čemž metrika ϱ je dána vzorcem

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}. \tag{3}$$

Je-li $x \in \mathsf{H}$, $y \in \mathsf{H}$, konvergují řady $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$, takže podle formule (2) (ve které místo y_i píšeme $-y_i$) konverguje i řada napravo ve (3). Vlastnosti [1] a [2] funkce ϱ jsou zase zřejmé. Z (2) vychází:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}.$$

Píšeme-li sem $x_i - y_i$ místo x_i a $y_i - z_i$ místo y_i, dostaneme $\varrho(x, z) \leqq \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Poznámka. Nechť a, b, c jsou tři body metrického prostoru P. Pak existují body α, β, γ prostoru E_2 takové, že

$$\varrho(a, b) = \varrho(\alpha, \beta),\ \varrho(a, c) = \varrho(\alpha, \gamma),\ \varrho(b, c) = \varrho(\beta, \gamma).$$

(Při tom znamená ϱ nalevo metriku v P a napravo metriku v $\mathbf{E}_2$.)

Důkaz. Pro stručnost pišme $\varrho(a, b) = r$, $\varrho(a, c) = s$, $\varrho(b, c) = t$, takže čísla $r + s + t$, $r + s - t$, $r - s + t$, $-r + s + t$ jsou $\geqq 0$. Snadno se přesvědčíme, že body

$$\alpha = (\tfrac{1}{2}r, 0),\ \beta = (-\tfrac{1}{2}r, 0),$$

$$\gamma = \left(\frac{t^2 - s^2}{2r}, \frac{\sqrt{(r + s + t)(-r + s + t)(r - s + t)(r + s - t)}}{2r}\right)$$

mají žádanou vlastnost.

6·2. Nechť P_1 a P_2 jsou dva dané metrické prostory; nechť ϱ_1 a ϱ_2 jsou jejich metriky. Definujme funkci ϱ_{12} v oboru $(P_1 \times P_2) \times (P_1 \times P_2)$ takto: když $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, nechť

$$\varrho_{12}(x, y) = \sqrt{[\varrho_1(x_1, y_1)]^2 + [\varrho_2(x_2, y_2)]^2}.$$

Z vlastností [1] a [2] funkcí ϱ_1 a ϱ_2 plynou stejné vlastnosti funkce ϱ_{12}. Dokažme, že funkce ϱ_{12} má také vlastnost [3]. Nechť $z = (z_1, z_2)$. Podle poznámky na konci odst. **6·1** existují reálná čísla $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ taková, že

$$\varrho_1(x_1, y_1) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},\ \varrho_1(x_1, z_1) = \sqrt{(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2},$$
$$\varrho_1(y_1, z_1) = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}$$

a reálná čísla $a_3, a_4, b_3, b_4, c_3, c_4$ taková, že

$$\varrho_2(x_2, y_2) = \sqrt{(b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2},\ \varrho_2(x_2, z_2) = \sqrt{(c_3 - a_3)^2 + (c_4 - a_4)^2},$$
$$\varrho_2(y_2, z_2) = \sqrt{(c_3 - b_3)^2 + (c_4 - b_4)^2}.$$

Tedy

$$\varrho_{12}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(b_i - a_i)^2},\ \varrho_{12}(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(c_i - a_i)^2},$$
$$\varrho_{12}(y, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(c_i - b_i)^2}.$$

Ježto metrika v $\mathbf{E}_4$ má vlastnost [3], jest $\varrho_{12}(x, y) + \varrho_{12}(y, z) \geqq \varrho_{12}(x, z)$.

Jsou-li P_1 a P_2 dané metrické prostory s metrikami ϱ_1 a ϱ_2, pak rozumíme v dalším stále jejich *kartézským součinem* $P_1 \times P_2$ množinu $P_1 \times P_2$ s výše definovanou metrikou ϱ_{12}.

Poznámka. Nechť $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ Podle *poznámky* na konci odst. **2·1** je pro nás $\mathbf{E}_m \times \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_{m+n}$. To je v souladu se snadno patrným faktem, že metrika odvozená pro $\mathbf{E}_m \times \mathbf{E}_n$ z obyčejných metrik v $\mathbf{E}_m$ a v $\mathbf{E}_n$ souhlasí s obyčejnou metrikou prostoru $\mathbf{E}_{m+n}$.

6·3. Nechť P je metrický prostor s metrikou ϱ. Nechť $M \subset P$. Parciální funkce (v. **2·4**) $\varrho_{M \times M}$ je zřejmě metrikou v M. Tedy můžeme každou podmnožinu M metrického prostoru P považovati za metrický prostor. Říkáme, že M je *bodová množina* (*Punktmenge, ensemble de points, point set*) *vnořená* (*eingebettet, immergé, immerged*) do prostoru P. Tedy bodová množina je metrický prostor M, který je podmnožinou metrického prostoru P, při čemž metrika v M je parciální funkcí metriky v P.

6·4. Nechť P a Q jsou dané metrické prostory; nechť ϱ_1 a ϱ_2 jsou jejich metriky. Nechť f je zobrazení prostoru P na prostor Q. Pravíme, že f je *isometrické zobrazení*, když

$$x \in P,\ y \in P \Rightarrow \varrho_2[f(x), f(y)] = \varrho_1(x, y).$$

Ježto metriky ϱ_1 a ϱ_2 mají vlastnost [1], zřejmě f je *prosté* zobrazení. Zřejmě inversní zobrazení f_{-1} je isometrické zobrazení prostoru Q na prostor P.

Pravíme, že prostory P a Q jsou *isometrické*, když existuje isometrické zobrazení P na Q (nebo Q na P).

Metrická vlastnost metrického prostoru P je taková, která zůstane zachována, když P nahradíme libovolným isometrickým prostorem, u které tedy nezáleží na tom, jak „vypadají" body prostoru P, nýbrž pouze na tom, jaké jsou jejich vzájemné vzdálenosti. *Budeme vyšetřovati pouze metrické vlastnosti metrických prostorů.*

6·5. Nechť P je metrický prostor (s metrikou ϱ). Nechť $A \subset P$, $B \subset P$. Nechť M je množina všech reálných čísel $\varrho(x, y)$, kde $x \in A$, $y \in B$. Číslo $\inf M$ (v. **4·10**) označíme $\varrho(A, B)$ a nazveme je *dolní vzdáleností* bodových množin A a B. Číslo $\sup M$ (v. **4·10**) označíme $d(A, B)$ a nazveme je *horní vzdáleností* bodových množin A a B.*) Zřejmě

$$\varrho(A, B) = \varrho(B, A),\quad d(A, B) = d(B, A).$$

Je-li $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$, je $\varrho(A, B) = \infty$, $d(A, B) = -\infty$. Je-li $A \neq \emptyset \neq B$, pak $\varrho(A, B)$ je nezáporné reálné číslo, kdežto $d(A, B)$ je buďto nezáporné reálné číslo nebo je $= \infty$. Zřejmě pro $a \in P$, $b \in P$ je

$$\varrho[(a), (b)] = d[(a), (b)] = \varrho(a, b).$$

Když je $A = (a)$ jednobodová množina, píšeme

$$\varrho(a, B) = \varrho(B, a) = \varrho[(a), B],$$
$$d(a, B) = d(B, a) = d[(a), B]$$

a nazýváme $\varrho(a, B)$ *dolní vzdáleností***) (a $d(a, B)$ *horní vzdáleností*) bodu a od bodové množiny B.

Když $A \subset P$, klademe $d(A) = 0$ v případě $A = \emptyset$ a $d(A) = d(A, A)$ v případě $A \neq \emptyset$. Číslo $d(A)$ se nazývá *průměr* (*Durchmesser, diamètre, diameter*) bodové množiny A. Pravíme, že bodová množina A je *omezená*, když $d(A) < \infty$, *neomezená*, když $d(A) = \infty$. V případě $P = \mathbf{E}_1$ souhlasí tato definice s definicí udanou ve **4·10**.

---

*) Dolní vzdálenost je mnohem důležitější než horní a nazývá se proto často prostě *vzdálenost*.

**) Nebo prostě *vzdálenosti* (v. předešlou pozn. pod čarou).

Cvičení.

6·1. Nechť P je daná množina. Nechť ϱ je konečná funkce v oboru $P \times P$ taková, že: [1] $x = y \Leftrightarrow \varrho(x, y) = 0$, [2] $\varrho(x, y) + \varrho(z, y) \geqq \varrho(x, z)$. Pak ϱ je metrika v P.

6·2. Tvrzení ve cvičení *6·1* je nesprávné, když místo $\varrho(z, y)$ píšeme $\varrho(y, z)$.

Ve cvičeních *6·3* a *6·4* C je množina všech komplexních čísel.

6·3. Nechť $C_m = C \times C \times \ldots \times C$ (s m faktory). Když $x \in C_m$, $y \in C_m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, nechť $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} | x_i - y_i |^2}$. Pak ϱ je metrika v C_m a při této metrice C_m je isometrický s euklidovským E_{2m}.

6·4. Nechť H' je množina všech posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, ($x_i \in C$) takových, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2$ konverguje. Když $x \in \mathsf{H}'$, $y \in \mathsf{H}'$, $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$, nechť $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^2}$. Pak ϱ je metrika v H' a při této metrice H' je isometrický s Hilbertovým H.

6·5. Nechť P je množina všech *omezených* posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($x_i \in \mathsf{E}_1$). Když $x \in P$, $y \in P$, $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$, nechť $\varrho(x, y) = \sup | x_i - y_i |$. Pak ϱ je metrika v P.

Ve cvičeních *6·6*—*6·12* jsou a a b body metrického prostoru P a A, B a C jsou neprázdné bodové množiny vnořené do P.

*6·6.** Jest $| \varrho(a, A) - \varrho(b, A) | \leqq \varrho(a, b)$.

6·7. Jest $\varrho(A, B) \leqq \varrho(a, A) + \varrho(a, B)$.

6·8. Jest $d(A, C) \leqq d(A, B) + d(B, C)$.

6·9. Nemusí býti $\varrho(A, C) \leqq \varrho(A, B) + \varrho(B, C)$.

6·10. Když $d(A) < \infty$, pak ke každému bodu a existuje číslo δ ($0 < \delta < \infty$) takové, že $x \in A \Rightarrow \varrho(a, x) < \delta$.

6·11. Když existuje bod a a číslo δ ($0 < \delta < \infty$) takové, že $x \in A \Rightarrow \varrho(a,x) < \delta$, pak $d(A) < \infty$.

6·12. Jest $d(A, B) < \infty$, když a jen když obě množiny A a B jsou omezené.

6·13. Nechť P a Q jsou metrické prostory; nechť $A \subset P$, $B \subset Q$. Pak $d(A \times B) = \sqrt{[d(A)]^2 + [d(B)]^2}$.

§7. Konvergence.

7·1. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost reálných čísel a je-li x reálné číslo, tu, jak známo, $x_n \to x$ znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $p(\varepsilon)$ takový, že $n > p(\varepsilon) \Rightarrow | x_n - x | < \varepsilon$. To je zvláštní případ ($P = \mathsf{E}_1$) následující definice:

Nechť P je metrický prostor. Nechť $\{x_n\}$ je *bodová posloupnost* (*Punktfolge, suite de points, point sequence*) v P, t. j. posloupnost, jejíž členy jsou body prostoru P; nechť x je bod prostoru P. Pak $x_n \to x$ znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $p(\varepsilon)$ takový, že $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(x_n, x) < \varepsilon$. Jinak řečeno,

$$x_n \to x \Leftrightarrow \varrho(x_n, x) \to 0.$$

Místo $x_n \to x$ píšeme také $\lim x_n = x$; určitěji píšeme $x_n \to x$ pro $n \to \infty$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Pravíme, že x je *limitou* (*Grenzwert* nebo *Grenzpunkt, limite* nebo *point-limite, sequential limiting point*) posloupnosti $\{x_n\}$.

Když $x_n \to x$ a $x_n \to y$, pak $0 \leqq \varrho(x, y) \leqq \varrho(x_n, x) + \varrho(x_n, y) \to 0$, tedy $\varrho(x, y) = 0$, tedy $x = y$. Tedy posloupnost $\{x_n\}$ má v prostoru P nejvýš jednu limitu. Má-li limitu, pravíme o posloupnosti $\{x_n\}$, že je (v prostoru P) *konvergentní*; nemá-li limitu pravíme, že je (v prostoru P) *divergentní*.*)

Zřejmé jsou věty:

7·1·1. *Když existuje index p takový, že $n > p \Rightarrow x_n = x$, pak $x_n \to x$.*

7·1·2. *Když $x_n \to x$ a když posloupnost $\{y_n\}$ je vybrána* (v. **3·1**) *z $\{x_n\}$, pak také $y_n \to x$.*

7·2. Nechť P je daná množina. Nechť ϱ_1 a ϱ_2 jsou dvě metriky v P, tedy dvě konečné funkce v oboru $P \times P$ mající vlastnosti [1], [2] a [3] vyslovené na počátku odst. **6·1**. Vzhledem k metrice ϱ_1 je P metrickým prostorem, který pro jasnost označme (P, ϱ_1); vzhledem k metrice ϱ_2 je P metrickým prostorem, který označme (P, ϱ_2).

Když
$$x_n \to x \text{ v } (P, \varrho_1) \Leftrightarrow x_n \to x \text{ v } (P, \varrho_2),$$
pravíme, že metriky ϱ_1 a ϱ_2 jsou *ekvivalentní*.

Jako příklad zvolme množinu E_m. Když $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, položme
$$\varrho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} | x_i - y_i |^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
kde p je reálné číslo > 1. Pro $p = 2$ máme metriku, vzhledem k níž jsme v **6·1** E_m nazvali m-rozměrným euklidovským prostorem. Dokažme, že ϱ_p je metrikou pro každé $p > 1$.

Počněme touto *poznámkou*: Když α, a, b jsou reálná čísla, když $0 < \alpha < 1$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, pak
$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leqq \alpha a + (1 - \alpha)\, b. \tag{1}$$

Důkaz. Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ je (1) zřejmé. Nechť tedy $a > 0$, $b > 0$. Funkce $\varphi(t) = t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1$ má v intervalu $\underset{t}{\mathrm{E}}[0 < t]$ derivaci $\varphi'(t) = \alpha\left[\left(\frac{1}{t}\right)^{1-\alpha} - 1\right]$, tedy $0 < t < 1 \Rightarrow \varphi'(t) > 0$, $t > 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi'(t) < 0$; ježto $\varphi(1) = 0$, je tedy $0 < t \Rightarrow \varphi(t) \leqq 0$, takže $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) \leqq 0$, z čehož následuje (1).

*) Někteří autoři nazývají *divergentní* pouze takové posloupnosti, ze kterých nelze vybrati žádnou konvergentní posloupnost.

Nyní dokážeme, že při reálných x_i, y_i pro $p > 1$ platí t. zv. *Hölderova nerovnost*

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right| \leqq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2}$$

To stačí ovšem dokázati pro případ, že $x_i \geqq 0$, $y_i \geqq 0$ pro všecka i a že není ani $x_i = 0$ ani $y_i = 0$ pro všecka i. Pak ale (2) následuje z (1), dosadíme-li

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad a = \frac{x_k^p}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^p}, \quad b = \frac{y_k^{\frac{p}{p-1}}}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^{\frac{p}{p-1}}}$$

a sečteme-li pro $1 \leqq k \leqq m$.

Ze (2) následuje dále t. zv. *Minkowského nerovnost*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (p>1) \tag{3}$$

Zase stačí dokázati (3) za předpokladu $x_i \geqq 0$, $y_i \geqq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i > 0$. Za tohoto předpokladu pišme nejprve vzorec V_1, který vznikne ze (2), když za x_i dosadíme $(x_i + y_i)^{p-1}$, ponechávajíce y_i; na to pišme vzorec V_2, který vznikne z V_1 výměnou písmen x a y; sečteme-li V_1 a V_2, dostaneme (3).

Nyní lehko vidíme, že (při každém $p > 1$) ϱ_p je metrika v $\mathbf{E}_m$. Co není zřejmé, je pouze nerovnost $\varrho_p(x, z) \leqq \varrho_p(x, y) + \varrho_p(y, z)$; ta však plyne ze (3), píšeme-li tam $x_i - y_i$ místo x_i a $y_i - z_i$ místo y_i.

Definujeme-li relaci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm}) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ pomocí metriky ϱ_p, verifikujeme snadno, že tato relace platí tehdy a jen tehdy, když je (v obyčejném smyslu) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = x_i$ současně pro $1 \leqq i \leqq m$. Tedy všecky metriky ϱ_p jsou mezi sebou ekvivalentní.

7·3. Když $\{x_i\}_1^\infty$ je posloupnost reálných čísel taková, že $|x_i| \leqq \frac{1}{i}$ pro každé i, pak konverguje řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$, tedy $\{x_i\}$ je bod Hilbertova prostoru $\mathbf{H}$ (v. **6·1**). Označme $\mathbf{U}$ a nazveme *Urysohnovým prostorem**) množinu všech $\{x_i\}$ takových, že $|x_i| \leqq \frac{1}{i}$; metrika v $\mathbf{U}$ je ovšem podle **6·3** určena tím, že $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$.

*) Název Urysohnův prostor volím podle důležité věty, kterou dokázal Urysohn (v. **16·5**). Menger (Dimensionstheorie) nazývá $\mathbf{U}$ *Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes.*

7·3·1. *Když* $x_n = \{x_{ni}\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbf{U}$, $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbf{H}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ *tehdy a jen tehdy, když pro každý index* i *je* $\lim_{n\to\infty} x_{ni} = y_i$.**)

Důkaz. I. Nechť $x_n \to y$. K danému $\varepsilon > 0$ existuje index p takový, že $n > p \Rightarrow \varrho(y, x_n) < \varepsilon$. Avšak $\varrho(y, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (y_i - x_{ni})^2} \geqq | y_i - x_{ni} |$, tedy $n > p \Rightarrow | y_i - x_{ni} | < \varepsilon$, tedy $x_{ni} \to y_i$ pro každý index i.

II. Nechť $x_{ni} \to y_i$ pro každý index i; potom ovšem $| y_i | = \lim_{n\to\infty} | x_{ni} | \leqq \frac{1}{i}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ježto řada $\sum_1^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konverguje, existuje index q takový, že $\sum_{q+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{\varepsilon^2}{8}$. Pro $1 \leqq i \leqq q$ existuje index p_i takový, že

$$n > p_i \Rightarrow | y_i - x_{ni} | < \frac{\varepsilon}{2q}.$$

Nechť $p = \max_{1 \leqq i \leqq q} p_i$. Pak

$$1 \leqq i \leqq q,\ n > p \Rightarrow | y_i - x_{ni} | < \frac{\varepsilon}{2q},$$

tedy

$$n > p \Rightarrow \varrho(y, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} (y_i - x_{ni})^2 + \sum_{i=q+1}^{\infty} (y_i - x_{ni})^2} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{q} (y_i - x_{ni})^2 + \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{4}{i^2}} \leqq \sqrt{q\left(\frac{\varepsilon}{2q}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \varepsilon.$$

Cvičení.

7·1. Pro $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ nechť $\varrho'(x, y) = \max_{1 \leqq i \leqq m} | x_i - y_i |$, $\varrho''(x, y) = \sum_{i=1}^{m} | x_i - y_i |$. Pak ϱ' a ϱ'' jsou metriky v $\mathbf{E}_m$ ekvivalentní mezi sebou a ekvivalentní s obyčejnou metrikou v $\mathbf{E}_m$.

7·2. Nechť p je dané reálné číslo > 1. Nechť je $\mathbf{H}_p$ množina všech posloupností $\{x_i\}_1^{\infty}$ s reálnými členy takových, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p$ konverguje. Když $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$, nechť $\varrho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Pak ϱ_p je metrika v $\mathbf{H}_p$.

7·3. Nechť P a Q jsou metrické prostory s metrikami ϱ_1 a ϱ_2. Když $x_1 \in P$, $y_1 \in P$, $x_2 \in Q$, $y_2 \in Q$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, nechť $\varrho'_p(x, y) =$

**) Z poslední rovnice ovšem plyne $| y_i | \leqq \frac{1}{i}$, t. j. $y \in \mathbf{U}$.

$= \{[\varrho_1(x_1, y_1)]^p + [\varrho_2(x_2, y_2)]^p\}^{\frac{1}{p}}$ $(p \geqq 1)$, $\varrho''(x, y) = \max\limits_{i=1,2} \varrho_i(x_i, y_i)$. Pak ϱ'_p a ϱ'' jsou mezi sebou ekvivalentní metriky v $P \times Q$. (ϱ'_2 je metrika zavedená v odst. **6·2.**) Ve smyslu těchto metrik je

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \Leftrightarrow x_n \to x,\ y_n \to y.$$

*7·4.** Nechť S je množina všech posloupností $\{x_i\}_1^\infty$ s reálnými členy. Když $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$, nechť

$$\varrho'(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},\quad \varrho''(x, y) = \inf\left[\frac{1}{n} + \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i - y_i|\right].$$

Pak ϱ' a ϱ'' jsou dvě ekvivalentní metriky v S. Když $x_n = \{x_{n,i}\}_{i=1}^\infty$, pak ve smyslu těchto metrik je $x_n \to x$ tehdy a jen tehdy, když (v obyčejném smyslu) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = x_i$ současně pro všecka i.

§8. Uzávěr bodové množiny. Otevřené a uzavřené množiny.

8·1. Nechť P je daný metrický prostor. Nechť $A \subset P$. Nechť

$$\overline{A} = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in P,\ \varrho(x, A) = 0].$$

Množina $\overline{A}$ se nazývá *uzávěr* nebo *uzavřený obal* (*Abschliessung* nebo *abgeschlossene Hülle*, *fermeture*, *closure*) bodové množiny A, určitěji uzávěr množiny A v prostoru P. Důvod tohoto označení bude brzo zřejmý (v. odst. **8·4**).

Zřejmé jsou formule

$$\overline{\emptyset} = \emptyset, \tag{1}$$

$$A \subset \overline{A}. \tag{2}$$

Dále platí, že

$$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}. \tag{3}$$

Důkaz. Ježto $A \subset B$, zřejmě $\varrho(x, A) \geqq \varrho(x, B)$ pro každý bod x. Tedy $x \in \overline{A} \Rightarrow \varrho(x, A) = 0 \Rightarrow \varrho(x, B) = 0 \Rightarrow x \in \overline{B}$.

Dále platí, že

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}. \tag{4}$$

Důkaz. Podle (3) je $\overline{A} \subset \overline{A + B}$, $\overline{B} \subset \overline{A + B}$. Tedy, když (4) neplatí, existuje bod $x \in \overline{A + B} - (\overline{A} + \overline{B})$. Ježto není $x \in \overline{A}$, je $\varrho(x, A) > 0$; podobně $\varrho(x, B) > 0$; tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\varrho(x, A) > \varepsilon$, $\varrho(x, B) > \varepsilon$. Když $y \in A + B$, je buďto $y \in A$, tedy $\varrho(x, y) \geqq \varrho(x, A)$, nebo $y \in B$, tedy $\varrho(x, y) \geqq \varrho(x, B)$. Tedy: $y \in A + B \Rightarrow \varrho(x, y) > \varepsilon$, takže $\varrho(x, A + B) \geqq \varepsilon > 0$. To je spor, neboť $x \in \overline{A + B}$.

Ze (4) následuje indukcí pro $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\overline{\sum_{i=1}^m A_i} = \sum_{i=1}^m \overline{A_i}. \tag{5}$$

8·2. 8·2·1. *Uzávěr $\bar{A}$ bodové množiny A je množina všech limit konvergentních posloupností, jejichž členy jsou body množiny A.*

Důkaz. I. Nechť $x \in \bar{A}$; pak $\varrho(x, A) = \emptyset$, takže pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $\varrho(x, A) < 1/n$, takže existuje bod $x_n \in A$ takový, že $\varrho(x, x_n) < 1/n$. Zřejmě $x_n \to x$.

II. Nechť $x_n \in A$, $x_n \to x$. Pro každé n je $\varrho(x, A) \leqq \varrho(x, x_n) \to 0$, tedy $\varrho(x, A) = 0$, $x \in \bar{A}$.

Dále platí, že

$$\varrho(x, A) = \varrho(x, \bar{A}). \tag{6}$$

Důkaz. I. Když $y \in A$, je $y \in \bar{A}$, tedy $\varrho(x, y) \geqq \varrho(x, \bar{A})$. Tedy $\varrho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \varrho(x, y) \geqq \varrho(x, \bar{A})$.

II. Když $y \in \bar{A}$, pak podle předchozí věty existuje posloupnost $\{y_n\}$ taková, že $y_n \in A$, $y_n \to y$; je $\varrho(x, A) \leqq \varrho(x, y_n) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y_n, y) \to \to \varrho(x, y)$, tedy $\varrho(x, A) \leqq \varrho(x, y)$. Tedy $\varrho(x, A) \leqq \inf\limits_{y \in \bar{A}} \varrho(x, y) = \varrho(x, \bar{A})$.

Z (6) a z definice uzávěru následuje

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A} \tag{7}$$

nebo slovy: *uzávěr uzávěru bodové množiny A se rovná uzávěru množiny A.*

8·3. Bodová množina A (vnořená do prostoru P) se nazývá *uzavřená* (*abgeschlossen, fermé, closed*), určitěji uzavřená v P, když $A = \bar{A}$. Tedy:

8·3·1. *$\emptyset$ a P jsou uzavřené množiny.*

Z definice následuje snadno:

8·3·2. *Jednobodová množina je uzavřená.*

Z **8·2·1** následuje:

8·3·3. *Bodová množina A je uzavřená, když a jen když*

$$x_n \in A,\ x \in P,\ x_n \to x \Rightarrow x \in A$$

nebo slovy: *když a jen když A obsahuje limitu každé konvergentní posloupnosti, jejíž členy jsou body množiny A.*

Z (5) následuje:

8·3·4. *Součet konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.* Speciálně tedy *každá konečná bodová množina je uzavřená.*

8·3·5. *Průnik $\prod\limits_{z \in \mathbf{C}} A(z)$ uzavřených množin $A(z)$ je uzavřená množina, ať počet faktorů $A(z)$ je konečný či nekonečný.*

Důkaz. Nechť $B = \prod\limits_{z \in \mathbf{C}} A(z)$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $B \subset A(z)$, tedy $\bar{B} \subset \overline{A(z)}$ podle (3); jsou-li množiny $A(z)$ uzavřené, je $\bar{A}(z) = A(z)$, tedy $\bar{B} \subset A(z)$ pro každé $z \in \mathbf{C}$, tedy $\bar{B} \subset \prod\limits_{z \in \mathbf{C}} A(z)$, t. j. $\bar{B} \subset B$. Tedy $\bar{B} = B$ podle (2).

8·4. *Uzávěr $\bar{A}$ bodové množiny A je nejmenší uzavřená množina obsahující množinu A.*

Důkaz. I. $\bar{A} \supset A$ podle (2); $\bar{A}$ je uzavřená množina podle (7).

II. Nechť množina $F \supset A$ je uzavřená. Podle (3) je $\bar{F} \supset \bar{A}$; avšak $\bar{F} = F$, tedy $F \supset \bar{A}$.

8·5. Bodová množina A (vnořená do prostoru P) se nazývá *otevřená* (*offen, ouvert, open*), určitěji otevřená v P, když množina $P - A$ jest uzavřená. Tedy:

8·5·1. *$\emptyset$ a P jsou otevřené množiny.*

Z obdobných vět odst. **8·3** následují (v. cv. *1·8*) věty:

8·5·2. *Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.*

8·5·3. *Součet $\sum_{z \in C} A(z)$ otevřených množin $A(z)$ je otevřená množina, ať je počet sčítanců $A(z)$ konečný či nekonečný.*

8·6. *Okolím* (*Umgebung, entourage, neighborhood*) *bodu $a \in P$* (určitěji okolím bodu a v P) nazveme každou *otevřenou* množinu $G \subset P$ takovou, že $a \in G$. *Okolím bodové množiny $A \subset P$* (určitěji okolím množiny A v P) nazveme každou *otevřenou* množinu $G \subset P$ takovou, že $A \subset G$. Tedy okolí bodu a je identické s okolím množiny (a).

Nechť $a \in P$. Nechť $r \in \mathsf{E}_1$, $r > 0$. Množinu

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in P,\ \varrho(a, x) < r]$$

budeme značiti $\Omega(a, r)$; určitěji $\Omega_P(a, r)$. *Je to otevřená množina.*

Důkaz. Nechť $M = P - \Omega(a, r)$. Máme dokázati, že M je uzavřená množina. Nechť $x_n \in M$, $x_n \to x$. Stačí dokázati, že $x \in M$. Ježto $x_n \in M$, je $\varrho(a, x_n) \geqq r$; avšak $\varrho(a, x) + \varrho(x, x_n) \geqq \varrho(a, x_n)$; ježto $\varrho(x, x_n) \to 0$, je $\varrho(a, x) \geqq r$, t. j. $x \in M$.

Ježto $a \in \Omega(a, r)$, množina $\Omega(a, r)$ je okolím bodu a. Nazveme ji *sférickým okolím* bodu a s *poloměrem* r.

Nechť $A \subset P$. Nechť $r \in \mathsf{E}_1$, $r > 0$. Množinu

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in P,\ \varrho(x, A) < r]$$

budeme značiti $\Omega(A, r)$; určitěji $\Omega_P(A, r)$. Zřejmě $\Omega[(a), r] = \Omega(a, r)$, $A \subset \bar{A} \subset \Omega(A, r)$, $\Omega(\bar{A}, r) = \Omega(A, r)$ [v. (6)]. Lehko se přesvědčíme, že

$$\Omega(A, r) = \sum_{x \in A} \Omega(x, r),$$

takže množina $\Omega(A, r)$ jest otevřená a tudíž je okolím množiny A. Nazveme ji *sférickým okolím* množiny A s *poloměrem* r.

Nechť $A \subset P$. Bod a prostoru P nazveme *vnitřním* (*inner, intérieur, interior*) bodem množiny A (vzhledem k prostoru P), když existuje $r > 0$ takové, že $\Omega(a, r) \subset A$ (z čehož následuje ovšem $a \in A$).

8·6·1. *Bodová množina A je otevřená, když a jen když každý její bod je vnitřní.*

Důkaz. I. Nechť A je otevřená. Zvolme bod $a \in A$. Množina $B = P - A$ je uzavřená, tedy $B = \overline{B}$, tedy $a \in P - \overline{B}$, tedy číslo $r = \varrho(a, B)$ je kladné.*) Zřejmě $\Omega(a, r) \subset A$.

II. Nechť každý bod $x \in A$ je vnitřní. Pak lze každému $x \in A$ přiřaditi kladné číslo $r(x)$ tak, že $\Omega[x, r(x)] \subset A$. Jest

$$A = \sum_{x \in A} (x) \subset \sum_{x \in A} \Omega[x, r(x)] \subset A,$$

tedy

$$A = \sum_{x \in A} \Omega[x, r(x)],$$

takže A je součet otevřených množin, tedy otevřená množina.

Mnozí autoři nazývají okolím bodu $a \in P$ každou množinu $U \subset P$ (i když není otevřená), pro kterou a je vnitřním bodem. V tomto obecnějším smyslu je (při daném $r > 0$) okolím bodu a množina

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[x \in P,\ \varrho(a, x) \leqq r],$$

kterou budeme značiti $\overline{\Omega}(a, r)$.

8·7. Nechť P je daný metrický prostor a nechť Q je daná bodová množina vnořená do P. Podle **6·3** je také Q metrický prostor. Bodová množina A vnořená do Q je také vnořena do P.

Když $A \subset Q$, pak nechť $\overline{A}$ značí uzávěr množiny A v prostoru P.

8·7·1. *Uzávěr množiny A v prostoru Q je rovný $Q \,.\, \overline{A}$.* Vskutku onen uzávěr je rovný

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[x \in Q,\ \varrho(x, A) = 0] = Q \,.\, \mathop{\mathrm{E}}_{x}[x \in P,\ \varrho(x, A) = 0] = Q \,.\, \overline{A}.$$

8·7·2. *Množina $A \subset Q$ je uzavřená v Q tehdy a jen tehdy, když existuje množina F uzavřená v P taková, že $A = QF$.*

Důkaz. I. Nechť A je uzavřená v Q. Pak A je rovná svému uzávěru v Q, t. j. $A = Q \,.\, \overline{A}$. Avšak $\overline{A}$ je uzavřená v P.

II. Nechť $A = Q \,.\, F$, $F = \overline{F}$. Jest $A \subset F$, tedy $\overline{A} \subset F$ podle (3). Tedy $A \subset Q\overline{A} \subset QF = A$, t. j. $A = Q\overline{A}$.

Z **8·7·2** snadno plynou dva důsledky:

8·7·3. *Když je množina $A \subset Q$ uzavřená v P, pak A je uzavřená v Q.*

8·7·4. *Když je množina $A \subset Q$ uzavřená v Q a když Q je uzavřená v P, pak A je uzavřená v P.*

8·7·5. *Množina $A \subset Q$ je otevřená v Q tehdy a jen tehdy, když existuje množina G otevřená v P taková, že $A = QG$.*

Důkaz. I. Nechť A je otevřená v Q. Pak $Q - A$ je uzavřená v Q, tedy existuje množina F uzavřená v P taková, že $Q - A = QF$, tedy $A = Q(P - F)$. Avšak množina $P - F$ je otevřená v P.

II. Nechť G je otevřená v P a nechť $A = QG$. Množina $P - G$

---

*) Je-li $B = \emptyset$, je $\varrho(a, B) = \infty$ a $\Omega(a, r) \subset A$ pro každé $r > 0$.

je uzavřená v P a je $Q - A = Q(P - G)$, tedy $Q - A$ je uzavřená v Q, tedy A je otevřená v Q.

Věta **8·7·5** má opět dva důsledky:

8·7·6. *Když je množina $A \subset Q$ otevřená v P, pak A je otevřená v Q.*

8·7·7. *Když je množina $A \subset Q$ otevřená v Q a když Q je otevřená v P, pak A je otevřená v P.*

Zpravidla je prostor P pevně dán; řekneme-li prostě, že bodová množina A je uzavřená nebo otevřená, míníme, že je uzavřená nebo otevřená v P. Množiny uzavřené nebo otevřené v $Q \subset P$ se nazývají někdy *relativně uzavřené* nebo *relativně otevřené*. Podobně uzávěr $\overline{A}$ množiny A je uzávěr v P, kdežto $Q\overline{A}$ je *relativní uzávěr*.

8·8. Nechť $\{A_n\}_1^\infty$ je posloupnost podmnožin metrického prostoru P. Přiřadíme posloupnosti $\{A_n\}$ dvě podmnožiny B a C prostoru P takto: [1] $x \in B$ znamená, že existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=m}^\infty$ taková, že $a_n \in A_n$ pro $n \geqq m$ a $a_n \to x$; [2] $x \in C$ znamená, že existují indexy $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ a posloupnost $\{a_n\}$ taková, že $a_n \in A_{i_n}$ a $a_n \to x$. Množinu B nazveme *dolní limitou* a množinu C *horní limitou* posloupnosti $\{A_n\}$; značíme je

$$B = \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty}\, A_n,$$

$$C = \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty}\, A_n.$$

Zřejmě je vždy

$$\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n. \tag{1}$$

Když $B = C$, píšeme

$$\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \mathrm{Lim}\, A_n. \tag{2}$$

Výrok, že $\mathrm{Lim}\, A_n$ existuje, znamená, že platí (2).

Cvičení.

Ve cvičeních *8·1—8·8* jsou A a B bodové množiny vnořené do metrického prostoru P.

8·1. $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$.

*8·2.** $\overline{P - \overline{A}} \subset \overline{P - A}$.

8·3. $P - \overline{P - \overline{P - \overline{A}}} = P - \overline{\overline{A}}$.

8·4. Když A je uzavřená a když B je otevřená, pak $A - B$ je uzavřená a $B - A$ je otevřená.

Ve cvičeních *8·5—8·9*, *8·11* znamená A_ι množinu všech vnitřních bodů množiny A. Množina A_ι se nazývá *vnitřek* (*offener Kern*, *intérieur*, *interior*) množiny A.

8·5. $A_\iota = P - \overline{P - A}$.

8·6. A_ι je největší otevřená množina obsažená v množině A.

8·7. $A \subset B \Rightarrow A_\iota \subset B_\iota$.

8·8. $(AB)_\iota = A_\iota B_\iota$.

8·9. $A_\iota - B_\iota \supset (A - B)_\iota$.

Ve cvičeních *8·10—8·14* jsou P a Q dva dané metrické prostory a $A \subset P$, $B \subset Q$, $A \neq \emptyset \neq B$.

8·10. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

8·11. $(A \times B)_\iota = A_\iota \times B_\iota$.

8·12. $A \times B$ je uzavřená v $P \times Q$, když a jen když A je uzavřená v P a B je uzavřená v Q.

*8·13.** Ve cvič. *8·12* lze nahraditi slovo uzavřená (současně všude) slovem otevřená.

8·14. Jak dalece je ve cvič. *8·10—8·13* podstatný předpoklad $A \neq \emptyset \neq B$?

8·15. Když $a \in P$, $r > 0$, pak množina $\overline{\Omega}(a, r)$ je uzavřená v P. Je vždy $\overline{\Omega}(a, r) \supset \overline{\Omega(a, r)}$, ale může býti $\overline{\Omega}(a, r) \neq \overline{\Omega(a, r)}$.

Ve cvič. *8·16—8·21* $\{A_n\}$ je posloupnost podmnožin metrického prostoru P.

*8·16.** $x \in \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n$ znamená, že $\varrho(x, A_n) \to 0$; $x \in \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n$ znamená, že lze z $\{A_n\}$ vybrati $\{A_{i_n}\}$ tak, aby $\varrho(x, A_{i_n}) \to 0$.

8·17. $\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \underline{\mathrm{Lim}}\, \overline{A}_n$, $\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \overline{\mathrm{Lim}}\, \overline{A}_n$.

8·18. Množiny $\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n$ a $\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n$ jsou uzavřené.

8·19. Nechť $A_n = (a_n)$; je $\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \lim a_n$, existuje-li $\lim a_n$; v opačném případě $\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n = \emptyset$.

*8·20.** Když $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$, je

$$\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset \underline{\mathrm{Lim}}\, A_{i_n} \subset \overline{\mathrm{Lim}}\, A_{i_n} \subset \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n;$$

tedy

$$\mathrm{Lim}\, A_n = \mathrm{Lim}\, A_{i_n},$$

existuje-li levá strana.

8·21. Je

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=n}^{\infty} A_i \subset \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} A_i \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

§9. Spojité zobrazení. Homeomorfie.

9·1. Nechť P a Q jsou dané metrické prostory. Metriku v obou budeme značiti ϱ; je vždy z textu jasné, o kterou z obou metrik běží.

Nechť f je zobrazení prostoru P do prostoru Q. Nechť $a \in P$. Pravíme, že zobrazení f je v bodě a *spojité* (*stetig, continue, continuous*), když

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a).$$

Pravíme, že zobrazení f je v bodě a *nespojité* (*unstetig, discontinue, discontinuous*), když není v a spojité.

Když zobrazení f je spojité v bodě a a když $a \in M \subset P$, zřejmě parciální zobrazení f_M je spojité v bodě a.

9·1·1. *Zobrazení f je spojité v bodě a tehdy a jen tehdy, když každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\delta(a, \varepsilon) > 0$ tak, že $x \in P$, $\varrho(a, x) < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow \varrho[f(a), f(x)] < \varepsilon$.*

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Nechť $x_n \to a$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a určeme $\delta(a, \varepsilon)$. Ježto $x_n \to a$, $\delta(a, \varepsilon) > 0$, existuje index $p(\varepsilon)$ takový, že $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(a, x_n) < \delta(a, \varepsilon)$. Tedy $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho[f(a), f(x_n)] < < \varepsilon$. Tedy $f(x_n) \to f(a)$. Tedy f je spojité v bodě a.

II. Nechť zobrazení f je v bodě a spojité. Zvolme $\varepsilon > 0$ a předpokládejme, že $\delta(a, \varepsilon)$ neexistuje. Pak pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nelze voliti $\delta(a, \varepsilon) = \frac{1}{n}$, t. j. existuje bod $x_n \in P$ takový, že $\varrho(a, x_n) < \frac{1}{n}$, $\varrho[f(a), f(x_n)] \geqq \varepsilon$. Ježto $\varrho(a, x_n) < \frac{1}{n}$, je $x_n \to a$. Ježto $\varrho[f(a), f(x_n)] \geqq \geqq \varepsilon > 0$, není $f(x_n) \to f(a)$. To je spor.

Zobrazení f nazývá se *spojité* (bez jakéhokoli dodatku), když je spojité v každém bodě prostoru P.

Když f je zobrazení metrického prostoru P do metrického prostoru Q, pak $f(P)$ je bodová množina vnořená do prostoru Q. Je-li Q' bodová množina taková, že $f(P) \subset Q' \subset Q$, pak Q' je metrický prostor (v. **6·3**) a f je zobrazení prostoru P do prostoru Q'. Zřejmě definice spojitosti zobrazení f zůstane stejná, když místo Q vezmeme Q'.

9·2. *Nechť f je zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor Q. Nutná a postačující podmínka, aby zobrazení f bylo spojité, jest: Je-li A otevřená v Q, pak $f_{-1}(A)$ je otevřená v P. Jiný tvar podmínky: Je-li A uzavřená v Q, pak $f_{-1}(A)$ je uzavřená v P.*

Důkaz. I. Obě znění podmínky jsou ekvivalentní; v. cv. *2·13*, kde za A, B, N_1, N_2 je dosaditi P, Q, Q, A.

II. Nechť $f_{-1}(A)$ jest otevřená v P, kdykoli A je otevřená v Q. Zvolme $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje $\delta > 0$ takové, že: $x \in P$, $\varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \varrho[f(a), f(x)] < \varepsilon$. Nechť $A = \Omega_Q[f(a), \varepsilon]$. Množina A je otevřená v Q, tedy množina $f_{-1}(A)$ je otevřená v P. Avšak $a \in f_{-1}(A)$, takže a je vnitřní bod množiny $f_{-1}(A)$. Tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $\Omega_P(a, \delta) \subset f_{-1}(A)$. Když $x \in P$, $\varrho(a, x) < \delta$, jest $x \in \Omega_P(a, \delta)$, tedy $x \in f_{-1}(A)$, tedy $f(x) \in A$, tedy $\varrho[f(a), f(x)] < \varepsilon$.

III. Nechť zobrazení f je spojité. Nechť A je otevřená v Q. Nechť $a \in f_{-1}(A)$. Máme dokázati, že je a vnitřní bod množiny $f_{-1}(A)$. Ježto $a \in f_{-1}(A)$ a ježto množina A je otevřená, bod $f(a)$ je její vnitřní bod, takže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\Omega_Q[f(a), \varepsilon] \subset A$. Ježto zobrazení f je spojité v bodě a, existuje $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ takové, že: $x \in P$, $\varrho(a, x) < < \delta \Rightarrow \varrho[f(a), f(x)] < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in \Omega_Q[f(a), \varepsilon] \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow x \in f_{-1}(A)$. Tedy $\Omega_P(a, \delta) \subset f_{-1}(A)$.

9·3. Nechť f je *prosté* spojité zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor Q. Pak inversní zobrazení f_{-1} prostoru Q na prostor P nemusí býti spojité. Příklad: Nechť P je množina všech přirozených čísel $1, 2, 3, \ldots$; nechť Q je množina všech racionálních čísel; metrika v P a v Q nechť je podle **6·3** určena tím, že P a Q jsou bodové množiny vnořené do prostoru $\mathbf{E}_1$. Podle cv. *3·1* existuje prosté zobrazení f

množiny P na množinu Q. Snadno se dokáže, že zobrazení f je spojité, kdežto inversní zobrazení f_{-1} není spojité v žádném bodě prostoru Q.

Když f je prosté spojité zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor Q, a když také inversní zobrazení f_{-1} je spojité, pak pravíme, že f je *homeomorfní* zobrazení prostoru P na prostor Q. Zřejmě f_{-1} je homeomorfní zobrazení prostoru Q na prostor P.

Pravíme, že prostory P a Q jsou *homeomorfní*, když existuje homeomorfní zobrazení P na Q (nebo Q na P).

Topologická vlastnost metrického prostoru P je taková, která zůstane zachována, když nahradíme P libovolným homeomorfním prostorem. Zřejmě každé isometrické zobrazení je homeomorfní, takže každá topologická vlastnost je i metrickou, nikoli ovšem obráceně.

Nechť ϱ_1 a ϱ_2 jsou dvě ekvivalentní metriky množiny P. Pro jasnost mluvme opět o metrických prostorech (P, ϱ_1) a (P, ϱ_2) jako na počátku odst. **7·2**. Když každému bodu $x \in P$, považovanému za bod prostoru (P, ϱ_1), přiřadíme týž bod x, považovaný však za bod prostoru (P, ϱ_2), vznikne zobrazení f prostoru (P, ϱ_1) na prostor (P, ϱ_2). Je patrné, že zobrazení f je homeomorfní.

Obráceně nechť f je homeomorfní zobrazení prostoru P (s metrikou ϱ_1) na prostor Q (s metrikou ϱ_2). Definujme funkci ϱ_0 v oboru $P \times P$ takto: $\varrho_0(x, y) = \varrho_2[f(x), f(y)]$. Snadno se přesvědčíme, že ϱ_0 je metrika v P ekvivalentní s ϱ_1.

Z provedené úvahy je patrné, že topologické vlastnosti metrického prostoru P jsou ty metrické vlastnosti, které zůstanou zachovány, nahradíme-li danou metriku v P metrikou ekvivalentní.

Zřejmě každá vlastnost metrického prostoru P, která se dá formulovati tak, že se nemluví explicite o metrice v P, nýbrž pouze o konvergenci v P, je vlastností topologickou. Tak na př. uzávěr $\overline{A}$ bodové množiny A vnořené do metrického prostoru P je pojem topologický, jak vychází z **8·2·1**. (Z původní definice uzávěru není to ovšem patrné.) Tedy jsou topologické všecky pojmy, které se dají převésti logicky na pojem uzávěru, tak pojem uzavřené množiny $(A = \overline{A})$ a pojem otevřené množiny $(P - A = \overline{P - A})$. Také pojem spojitého zobrazení metrického prostoru P do metrického prostoru Q je topologický, neboť závisí explicite pouze na konvergenci v prostorech P a Q, nikoli na jejich metrikách.

9·4. Nezřídka se vyskytují metrické prostory, u nichž je konvergence definována způsobem zcela přirozeným, kdežto definice metriky je dosti umělá. Tak je tomu třeba u prostoru S ve cvič. *7·4* při obou tam udaných metrikách.

Jednodušší a důležitý příklad dává množina $\mathbf{R}$, skládající se ze všech reálných čísel a ze symbolů ∞ a $-\infty$. Konvergenci v $\mathbf{R}$ definujme takto: Je-li $x_n \in \mathbf{R}$, pak: [1] $x_n \to \infty$ znamená, že ke každému $c \in \mathbf{E}_1$ existuje index $p(c)$ takový, že: $n > p(c) \Rightarrow x_n > c$; [2] $x_n \to -\infty$

znamená, že ke každému $c \in \mathsf{E}_1$ existuje index $p(c)$ takový, že: $n > p(c) \Rightarrow x_n < c$; $x_n \to \alpha$, kde $\alpha \in \mathsf{E}_1$, znamená, že existuje jen konečný ($\geqq 0$) počet indexů n takových, že $x_n = \infty$ nebo $x_n = -\infty$ a že odstraněním všech členů x_n rovných ∞ nebo $-\infty$ vznikne z posloupnosti $\{x_n\}$ posloupnost $\{y_n\}$ reálných čísel, pro kterou platí v obvyklém smyslu $y_n \to \alpha$.

Budu nyní v R definovati metriku ϱ tak, že pomocí metriky ϱ definovaná konvergence v R (v. **7·1**) je identická s konvergencí právě definovanou. To lze provésti rozmanitými způsoby a nezáleží mnoho na tom, pro který způsob se rozhodneme, neboť budeme potřebovati pouze *topologické* vlastnosti prostoru R.

Když $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$, položme

$$\varrho(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|,$$

při čemž klademe

$$\frac{\infty}{1 + |\infty|} = 1, \quad \frac{-\infty}{1 + |-\infty|} = -1.$$

Vlastnost [1] (v. odst. **6·1**) funkce ϱ plyne z toho, že pro $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$, $x < y$ je zřejmě

$$\frac{x}{1 + |x|} < \frac{y}{1 + |y|}.$$

Vlastnost [2] je zřejmá; vlastnost [3] plyne okamžitě z nerovnosti $|a| + |b| \geqq |a + b|$ (platné pro $a \in \mathsf{E}_1$, $b \in \mathsf{E}_1$), dosadíme-li do ní

$$a = \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|}, \quad b = \frac{y}{1 + |y|} - \frac{z}{1 + |z|} \; (x \in \mathsf{R},\ y \in \mathsf{R},\ z \in \mathsf{R}).$$

Tedy ϱ je metrika v R.

Snadno se přesvědčíme, že konvergence v R definovaná pomocí metriky ϱ je identická s konvergencí výše definovanou. Z toho následuje, že parciální metrika $\varrho_{\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_1}$ je ekvivalentní s obyčejnou metrikou v E_1 (zavedenou v odst. **6·1**). Nazveme $\varrho_{\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_1}$ *redukovanou* metrikou v E_1. Tedy prostor E_1 s redukovanou (nikoli s obyčejnou) metrikou je bodová množina vnořená do metrického prostoru R.

Funkcí v oboru P jsme nazvali (**2·3**) zobrazení f množiny P do množiny R. Je-li P metrický prostor, pak ovšem funkci f nazveme spojitou (v bodě $a \in P$), když zobrazení f je (v bodě a) spojité ve smyslu odst. **9·1**. Když funkce f je konečná, můžeme (v. konec odst. **9·3**) spojitost definovati podle obyčejné nebo podle redukované metriky v E_1. V elementech matematické analysy se vyskytují pouze konečné funkce a spojitost se definuje pomocí obyčejné metriky v E_1.

9·5. 9·5·1. *Nechť P je metrický prostor. Nechť f je funkce v oboru P. Nutná a postačující podmínka, aby funkce f byla spojitá, je, aby pro* *každé* $c \in \mathsf{E}_1$ *množiny* $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ a $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ *byly otevřené* (v prostoru P).

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Nechť $x_n \in P$, $y \in P$, $x_n \to y$. Máme dokázati, že $f(x_n) \to f(y)$. Je rozeznávati tři případy: [1] Nechť $f(y) = \infty$. Zvolme $c \in \mathsf{E}_1$. Ježto množina $M = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ je otevřená a ježto $y \in M$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\Omega_P(y, \varepsilon) \subset M$. Ježto $x_n \to y$, existuje index p takový, že: $n > p \Rightarrow \varrho(x_n, y) < \varepsilon \Rightarrow x_n \in \Omega_P(y, \varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n \in M \Rightarrow f(x_n) > c$. Tedy ke každému $c \in \mathsf{E}_1$ existuje index $p(c) = p$ takový, že $n > p \Rightarrow f(x_n) > c$, t. j. $f(x_n) \to \infty$, j. b. d. [2] Nechť $f(y) =$ $= -\infty$. Tento případ se probere stejně jako [1]. [3] Nechť $f(y) \in \mathsf{E}_1$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Množina $M_\varepsilon = \underset{x}{\mathrm{E}}[|f(x) - f(y)| < \varepsilon] = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > f(y) - \varepsilon]$. $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < f(y) + \varepsilon]$ je otevřená a obsahuje bod y; tedy existuje $r > 0$ takové, že: $\varrho(x, y) < r \Rightarrow x \in M_\varepsilon$. Ježto $x_n \to y$, existuje index p takový, že: $n > p \Rightarrow \varrho(x_n, y) < r \Rightarrow x_n \in M_\varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - f(y)| < \varepsilon$. Tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $p(\varepsilon) = p$ takový, že: $n > p \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x_n) - f(y)| < \varepsilon$, t. j. $f(x_n) \to f(y)$, j. b. d.

II. Nechť funkce f je spojitá. Pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina $C =$ $= \underset{y}{\mathrm{E}}[y \in \mathbf{R}, y > c]$ je, jak se lehko dokáže, otevřená v $\mathbf{R}$, takže podle **9·2** množina $f_{-1}(C) = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ jest otevřená v P. Stejně se dokáže, že také množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ jest otevřená v P.

Ježto

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \leqq c] = P - \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c],$$
$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \geqq c] = P - \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c], \tag{1}$$

lze podmínku dokázané věty vysloviti také takto: *Pro každé* $c \in \mathsf{E}_1$ *množiny* $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \geqq c]$ *a* $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \leqq c]$ *jsou uzavřené v* P.

Ježto

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = c] = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \geqq c] \,.\, \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \leqq c],\\
&\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = \infty] = \prod_{n=1}^{\infty} [f(x) \geqq n],\\
&\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = -\infty] = \prod_{n=1}^{\infty} [f(x) \leqq -n],\\
&\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < \infty] = P - \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = \infty],\\
&\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > -\infty] = P - \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = -\infty],
\end{aligned} \tag{2}$$

platí pro každou spojitou funkci, že množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = c]$ $(c \in \mathbf{R})$ jsou uzavřené v P a množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < \infty]$, $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > -\infty]$ (a tedy i množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \in \mathbf{E}_1] = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < \infty] \,.\, \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > -\infty]$) jsou otevřené v P.

Ježto z elementární analysy známe řadu příkladů spojitých funkcí, můžeme užíti vět právě dokázaných k jednoduchému důkazu uzavřenosti nebo otevřenosti jednoduchých množin v euklidovských prostorech. Na př. v $\mathbf{E}_2$ funkce f definovaná rovnicí $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ je spojitá, tedy elipsa $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right]$ je uzavřená množina a její vnitřek $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right]$ a vnějšek $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1\right]$ jsou otevřené množiny; množina $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right]$ je uzavřená atd.

9·6. *Nechť f je zobrazení metrického prostoru P do metrického prostoru Q.* Pravíme, že zobrazení f je *stejnoměrně* (*gleichmässig, uniformément, uniformly*) spojité, když

$$x_n \in P,\ y_n \in P,\ \varrho(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow \varrho[f(x_n), f(y_n)] \to 0.$$

Volíme-li všecky body $y_n = a \in P$, vidíme, že *stejnoměrně spojité zobrazení je spojité.*

Kdežto spojitost je *topologický* pojem, můžeme o stejnoměrné spojitosti tvrditi pouze, že je to *metrický* pojem: nemusí býti zachována, když metriku v P nebo v Q nahradíme jinou metriku s ní ekvivalentní.

O stejnoměrně spojité *funkci* mluvíme zpravidla pouze u *konečných* funkcí ($Q = \mathbf{E}_1$) a máme při ní na mysli *obyčejnou* (nikoli *redukovanou*) metriku v $\mathbf{E}_1$.

9·6·1. *Zobrazení f* (prostoru P do prostoru Q) *je stejnoměrně spojité tehdy a jen tehdy, když lze každému $\varepsilon > 0$ přiřaditi $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že*

$$x \in P,\ y \in P,\ \varrho(x, y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \varrho[f(x), f(y)] < \varepsilon.$$

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Nechť $x_n \in P$, $y_n \in P$, $\varrho(x_n, y_n) \to 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a určeme $\delta(\varepsilon)$. Ježto $\varrho(x_n, y_n) \to 0$, existuje index p takový, že $n > p \Rightarrow \varrho(x_n, y_n) < \delta(\varepsilon)$. Tedy $n > p \Rightarrow \varrho[f(x_n), f(y_n)] < \varepsilon$, takže $\varrho[f(x_n), f(y_n)] \to 0$.

II. Nechť zobrazení f je stejnoměrně spojité. Zvolme $\varepsilon > 0$ a předpokládejme, že $\delta(\varepsilon)$ neexistuje. Pak pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nelze voliti $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{n}$, t. j. existují body $x_n \in P$, $y_n \in P$ takové, že $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, $\varrho[f(x_n), f(y_n)] \geqq \varepsilon$. Ježto $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, jest $\varrho(x_n, y_n) \to 0$. Ježto $\varrho[f(x_n), f(y_n)] \geqq \varepsilon > 0$, není $\varrho[f(x_n), f(y_n)] \to 0$. To je spor.

Cvičení.

9·1. Definujme funkci f v oboru E_1 takto: pro iracionální x nechť $f(x) = 0$, pro racionální x nechť $f(x) = 1$. Funkce f je nespojitá v každém bodě $x \in \mathsf{E}_1$.

9·2. Definujme funkci f v oboru E_1 takto: pro iracionální x nechť $f(x) = 0$; jsou-li m a n nesoudělná celá čísla, nechť $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{|n|}$. Funkce f je spojitá v bodě $x \in \mathsf{E}_1$ tehdy a jen tehdy, když x je iracionální.

9·3. Definujme funkci f v oboru E_2 takto: $f(0, y) = 0$, $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x}$ pro $x \neq 0$. Funkce f je nespojitá v bodě $(0, 0)$. Je-li A libovolná přímka procházející bodem $(0, 0)$, t. j. $A = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[ax + by = 0]$, kde $a \in \mathsf{E}_1$, $b \in \mathsf{E}_1$ $(|a| + |b| > 0)$, pak parciální funkce f_A je spojitá v bodě $(0, 0)$.

Ve cvičeních *9·4*—*9·15* P je metrický prostor a A a B jsou bodové množiny vnořené do P; f je zobrazení prostoru P do metrického prostoru Q.

9·4. Když $A + B = P$, $a \in AB$ a když obě parciální zobrazení f_A a f_B jsou v bodě a spojitá, pak také zobrazení f je v bodě a spojité.

*9·5.** Když $A + B = P$, když obě množiny A a B jsou uzavřené a když obě parciální zobrazení f_A a f_B jsou spojitá, pak také zobrazení f je spojité.

9·6. Když zobrazení f je spojité, pak je množina $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \in P,\ y \in Q,\ y = f(x)]$ uzavřená v $P \times Q$.

9·7. Charakteristická funkce množiny A je spojitá tehdy a jen tehdy, když množina A je i uzavřená i otevřená.

9·8. Zobrazení f je spojité tehdy a jen tehdy, když $X \subset P \Rightarrow f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

9·9. Zobrazení f je spojité tehdy a jen tehdy, když $Y \subset Q \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{f_{-1}(Y)} \subset f_{-1}(\overline{Y})$.

*9·10.** Nechť $A \neq \emptyset$. Funkce $\varrho(x, A)$ je stejnoměrně spojitá.

*9·11**. Nechť $d(A) < \infty$. Funkce $d(x, A)$ je stejnoměrně spojitá.

*9·12.** Metrika ϱ prostoru P je stejnoměrně spojitá funkce v oboru $P \times P$.

Ve cvičeních *9·13*—*9·15* je f prosté zobrazení prostoru P na Q.

9·13. Nutná a postačující podmínka, aby zobrazení f bylo homeomorfní, je: $X \subset P$ je uzavřená v $P \Leftrightarrow f(X)$ je uzavřená v Q.

9·14. Ve cvičení *9·13* lze slovo uzavřená (současně na obou místech) nahraditi slovem otevřená.

9·15. Nutná a postačující podmínka, aby zobrazení f bylo homeomorfní, je: $X \subset P \Rightarrow f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$.

9·16. Nechť P a Q jsou metrické prostory, $Q \neq \emptyset$. Pro $x \in P$, $y \in Q$ nechť $f(x, y) = x$. Pak f je stejnoměrně spojité zobrazení prostoru $P \times Q$ na prostor P.

9·17. Pro $x \in \mathsf{E}_1$ nechť $f(x) = x^2$. Funkce f je spojitá, ale není stejnoměrně spojitá. Když však zavedeme v E_1 *redukovanou* metriku, pak je f stejnoměrně spojité zobrazení prostoru E_1 do prostoru E_1.

*9·18.** Metrický prostor R je homeomorfní s intervalem $\underset{t}{\mathrm{E}}[-1 \leqq t \leqq 1]$. Homeomorfní zobrazení dostaneme na př., položíme-li $f(\infty) = 1$, $f(-\infty) = -1$, a $f(t) = \frac{t}{1 + |t|}$ pro $t \in \mathsf{E}_1$.*)

---

*) Toto zobrazení je dokonce isometrické, počítáme-li v $\mathrm{E}[-1 \leqq t \leqq 1]$ s obyčejnou metrikou.

*9·19.** Nechť P je metrický prostor; nechť $a \in P$; nechť f, g jsou konečné funkce v oboru P, jež jsou spojité v bodě a. Potom také funkce, jejíž hodnota v každém bodě $x \in P$ jest dána některým (a pro všechna $x \in P$ týmž) z výrazů

$$| f(x) |, \max [f(x), g(x)], \min [f(x), g(x)], f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) . g(x),$$

je spojitá v bodě a. Je-li mimo to $g(a) \neq 0$, je také funkce h, definovaná pro $x \in \mathrm{E}_y[y \in P, g(y) \neq 0]$ vztahem $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a definovaná jakkoliv pro $x \in P - \mathrm{E}_y[y \in P, g(y) \neq 0]$, spojitá v bodě a. — Čtenář nechť sám uváží, jak nutno tuto větu pozměniti, nepředpokládáme-li konečnost funkcí f, g.

*9·20.** Nechť $g_i (i = 1, 2)$ je spojité zobrazení metrického prostoru P_i na metrický prostor P_{i+1}; nechť $a_1 \in P_1$, $a_2 = g_1(a_1)$, takže $a_2 \in P_2$; nechť zobrazení $g_i (i = 1, 2)$ je spojité v bodě a_i. Potom zobrazení f prostoru P_1 na P_3, definované vztahem

$$x \in P_1 \Rightarrow f(x) = g_2[g_1(x)],$$

je spojité v bodě a_1.

*9·21.** Nechť f je spojité zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor Q. Nechť $A_n \subset P$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak je

$$f(\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n) \subset \overline{\mathrm{Lim}}\, f(A_n),\quad f(\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n) \subset \underline{\mathrm{Lim}}\, f(A_n).$$

Když zobrazení f je homeomorfní, je

$$f(\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n) = \overline{\mathrm{Lim}}\, f(A_n),\quad f(\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n) = \underline{\mathrm{Lim}}\, f(A_n),$$

takže $\mathrm{Lim}\, f(A_n)$ existuje tehdy a jen tehdy, když existuje $\mathrm{Lim}\, A_n$.

§10. Oddělené bodové množiny; hranice bodových množin.

10·1. 10·1·1. *Nechť P je metrický prostor. K libovolným množinám $A_1 \subset P$, $A_2 \subset P$ lze udati uzavřené množiny F_1, F_2 takové, že $F_1 + F_2 = P$, $A_1 \subset F_1$, $A_2 \subset F_2$, $F_1 . F_2(\overline{A}_1 + \overline{A}_2) = \overline{A}_1 . \overline{A}_2$.*

Důkaz. Když $A_1 = \emptyset$, můžeme voliti $F_1 = \emptyset$, $F_2 = P$; podobně v případě $A_2 = \emptyset$. Nechť tedy $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$. Když $f(x) = \varrho(x, A_1) - \varrho(x, A_2)$ pro $x \in P$, pak podle cv. *9·10* f je spojitá funkce v oboru P. Tedy podle **9·5** množiny $F_1 = \mathrm{E}_x[\varrho(x, A_1) \leqq \varrho(x, A_2)]$ a $F_2 = \mathrm{E}_x[\varrho(x, A_1) \geqq \varrho(x, A_2)]$ jsou uzavřené. Zřejmě $F_1 + F_2 = P$, $A_1 \subset F_1$, $A_2 \subset F_2$. Zbývá dokázati, že $F_1 . F_2(\overline{A}_1 + \overline{A}_2) = \overline{A}_1 . \overline{A}_2$. Nechť *předně* $x \in F_1F_2$, tedy $\varrho(x, A_1) = \varrho(x, A_2)$. Je-li $x \in \overline{A}_1$, je $\varrho(x, A_1) = 0$, tedy $\varrho(x, A_2) = 0$, tedy $x \in \overline{A}_2$. Podobně $x \in \overline{A}_2 \Rightarrow x \in \overline{A}_1$. Tedy $F_1 . F_2 . (\overline{A}_1 + \overline{A}_2) \subset \overline{A}_1\overline{A}_2$. Nechť *za druhé* $x \in \overline{A}_1\overline{A}_2$. Pak $\varrho(x, A_1) = 0 = \varrho(x, A_2) \Rightarrow x \in F_1F_2$. Tedy také $\overline{A}_1\overline{A}_2 \subset F_1F_2(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)$.

10·1·2. *Nechť U je okolí uzavřené množiny A. Pak existuje okolí V množiny A takové, že $\overline{V} \subset U$.*

Důkaz. V **10·1·1** volme $A_1 = A$, $A_2 = P - U$. Pak $A_1 = \overline{A}_1$, $A_2 = \overline{A}_2$. Určeme F_1 a F_2 podle citované věty a položme $V = P - F_2$, takže množina V je otevřená. Jest $F_1F_2 . [A + (P - U)] = A - U = \emptyset$, takže jednak $AF_2 = \emptyset$, tedy $A \subset V$, jednak $F_1 \subset U$; ježto $F_1 + F_2 = P$, jest $V = P - F_2 \subset F_1$, tedy $\overline{V} \subset \overline{F}_1 = F_1 \subset U$.

10·2. Bodové množiny A a B nazveme *oddělené**) (*abgesondert, séparés, mutually separated*), když: [1] $AB = \emptyset$, [2] A a B jsou obě uzavřené v $A + B$. Ježto z [1] následuje, že $A = (A + B) - B$, $B = (A + B) - A$, lze podmínku [2] nahraditi podmínkou [2′]: A a B jsou obě otevřené v $A + B$. Oddělenost množin A a B je jejich topologická vlastnost (v. **9·3**) závislá pouze na prostoru $A + B$, nikoli na prostoru P, do něhož prostor $A + B$ je vnořen.

Z definice plynou ihned tyto dvě věty (v. **8·7·3** a **8·7·6**):

10·2·1. *Dvě uzavřené disjunktní množiny jsou oddělené.*

10·2·2. *Dvě otevřené disjunktní množiny jsou oddělené.*

10·2·3. *Množiny A a B jsou oddělené, když a jen když $A\overline{B} = \emptyset = B\overline{A}$*, jinak řečeno, když a jen když: [1] $x \in B \Rightarrow \varrho(x, A) > 0$, [2] $x \in A \Rightarrow \varrho(x, B) > 0$.

Důkaz. I. Nechť množiny A a B jsou oddělené. Pak $AB = \emptyset$. Množina A je uzavřená v $A + B$, takže její relativní uzávěr v $A + B$, t. j. množina $(A + B) . \overline{A}$, se rovná A, takže $B\overline{A} \subset AB = \emptyset$, tedy $B\overline{A} = \emptyset$ a podobně i $A\overline{B} = \emptyset$.

II. Nechť $A\overline{B} = \emptyset = B\overline{A}$. Ježto $B \subset \overline{B}$, jest $AB = \emptyset$. Ježto $B\overline{A} = \emptyset$, jest $(A + B)\,\overline{A} = A\overline{A} + B\overline{A} = A\overline{A} = A$, t. j. množina A se rovná svému relativnímu uzávěru v $A + B$, t. j. A je uzavřená v $A + B$. Podobně B je uzavřená v $A + B$.

10·2·4. *Nechť množiny A a B jsou oddělené. Nechť $C \subset A$, $D \subset B$. Pak množiny C a D jsou oddělené.*

Důkaz. Jest $\overline{C} \subset \overline{A}$, $\overline{D} \subset \overline{B}$, tedy $A\overline{B} = \emptyset \Rightarrow C\overline{D} = \emptyset$, $\overline{A}B = \emptyset \Rightarrow \overline{C}D = \emptyset$.

10·2·5. *Nechť množiny A a B jsou oddělené; nechť také množiny A a C jsou oddělené. Pak množiny A a $B + C$ jsou oddělené.*

Důkaz. $\overline{A}B = \emptyset$, $\overline{A}C = \emptyset \Rightarrow \overline{A}(B + C) = \emptyset$. Ježto $\overline{B + C} = \overline{B} + \overline{C}$, jest $A\overline{B} = \emptyset$, $A\overline{C} = \emptyset \Rightarrow A . \overline{B + C} = \emptyset$.

10·2·6. *Nechť množiny G a H jsou otevřené a nechť $GH = \emptyset$. Pak $\overline{G}H = \emptyset$.* Neboť G a H jsou oddělené.

10·2·7. *Množiny A a B jsou oddělené, když a jen když existují otevřené množiny U a V takové, že $UV = \emptyset$, $U \supset A$, $V \supset B$.*

Důkaz. I. Existují-li U a V, jsou oddělené. Ježto $A \subset U$, $B \subset V$, také A a B jsou oddělené.

II. Nechť A a B jsou oddělené. Podle **10·1·1** existují uzavřené F_1, F_2 takové, že $F_1 + F_2 = P$, $F_1 \supset A$, $F_2 \supset B$, $F_1F_2(\overline{A} + \overline{B}) = \overline{A}\overline{B}$.

*) Hlavní aplikace tohoto pojmu budou až ve druhém svazku.

Položme $U = P - F_2$, $V = P - F_1$. Pak množiny U a V jsou otevřené a $U \,.\, V = P - (F_1 + F_2) = \emptyset$. Kdyby bylo $x \in AF_2$, bylo by $x \in F_1F_2(\overline{A} + \overline{B})$, tedy $x \in \overline{A}\overline{B} \,.\, A$, tedy $x \in A\overline{B}$. Avšak $A\overline{B} = \emptyset$. Tedy $AF_2 = \emptyset$, takže $A \subset P - F_2 = U$. Podobně $B \subset V$.

10·3. Když $A \subset P$, pak označíme $H(A)$, určitěji $H_P(A)$ a nazveme *hranicí* (*Begrenzung*, *frontière*, *boundary*) množiny A (v prostoru P) množinu $\overline{A} \,.\, \overline{P - A}$, tedy množinu $\mathrm{E}_x[\varrho(x, A) = 0, \varrho(x, P - A) = 0]$. Pojem hranice je topologický pojem (v. **9·3**).*)

Z definice následuje:

10·3·1. *Množina* $H(A)$ *je vždy uzavřená.* Zřejmě vždy

$$H(P - A) = H(A). \tag{1}$$

Vždy je

$$H(A + B) \subset H(A) + H(B). \tag{2}$$

Důkaz. Je $A \subset A + B$, tedy $P - (A + B) \subset P - A$, tedy $\overline{P - (A + B)} \subset \overline{P - A}$, podobně $\overline{P - (A + B)} \subset \overline{P - B}$; mimo to $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$. Tedy

$$H(A + B) =$$
$$= (\overline{A} + \overline{B}) \,.\, \overline{P - (A + B)} \subset \overline{A} \,.\, \overline{P - A} + \overline{B} \,.\, \overline{P - B} = H(A) + H(B).$$

Ze (2) následuje indukcí, že pro $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$H\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) \subset \sum_{i=1}^{m} H(A_i). \tag{3}$$

Vždy je

$$H(AB) \subset H(A) + H(B). \tag{4}$$

Neboť podle (1) a (2)

$$H(AB) = H(P - AB) =$$
$$= H[(P - A) + (P - B)] \subset H(P - A) + H(P - B) = H(A) + H(B).$$

Ze (4) následuje indukcí, že pro $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$H\left(\prod_{i=1}^{m} A_i\right) \subset \sum_{i=1}^{m} H(A_i). \tag{5}$$

Z (4) následuje

$$H(A - B) = H[A(P - B)] \subset H(A) + H(P - B)$$

a tedy podle (1)

$$H(A - B) \subset H(A) + H(B). \tag{6}$$

Vždy je

$$H(\overline{A}) \subset H(A). \tag{7}$$

Důkaz. Podle cvič. *8·2* je $\overline{P - \overline{A}} \subset \overline{P - A}$, tedy

$$H(\overline{A}) = \overline{A} \,.\, \overline{P - \overline{A}} \subset \overline{A} \,.\, \overline{P - A} = H(A).$$

---

*) Také hranice je pojem, jehož důležitost bude patrná až ve druhém svazku.

Ze (6) a (7) následuje, že vždy

$$\boldsymbol{H}(A-\overline{B}) \subset \boldsymbol{H}(A)+\boldsymbol{H}(B). \tag{8}$$

Pojem hranice je zejména důležitý u otevřených množin.

10·3·2. *Když množina A jest otevřená, pak*

$$\boldsymbol{H}(A)=\overline{A}-A. \tag{9}$$

Důkaz. Množina $P-A$ je uzavřená, tedy $\overline{P-A}=P-A$, tedy

$$\boldsymbol{H}(A)=\overline{A}\,.\,\overline{P-A}=\overline{A}\,.\,(P-A)=\overline{A}-A.$$

10·4·*) *Nechť množiny G_n a V_n $(n=1,2,3,\ldots)$ jsou otevřené. Nechť $S=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\overline{G}_n$. Nechť $T\subset S$; nechť $T\subset\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$. Nechť pro $n=1,2,3,\ldots$ jest $G_n\supset G_{n+1}$, $V_n\subset G_n$. Pak je*

$$\boldsymbol{H}\left(\sum_{n=1}^{\infty}V_n\right)\subset\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{H}(V_n)+M,$$

$$M=S\,.\,\boldsymbol{H}\left(\sum_{n=1}^{\infty}V_n\right)\subset S-T.$$

Důkaz. Položme $H=\boldsymbol{H}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n\right)$, $M=SH$. Ježto $T\subset\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ a ježto množina $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ je otevřená, je $HT=\emptyset$, tedy $M\subset S-T$. Stačí ukázati ještě, že ke každému $a\in H-S$ existuje index k takový, že $a\in\boldsymbol{H}(V_k)$. Ježto $a\in H-S$, $S=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\overline{G}_n$, existuje index h takový, že $a\in P-\overline{G}_h$.

Pro $n>h$ je $V_n\subset G_n\subset G_h$, tedy $\sum\limits_{n=h+1}^{\infty}V_n\subset G_h$, tedy $\overline{\sum\limits_{n=h+1}^{\infty}V_n}\subset\overline{G}_h$, tedy $a\in P-\overline{\sum\limits_{n=h+1}^{\infty}V_n}$. Avšak

$$a\in H\subset\overline{\sum_{n=1}^{h}V_n}=\overline{V_1+\ldots+V_h+\sum_{n=h+1}^{\infty}V_n}=\overline{V}_1+\ldots+\overline{V}_h+\overline{\sum_{n=h+1}^{\infty}V_n},$$

takže $a\in\sum\limits_{n=1}^{h}\overline{V}_n$. Tedy existuje index k takový, že $a\in\overline{V}_k$. Avšak

$$a\in H\subset P-\sum_{n=1}^{\infty}V_n\subset P-V_k.$$

Tedy $a\in\overline{V}_k-V_k=\boldsymbol{H}(V_k)$.

*) Význam této věty bude patrný až ve druhém díle; je proto účelné, zatím ji vynechati a vrátiti se k ní teprve, až bude citována.

10·5·1. *Nechť* $Q \subset P$, $A \subset P$. *Pak*

$$H_Q(QA) \subset Q\,H_P(A). \tag{10}$$

Důkaz. Podle **8·7** je $H_Q(QA) = Q \,.\, \overline{QA} \,.\, \overline{Q - QA}$. Avšak podle formule (3) v **8·1** je $\overline{QA} \subset \overline{A}$, $\overline{Q - QA} \subset \overline{P - A}$, tedy $Q \,.\, \overline{QA} \,.\, \overline{Q - QA} \subset$ $\subset Q\overline{A} \,.\, \overline{P - A} = Q \,.\, H_P(A)$.

10·5·2. *Nechť* $Q \subset P$. *Nechť množina* U_0 *je otevřená v* Q. *Nechť množina* U *jest otevřená v* P; *nechť* $U_0 \subset U$. *Pak existuje množina* $V \subset U$ *otevřená v* P *a taková, že*

$$U_0 = QV,\ H_Q(U_0) = Q \,.\, H_P(V).$$

Důkaz. Množiny U_0 a $Q - \overline{U}_0$ jsou v Q otevřené a je $U_0 \,.\, (Q - \overline{U}_0) = \emptyset$. Tedy množiny U_0 a $Q - \overline{U}_0$ jsou oddělené, takže existují množiny T a W otevřené v P a takové, že $TW = \emptyset$, $T \supset U_0$, $W \supset Q - \overline{U}_0$. Ježto U_0 je otevřená v Q, podle **8·7·5** existuje množina G otevřená v P a taková, že $U_0 = Q \,.\, G$. Položme $V = GTU$, takže množina $V \subset U$ je otevřená v P. Ježto $U_0 \subset U$, $U_0 \subset T$, $U_0 = Q \,.\, G$, jest $U_0 = QV$. Ježto $V \subset T$, $Q - \overline{U}_0 \subset W$, $TW = \emptyset$ a ježto množiny T a W jsou otevřené v P, množiny V a $Q - \overline{U}_0$ jsou oddělené, takže $\overline{V} \,.\, (Q - \overline{U}_0) = \emptyset$, tedy $Q\overline{V} \subset Q\overline{U}_0$, takže, ježto $U_0 = QV$, je $Q\overline{V} - QV \subset Q\overline{U}_0 - U_0$. Avšak $Q\overline{V} - QV = Q(\overline{V} - V) = Q \,.\, H_P(V)$ a ježto $Q\overline{U}_0$ je relativní uzávěr množiny U_0 v Q, podle (9) je $Q\overline{U}_0 - U_0 = H_Q(U_0)$. Tedy $Q \,.\, H_P(V) \subset$ $\subset H_Q(U_0)$. Avšak podle (10) je také $Q \,.\, H_P(V) \supset H_Q(U_0)$.

Cvičení.

10·1. Když množiny A a B jsou uzavřené, pak množiny $A - B$ a $B - A$ jsou oddělené.

10·2. Jednobodová množina (a) a množina A jsou oddělené, když a jen když $\varrho(x, A) > 0$.

*10·3.** Nechť $m = 3, 4, 5, \ldots$ Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_m$ nazývají se *oddělené*, když pro $1 \leqq i < k \leqq m$ platí, že množiny A_i a A_k jsou oddělené. Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_m$ jsou oddělené, když a jen když: [1] jsou disjunktní, [2] jsou uzavřené v $\sum_{i=1}^{m} A_i$. Slovo uzavřené lze ve [2] nahraditi slovem otevřené.

10·4. Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_m$ jsou oddělené, když a jen když pro $1 \leqq n \leqq m - 1$ platí, že množiny $\sum_{i=1}^{n} A_i$ a A_{n+1} jsou oddělené.

Když $A \subset P$, $B \subset P$, položme $S(A, B) = A\overline{B} + B\overline{A}$. Množina $S(A, B)$ se nazývá *spojení* (*jonction*) množin A a B.

10·5. Spojení $S(A, B)$ se nezmění, když prostor P nahradíme prostorem Q, $A + B \subset Q \subset P$.

10·6. Je $S(A, B) = AB$, když a jen když obě množiny A a B jsou uzavřené v $A + B$.

10·7. $C \subset A,\ D \subset B \Rightarrow S(AS(C, , B) \supset D)$.

10·8. $\overline{A} = A + H(A)$.

10·9. Množina A je uzavřená, když a jen když $H(A) \subset A$.

10·10. Množina A je otevřená, když a jen když $A \, . \, H(A) = \emptyset$.

10·11. $H(A)$ je množina všech bodů, ve kterých charakteristická funkce množiny A je nespojitá.

10·12. Pro uzavřenou A je $H[H(A)] = H(A)$.

10·13. $H\{H[H(A)]\} = H[H(A)] \subset H(A)$.

Ve cvičeních *10·14* a *10·15* má index ι stejný význam jako ve cvič. *8·5* a násl.

10·14. $H(A_\iota) \subset H(A)$.

10·15. $\overline{[H(A)]_\iota} = \overline{A} \, . \, \overline{[H(A)]_\iota} = \overline{[H(A)]_\iota - A}$.

10·16. Nechť P a Q jsou metrické prostory; nechť $A \subset P$, $B \subset Q$. Pak $H(A \times B) = H(A) \times \overline{B} + \overline{A} \times H(B)$.

Když $A \subset P$, položme $B(A) = A \, . \, H(A)$. Množina $B(A)$ se nazývá *břeh* (*Rand, bord*) množiny A.

10·17. $H(A) = B(A) + B(P - A)$ s disjunktními sčítanci.

10·18. $B[B(A)] = B(A)$.

10·19. $H(A) = B(A) \Leftrightarrow A$ jest uzavřené.

§11. Hustě a řídce rozložené prostory.

11·1. Bod a metrického prostoru P se nazývá *isolovaným* (*isoliert, isolé, isolated*) bodem prostoru P, když existuje kladné ε takové, že $x \in P$, $\varrho(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x = a$. Prostor P se nazývá *isolovaný*, když každý jeho bod jest isolovaný.

Prostor P se nazývá *hustě rozložený* (*insichdicht, dense en soi, dense in itself*), když $P \neq \emptyset$ a P nemá isolované body.

Ježto bodová množina Q vnořená do metrického prostoru P je zase metrický prostor, nemusíme již definovati, co je isolovaný bod bodové množiny, isolovaná bodová množina, hustě rozložená bodová množina.

Zřejmě isolovaný bod množiny $A \subset P$ je isolovaným bodem každé množiny B takové, že $a \in B \subset A$. Z toho následuje, že součet $\Sigma A(z)$ je hustě rozložená množina, je-li každý sčítanec hustě rozložená množina.

11·1·1. *Množina $A \subset P$ je hustě rozložená, když a jen když množina $\overline{A}$ je hustě rozložená.*

Důkaz. I. Nechť množina A je hustě rozložená. Pak $A \neq \emptyset$, tedy $\overline{A} \neq \emptyset$. Není-li množina $\overline{A}$ hustě rozložená, má isolovaný bod a. Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $x \in \overline{A}$, $\varrho(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x = a$. Ježto $a \in \overline{A}$, je $\varrho(a, A) = 0$, takže existuje bod $b \in A$, $\varrho(a, b) < \varepsilon$. Ježto $A \subset \overline{A}$, je $b = a$, tedy $a \in A$. Ježto a je isolovaný bod množiny $\overline{A} \supset A$ a ježto $a \in A$, a je isolovaný bod množiny A. To je spor.

II. Nechť množina $\overline{A}$ je hustě rozložená. Pak $\overline{A} \neq \emptyset$, tedy $A \neq \emptyset$. Není-li množina A hustě rozložená, má isolovaný bod a. Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $x \in A$, $\varrho(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x = a$. Ježto množina $\overline{A}$ nemá isolované body a ježto $a \in A \subset \bar{A}$, existuje bod $b \in \bar{A}$ takový, že $a \neq b$, $\varrho(a, b) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ježto $b \in \bar{A}$, jest $\varrho(b, A) = 0$. Tedy existuje bod $c \in A$ takový, že $\varrho(b, c) < \varrho(a, b)$. Jest $\varrho(a, c) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, c) < 2\varrho(a, b) < \varepsilon$, $c \in A$, tedy $c = a$. To je spor, neboť $\varrho(b, c) < \varrho(a, b)$.

Nechť P je libovolný metrický prostor. Když neexistuje žádná hustě rozložená množina $A \subset P$, položme $K = \emptyset$. V opačném případě nechť K je součet všech hustě rozložených množin $A \subset P$. Podle toho, co bylo výše řečeno, množina K je hustě rozložená. Je to tedy *největší hustě rozložená množina vnořená do P*. Množina $\bar{K}$ je také hustě rozložená, takže $\bar{K} \subset K$, tedy $\bar{K} = K$ a to platí ovšem i v případě $K = \emptyset$. Množina K se nazývá *jádro* (*insichdichter Kern, noyau*) prostoru P. Jádro bodové množiny $Q \subset P$ zase už nemusíme definovati.

Mnozí autoři nazývají bodovou množinu $A \subset P$ *dokonalou* v P (*perfekt, parfait, perfect*), když A je: [1] hustě rozložená, [2] uzavřená v P. Všimněme si, že vlastnost [1] závisí pouze na množině A, kdežto vlastnost [2] také na prostoru P.

Mnozí autoři počítají $\emptyset$ mezi hustě rozložené množiny.

11·2. Prostor P se nazývá *řídce rozložený* (*separiert, clairsemé*), když jeho jádro je prázdné, tedy když neobsahuje žádnou hustě rozloženou množinu, tedy když $A \subset P$, $A \neq \emptyset$ implikuje, že A má isolovaný bod. Zase už nemusíme definovati, kdy bodová množina $Q \subset P$ je řídce rozložená.

Když prostor P je řídce rozložený, zřejmě každá množina $A \subset P$ je řídce rozložená. Zřejmě $\emptyset$ a každá isolovaná množina je řídce rozložená. Zřejmě žádná množina není současně i hustě i řídce rozložená.

11·2·1. *Když množiny $A \subset P$ a $B \subset P$ jsou řídce rozložené, také množina $A + B$ je řídce rozložená.*

Důkaz. Nechť naopak existuje hustě rozložená množina $S \subset A + B$. Ježto B je řídce rozložená, není $S \subset B$, tedy je $AS \neq \emptyset$. Podobně i $BS \neq \emptyset$. Ježto $\emptyset \neq AS \subset A$ a ježto A je řídce rozložená, existuje isolovaný bod a množiny AS. Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $x \in AS$, $\varrho(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x = a$. Ježto $a \in S$ a S je hustě rozložená, existuje bod $b \in S$ takový, že $b \neq a$, $\varrho(a, b) < \varepsilon$. Tedy není $b \in AS$, takže je $b \in BS$. Tedy množina $BS \,.\, \Omega(a, \varepsilon)$ je $\neq \emptyset$; ježto BS je řídce rozložená, množina $BS \,.\, \Omega(a, \varepsilon)$ má isolovaný bod c. Tedy existuje $\eta > 0$ takové, že $x \in BS \,.\, \Omega(a, \varepsilon)$, $\varrho(c, x) < \eta \Rightarrow x = c$. Ježto $c \in S$ a S je hustě rozložená, existuje bod $d \in S$ takový, že $d \neq c$, $\varrho(c, d) < \eta$, $\varrho(c, d) < \varepsilon -$ $- \varrho(a, c)$, $d \neq a$. [Ježto $c \in \Omega(a, \varepsilon)$, jest $\varepsilon - \varrho(a, c) > 0$.] Ježto $d \in S =$ $= AS + BS$, je $d \in AS$ nebo $d \in BS$. Avšak $d \in AS$ je nemožné, neboť $\varrho(a, d) \leqq \varrho(a, c) + \varrho(c, d) < \varepsilon$, $d \neq a$; $d \in BS$ je také nemožné, neboť $\varrho(c, d) < \eta$, $d \neq c$.

Cvičení.

11·1. Bod $a \in P$ je isolovaný, když a jen když množina (a) je otevřená. Nechť A_i znamená množinu všech isolovaných bodů bodové množiny A;

množina A_j se nazývá *adherence* množiny A a množina $A - A_j$, kterou označíme A_h, se nazývá *koherence* množiny A.

11·2. Množina A_h jest uzavřená v A.

11·3. $A \subset B \Rightarrow A_h \subset B_h$.

Množina $(\overline{A})_h$, tedy koherence uzávěru množiny A, se značí A' a nazývá se *derivace* (*Ableitung, ensemble dérivé, derived set*) množiny A. Body množiny A' se zpravidla nazývají *hromadnými body* (*Häufungspunkt, point limite, limit point*) množiny A. Kdežto A_h závisí pouze na prostoru A, závisí A' také na prostoru $P \supset A$.

11·4. $\overline{A} = A + A'$.

11·5. $A_h = A \,.\, A'$.

11·6. $A' = \overline{A} - A_j$.

11·7. $(A + B)' = A' + B'$.

11·8. Množina A' je vždy uzavřená.

11·9. A' je množina všech limit prostých konvergentních posloupností $\{x_n\}$ takových, že $x_n \in A$.

11·10. Množina A_m, složená z nuly a ze všech čísel tvaru $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i}$ $(m, n_1, n_2, \ldots, n_m = 1, 2, 3, \ldots)$ je řídce rozložená a uzavřená v prostoru E_1. Množina $A_1 - (0)$ je isolovaná. Je $A'_{m+1} = (A_{m+1})_h = A_m$. Množina $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ je hustě rozložená a není uzavřená v E_1.

11·11. Nechť $A \subset B \subset \overline{A}$. Množina B je hustě rozložená, když a jen když množina A je hustě rozložená.

11·12. Když množina A je hustě rozložená, také množina A' je hustě rozložená.

11·13. Když prostor je hustě rozložený, pak každá otevřená množina $\neq \emptyset$ je hustě rozložená.

11·14. Prostor P je isolovaný, když a jen když každá funkce v oboru P je spojitá.

V následujících cvičeních P a Q jsou dva dané metrické prostory.

11·15. Nechť $a \in P$, $b \in Q$. Bod (a, b) je isolovaný v $P \times Q$, když a jen když i bod a je isolovaný v P i bod b v Q.

11·16. Když P je hustě rozložený a $Q \neq \emptyset$, pak $P \times Q$ je hustě rozložený.

11·17. Když $P \times Q$ je hustě rozložený, pak buďto P nebo Q je hustě rozložený.

11·18. Když P a Q jsou řídce rozložené, pak $P \times Q$ je řídce rozložený.

11·19. Když $P \neq \emptyset \neq Q$ a když $P \times Q$ je řídce rozložený, pak P a Q jsou řídce rozložené.

§12. Husté a řídké množiny. Množiny první kategorie.

12·1. Nechť P je metrický prostor. Bodová množina $A \subset P$ se nazývá *hustá* (*dicht, dense, dense*), určitěji hustá v P, když $\overline{A} = P$, tedy když $\varrho(x, A) = 0$ pro každý bod $x \in P$. Hustota množiny A (stejně jako uzavřenost nebo otevřenost) je tedy topologická vlastnost, závislá na „poloze“ množiny A v prostoru P, na rozdíl od husté rozloženosti, která závisí pouze na „tvaru" prostoru A. Z definice je zřejmá věta:

12·1·1. *Když $A \subset B \subset P$ a když množina A je hustá, také B je hustá.*

12·1·2. *Množina $A \subset P$ je hustá, když a jen když pro každou otevřenou $G \neq \emptyset$ jest $AG \neq \emptyset$.*

Důkaz. I. Nechť $\overline{A} = P$. Nechť G je otevřená a nechť $AG = \emptyset$. Pak $A \subset P - G$, tedy $P = \overline{A} \subset \overline{P - G} = P - G$, tedy $G = \emptyset$.

II. Nechť $\overline{A} \neq P$. Množina $G = P - \overline{A}$ je otevřená a $G \neq \emptyset = AG$.

12·1·3. *Nechť množina A je hustá; nechť množina G je otevřená a hustá. Pak množina AG je hustá.*

Důkaz. Nechť $\Gamma \neq \emptyset$ je otevřená. Množina $G\Gamma$ je otevřená a $\neq \emptyset$, ježto G je hustá. Tedy $A \,.\, G\Gamma \neq \emptyset$, ježto A je hustá. Tedy $AG \,.\, \Gamma \neq \emptyset$ pro každou otevřenou $\Gamma \neq \emptyset$, takže AG je hustá.

12·2. Množina $A \subset P$ se nazývá *řídká* (*nirgendsdicht, non dense, nowhere dense*), určitěji řídká v P, když množina $P - \overline{A}$ je hustá. Je to zase topologická vlastnost závislá na poloze množiny A v prostoru P, na rozdíl od řídké rozloženosti, která závisí pouze na tvaru prostoru A.

12·2·1. *Když $A \subset B \subset P$ a když B je řídká, také A je řídká.*

Důkaz. Jest $\overline{P - \overline{B}} = P$. Jest $\overline{A} \subset \overline{B}$, tedy $P - \overline{A} \supset P - \overline{B}$, tedy $\overline{P - \overline{A}} \supset \overline{P - \overline{B}} = P$, tedy $\overline{P - \overline{A}} = P$.

Z definice je zřejmá věta:

12·2·2. *Když $\overline{A} = \overline{B}$* (na př. když $A \subset B \subset \overline{A}$) *a když množina A je řídká, také B je řídká.*

12·2·3. *Množina $A \subset P$ je řídká, když a jen když každá otevřená $G \neq \emptyset$ obsahuje otevřenou $\Gamma \neq \emptyset$ takovou, že $A\Gamma = \emptyset$.*

Důkaz. I. Nechť A je řídká, tedy $P - \overline{A}$ hustá. Když otevřená G je $\neq \emptyset$, je $\Gamma = G(P - \overline{A}) \neq \emptyset$. Množina Γ je otevřená a $A\Gamma = \emptyset$.

II. Nechť A není řídká, tedy $P - \overline{A}$ není hustá. Pak existuje otevřená $G \neq \emptyset$ taková, že $G(P - \overline{A}) = \emptyset$, t. j. $G \subset \overline{A}$. Nechť množina $\Gamma \subset G$ je otevřená a $\neq \emptyset$. Máme dokázati, že $A\Gamma \neq \emptyset$. Nechť naopak $A\Gamma = \emptyset$; pak $A \subset P - \Gamma$, tedy $\Gamma \subset G \subset \overline{A} \subset \overline{P - \Gamma} = P - \Gamma$, tedy $\Gamma = \emptyset$, což je spor.

12·2·4. *Nechť množiny A_i $(1 \leqq i \leqq m;\ m = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou řídké. Pak množina $\sum_{i=1}^{m} A_i$ je řídká.*

Důkaz. Pro $m = 1$ zřejmé. Platí-li věta pro určité m a jsou-li množiny A_i $(1 \leqq i \leqq m + 1)$ řídké, pak množiny $\sum_{i=1}^{m} A_i$ a A_{m+1} jsou řídké, tedy množiny $P - \overline{\sum_{i=1}^{m} A_i} = P - \sum_{i=1}^{m} \overline{A}_i$ a $P - \overline{A}_{m+1}$ jsou husté. Ježto

množina $P - \overline{A}_{m+1}$ je otevřená, množina $\left(P - \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{A}_i\right)(P - \overline{A}_{m+1}) =$
$= P - \sum\limits_{i=1}^{m+1} \overline{A}_i = P - \overline{\sum\limits_{i=1}^{m+1} A_i}$ je hustá (podle **12·1·3**), tedy množina $\sum\limits_{i=1}^{m+1} A_i$ je řídká.

12·3. Množina $A \subset P$ se nazývá množinou *prvé kategorie* (*erster Kategorie, de première catégorie, of first category*), určitěji prvé kategorie v P, když existuje posloupnost $\{A_n\}$ řídkých množin taková, že $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Je to zase topologická vlastnost polohy množiny A v prostoru P. Mnozí autoři nazývají *množinou druhé kategorie* množinu, která není prvé kategorie. Mnozí autoři nazývají *residuel* množinu A takovou, že množina $P - A$ je prvé kategorie.

12·3·1. *Když $A \subset B \subset P$ a když množina B je prvé kategorie, také A je prvé kategorie.*

Důkaz. Jest $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ s řídkými B_n. Jest $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} AB_n$ a množiny $AB_n \subset B_n$ jsou řídké.

Z definice je zřejmé ($A_n = A$):

12·3·2. *Řídká množina je množina prvé kategorie.*

12·3·3. *Když množiny A_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) jsou prvé kategorie, také $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ je prvé kategorie.*

Důkaz. Jest $A_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_{ni}$ s řídkými A_{ni}. Podle **3·5** existuje prostá posloupnost $\{(n_k, i_k)\}_{k=1}^{\infty}$ všech párů (n, i). Jest $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k, i_k}$.

12·4. Nechť bodová množina Q je vnořena do metrického prostoru P. Pak (v. **6·3**) Q je také metrický prostor. Bodová množina A vnořená do Q je také vnořena do P. A může býti hustá v Q, hustá v P, řídká v Q, řídká v P, prvé kategorie v Q, prvé kategorie v P.

12·4·1. *Množina $A \subset Q$ je hustá v Q, když a jen když $\overline{A} \supset Q$ a když a jen když $\overline{A} = \overline{Q}$.*

Důkaz. Podle **8·7·1** A je hustá v Q, když a jen když $Q \,.\, \overline{A} = Q$. Avšak $Q \,.\, \overline{A} = Q \Rightarrow Q \subset \overline{A} \subset \overline{Q} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = \overline{Q} \Rightarrow Q\overline{A} = Q\overline{Q} = Q$.

12·4·2. *Když množina $A \subset Q$ je hustá v P, pak A je hustá v Q a Q je hustá v P.*

Důkaz. Jest $\overline{A} = P$, tedy $\overline{A} \supset Q$, t. j. A je hustá v Q. Q je hustá v P podle **12·1·1**.

12·4·3. *Když množina $A \subset Q$ je hustá v Q a když Q je hustá v P, pak A je hustá v P.*

Důkaz. Jest $\overline{A} = \overline{Q}$, $\overline{Q} = P$, tedy $\overline{A} = P$.

12·4·4. *Když množina $A \subset Q$ je řídká v Q, pak A je řídká v P.*

Důkaz. Nechť množina $G \neq \emptyset$ je otevřená v P. Máme dokázati, že existuje množina $\Gamma \subset G$ otevřená v P a taková, že $\Gamma \neq \emptyset = A\Gamma$. Ježto $A \subset Q$, v případě $QG = \emptyset$ mohu voliti $\Gamma = G$. Nechť tedy $QG \neq \emptyset$. Množina QG je otevřená v Q a neprázdná; ježto A je řídká v Q, existuje množina $\Delta \subset QG$ otevřená v Q a taková, že $\Delta \neq \emptyset = A\Delta$. Ježto Δ je otevřená v Q, existuje množina H otevřená v P a taková, že $\Delta = QH$. Nechť $\Gamma = GH$. Množina Γ je otevřená v P a jest $\Gamma \subset G$. Ježto $\Delta \subset QG$, $\Delta = QH$, je $\Delta = Q\Gamma$, tedy $\Gamma \neq \emptyset$, neboť bylo $\Delta \neq \emptyset$. Ježto $A \subset Q$, $\Delta = Q\Gamma$, jest $A\Gamma = A\Delta = \emptyset$.

12·4·5. *Když množina $A \subset Q$ je prvé kategorie v Q, pak A je prvé kategorie v P.*

Důkaz. Jest $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde množiny A_n jsou řídké v Q, tedy řídké v P.

Cvičení.

12·1. Množina A hustá v P obsahuje každý isolovaný bod prostoru P.

*12·2.** Množina A je hustá v P, když a jen když každému bodu $x \in P$ lze přiřaditi posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $x_n \in A$, $x_n \to x$.

*12·3.** Když množina A je hustá v P a když množina G je otevřená v P, pak množina AG je hustá v G.

12·4. Když množina A je hustá v prostoru P, pak A je hustě rozložená, když a jen když P je hustě rozložený.

*12·5.** Konečná množina A je řídká v prostoru P, když a jen když neobsahuje žádný isolovaný bod prostoru.

12·6. Když množina A je řídká v $\overline{Q}$, pak AQ je řídká v Q.

*12·7.** Když množina A je uzavřená nebo otevřená nebo řídká, pak množina $H(A)$ je řídká.

12·8. Když množiny $H(A)$ a $H(B)$ jsou řídké, pak množiny $H(A + B)$, $H(AB)$, $H(A - B)$ jsou řídké.

12·9. Když množina G je otevřená a když množina A je řídká, pak množina AG je řídká v G a množina $A\overline{G}$ je řídká v $\overline{G}$.

12·10. Nechť množina $A \subset P$ je řídce rozložená. Nechť prostor P je hustě rozložený. Pak A je řídká v P.

12·11. Když množiny A a B jsou oddělené, pak množina $\overline{A}\,.\,\overline{B}$ je řídká.

12·12. Množina prvé kategorie neobsahuje žádný isolovaný bod prostoru.

*12·13.** Spočetná množina je prvé kategorie, když a jen když neobsahuje žádný isolovaný bod prostoru.

12·14. Když množina A je prvé kategorie v $\overline{Q}$, pak množina AQ je prvé kategorie v Q.

12·15. Když množina G je otevřená a když množina A je prvé kategorie, pak množina AG je prvé kategorie v G a množina $A\overline{G}$ je prvé kategorie v $\overline{G}$.

V následujících cvičeních P a Q jsou dva dané metrické prostory, $A \subset P$, $B \subset Q$.

12·16. Když A je hustá v P a když B je hustá v Q, pak $A \times B$ je hustá v $P \times Q$.

12·17. Když $P \neq \emptyset \neq Q$ a když $A \times B$ je hustá v $P \times Q$, pak A je hustá v P a B je hustá v Q.

12·18. Když A je řídká v P, pak $A \times B$ je řídká v $P \times Q$.

12·19. Když $A \times B$ je řídká v $P \times Q$, pak buďto A je řídká v P nebo B je řídká v Q.

§13. Množiny G_δ a F_σ.

13·1. O bodové množině A vnořené do metrického prostoru P pravíme, že je G_δ, určitěji, že je $\mathsf{G}_\delta(P)$, když existují *otevřené* množiny $A_n \subset P$ takové, že $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Dokonce *pak existují otevřené množiny* $G_n \subset P$ *takové, že* $A = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, $G_n \supset G_{n+1}$; stačí voliti $G_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Pojem množiny G_δ je *topologický pojem.*

Zřejmé je:

13·1·1. *Každá otevřená množina* A je G_δ (stačí voliti $A_n = A$).

13·1·2. *Když množiny* A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *jsou* G_δ, *pak také množina* $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ *je* G_δ.

Důkaz. Existují otevřené množiny A_{ni} takové, že $A_n = \prod_{i=1}^{\infty} A_{ni}$. Podle **3·5** existuje prostá posloupnost $\{(n_k, i_k)\}_{k=1}^{\infty}$ všech párů (n, i). Jest $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \prod_{k=1}^{\infty} A_{n_k, i_k}$.

13·1·3. *Když množiny* A *a* B *jsou* G_δ, *pak také množina* $A + B$ je G_δ.

Důkaz. Existují otevřené množiny A_n a B_i takové, že $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \prod_{i=1}^{\infty} B_i$. Je-li opět $\{(n_k, i_k)\}_{k=1}^{\infty}$ prostá posloupnost všech párů (n, i), pak, ježto množiny $A_n + B_i$ jsou otevřené, stačí dokázati, že

$$A + B = \prod_{k=1}^{\infty} (A_{n_k} + B_{i_k}).$$

Že levá strana je podmnožinou pravé, je zřejmé. Nechť tedy $x \in \prod_{k=1}^{\infty} (A_{n_k} + B_{i_k})$. Kdyby nebylo $x \in A + B$, nebylo by ani $x \in A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ ani $x \in \prod_{i=1}^{\infty} B_i$; tedy by existovaly indexy n a i takové, že by nebylo ani $x \in A_n$ ani $x \in B_i$, tedy ani $x \in A_n + B_i$. To je spor, neboť existuje index k takový, že $n = n_k$, $i = i_k$ a jest $x \in A_{n_k} + B_{i_k}$.

13·2. *Každá uzavřená množina A je* G_δ. *Dokonce ke každé uzavřené množině A lze udati otevřené množiny G_n takové, že*

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} G_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n, \quad \overline{G}_{n+1} \subset G_n.$$

Důkaz. Položme $G_n = \Omega\left(A, \frac{1}{n}\right) = \mathop{\mathrm{E}}_x\left[\varrho(x, A) < \frac{1}{n}\right]$. Podle **9·5** a podle cvič. *9·10* množiny G_n jsou otevřené. (To je správné i pro $A = \emptyset$, neboť pak $G_n = \emptyset$.) Mimo to množiny $\mathop{\mathrm{E}}_x\left[\varrho(x, A) \leqq \frac{1}{n}\right]$ jsou uzavřené, takže podle **8·4** jest $\overline{G}_n \subset \mathop{\mathrm{E}}_x\left[\varrho(x, A) \leqq \frac{1}{n}\right]$, tedy $A \subset G_n \subset \overline{G}_n \subset$ $\subset G_{n-1}$, takže $A \subset \prod_{n=1}^{\infty} G_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n$. Zbývá dokázati, že také $A \supset \prod_{n=1}^{\infty} G_n$. Když $x \in \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, pak $\varrho(x, A) < \frac{1}{n}$ pro každé n, tedy $\varrho(x, A) = 0$, tedy $x \in \overline{A} = A$.

13·3. O bodové množině A vnořené do metrického prostoru P pravíme, že je F_σ, určitěji, že je $\mathsf{F}_\sigma(P)$, když existují *uzavřené* množiny $A_n \subset P$ takové, že $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Dokonce *pak existují uzavřené množiny $F_n \subset P$ takové, že $A = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \subset F_{n+1}$*; stačí voliti $F_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Pojem množiny F_σ je *topologický pojem.*

13·3·1. *Množina A je F_σ, když a jen když množina $P - A$ je* G_δ. Neboť

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow P - A = \prod_{n=1}^{\infty} (P - A_n),$$

$$P - A = \prod_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} (P - B_n).$$

Tedy z předcházejících vět následuje:

13·3·2. *Každá uzavřená množina je* F_σ.

13·3·3. *Když množiny A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou F_σ, pak také množina $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ je* F_σ.

13·3·4. *Když množiny A a B jsou F_σ, pak také množina AB je* F_σ.

13·3·5. *Každá otevřená množina je* F_σ.

13·4. *Nechť f je zobrazení metrického prostoru P do metrického pro-*

storu Q. Nechť C je množina těch $x \in P$, ve kterých zobrazení f je spojité; nechť $D = P - C$. Pak C je $\mathbf{G}_\delta(P)$, tedy D je $\mathbf{F}_\sigma(P)$.

Důkaz. Snadno se nahlédne, že C je množina těch $x \in P$, které pro každé n ($= 1, 2, 3, \ldots$) mají (v prostoru P) okolí G takové, že

$$y \in G,\ z \in G \Rightarrow \varrho[f(y), f(z)] < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Nechť (pro $n = 1, 2, 3, \ldots$) $\mathfrak{A}_n$ je systém všech v P otevřených množin G s vlastností (1). Pak množiny $\Gamma_n = \sum_{X \in \mathfrak{A}_n} X$ jsou otevřené v P a $C = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, takže C je $\mathbf{G}_\delta(P)$.

13·5. *Nechť $A \subset B \subset P$. Nechť A je $\mathbf{G}_\delta$ a nechť B je $\mathbf{F}_\sigma$. Pak existuje množina $C \subset P$ taková, že:* [1] C je $\mathbf{G}_\delta$, [2] C je $\mathbf{F}_\sigma$, [3] $A \subset C \subset B$.

Důkaz. Jest $A = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, kde G_n jsou otevřené a F_n jsou uzavřené. Definujme rekurentně množiny H_n a K_n takto:

$$H_1 = G_1,\ K_1 = G_1 F_1,\ H_{n+1} = K_n + \prod_{i=1}^{n+1} G_i,\ K_{n+1} = H_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} F_i. \tag{1}$$

Nechť

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} H_n,\ K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{2}$$

Indukcí se dokáže, že množiny H_n a K_n jsou současně $\mathbf{G}_\delta$ i $\mathbf{F}_\sigma$, takže množina H je $\mathbf{G}_\delta$ a množina K je $\mathbf{F}_\sigma$. Tedy stačí ukázati, že

$$A \subset H = K \subset B.$$

Z (1) následuje, že

$$K_n \subset H_n. \tag{3}$$

Mimo to $\prod_{i=1}^{n+1} G_i \subset \prod_{i=1}^{n} G_i \subset H_n$, takže

$$H_{n+1} \subset H_n. \tag{4}$$

Konečně $K_n \subset \sum_{i=1}^{n} F_i \subset \sum_{i=1}^{n+1} F_i$, $K_n \subset H_{n+1}$, takže

$$K_{n+1} \supset K_n. \tag{5}$$

I. Nechť $x \in A$. Pak pro všecka i je $x \in G_i$, tedy podle (1) je $x \in H_n$ pro všecka n, tedy $x \in H$. Tedy $A \subset H$.

II. Nechť $x \in K$. Pak existuje index m takový, že $x \in K_m$. Podle (1) $K_m \subset \sum_{i=1}^{m} F_i$, tedy $x \in \sum_{i=1}^{\infty} F_i = B$. Tedy $K \subset B$.

III. Nechť $x \in K$. Pak existuje index m takový, že $x \in K_m$. Podle (5) tedy $n \geqq m \Rightarrow x \in K_n$. Tedy podle (3) $n \geqq m \Rightarrow x \in H_n$, takže podle (4) $x \in \prod_{n=1}^{\infty} H_n = H$. Tedy $K \subset H$.

IV. Nechť $x \in H - K$. Pak pro všecka n je $x \in H_{n+1} - K_n \subset \prod_{i=1}^{n+1} G_i$. Tedy $x \in \prod_{n=1}^{\infty} G_n = A \subset B = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, takže existuje index m takový, že $x \in \sum_{n=1}^{m} F_n$. Ježto také $x \in H_m$, jest $x \in H_m \cdot \sum_{n=1}^{m} F_n = K_m$, což je spor. Tedy $H - K = \emptyset$, t. j. $H \subset K$.

13·6. Nechť Q je bodová množina vnořená do metrického prostoru P, takže také Q je metrický prostor.

13·6·1. *Množina $A \subset Q$ je $\mathbf{G}_\delta(Q)$ tehdy a jen tehdy, když existuje množina B taková, že:* [1] $A = QB$, [2] B je $\mathbf{G}_\delta(P)$.

Důkaz. I. Nechť A je $\mathbf{G}_\delta(Q)$. Pak jest $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou otevřené v Q. Podle **8·7·5** existují v P otevřené množiny B_n takové, že $A_n = QB_n$. Stačí položiti $B = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$.

II. Nechť B je $\mathbf{G}_\delta(P)$. Pak $B = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$, kde B_n jsou otevřené v P. Množiny QB_n jsou otevřené v Q, takže $QB = \prod_{n=1}^{\infty} QB_n$ je $\mathbf{G}_\delta(Q)$.

Zcela stejně se dokáže:

13·6·2. *Množina $A \subset Q$ je $\mathbf{F}_\sigma(Q)$ tehdy a jen tehdy, když existuje množina B taková, že:* [1] $A = QB$, [2] B je $\mathbf{F}_\sigma(P)$.

Cvičení.

Když A je bodová množina vnořená do metrického prostoru P, pak pravíme: [1] že A je $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$, určitěji $\mathbf{G}_{\delta\sigma}(P)$, když existují množiny $A_n \subset P$ takové, že $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ a že každá A_n je $\mathbf{G}_\delta$; [2] že A je $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$, určitěji $\mathbf{F}_{\sigma\delta}(P)$, když existují množiny $A_n \subset P$ takové, že $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ a že každá A_n je $\mathbf{F}_\sigma$.

13·1. Množina A je $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$, když a jen když $P - A$ je $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$.

13·2. Když A je $\mathbf{G}_\delta$ nebo když A je $\mathbf{F}_\sigma$, pak A je současně i $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$ i $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$.

13·3. Když množiny A_n jsou $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$, pak množina $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ je $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$.

13·4. Když množiny A_n jsou $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$, pak množina $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ je $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$.

13·5. Když množiny A a B jsou $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$, pak množina AB je $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$.

13·6. Když množiny A a B jsou $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$, pak množina $A + B$ je $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$.

*13·7.** Nechť f je spojité zobrazení metrického prostoru P do metrického prostoru Q. Nechť $A \subset Q$. Když A je $\mathsf{G}_\delta(Q)$, pak $f_{-1}(A)$ je $\mathsf{G}_\delta(P)$; když A je $\mathsf{F}_\sigma(Q)$, pak $f_{-1}(A)$ je $\mathsf{F}_\sigma(P)$; když A je $\mathsf{G}_{\delta\sigma}(Q)$, pak $f_{-1}(A)$ je $\mathsf{G}_{\delta\sigma}(P)$; když A je $\mathsf{F}_{\sigma\delta}(Q)$, pak $f_{-1}(A)$ je $\mathsf{F}_{\sigma\delta}(P)$.

13·8. Nechť $A \subset B \subset P$. Nechť A je $\mathsf{F}_{\sigma\delta}$ a nechť B je $\mathsf{G}_{\delta\sigma}$. Pak existuje množina $C \subset P$ taková, že: [1] C je $\mathsf{G}_{\delta\sigma}$, [2] C je $\mathsf{F}_{\sigma\delta}$, [3] $A \subset C \subset B$.

13·9. Nechť $A \subset Q \subset P$. Množina A je $\mathsf{G}_{\delta\sigma}(Q)$, když a jen když existuje množina $B \subset P$ taková, že: [1] $A = QB$, [2] B je $\mathsf{G}_{\delta\sigma}(P)$. Množina A je $\mathsf{F}_{\sigma\delta}(Q)$, když a jen když existuje množina $B \subset P$ taková, že: [1] $A = QB$, [2] B je $\mathsf{F}_{\sigma\delta}(P)$.

*13·10.** Nechť $A \subset Q \subset P$. Když Q je $\mathsf{G}_\delta(P)$, pak A je $\mathsf{G}_\delta(P)$ tehdy a jen tehdy, když je $\mathsf{G}_\delta(Q)$. Zde je dovoleno místo G_δ psáti (současně a stejně na všech místech) buďto F_σ nebo $\mathsf{G}_{\delta\sigma}$ nebo $\mathsf{F}_{\sigma\delta}$.

*13·11.** Každá spočetná množina $A \subset P$ je $\mathsf{F}_\sigma(P)$.

13·12. Když množina $A \subset P$ je prvé kategorie, pak existuje množina $B \subset P$ taková, že: [1] $A \subset B$, [2] B je F_σ, [3] B je prvé kategorie.

13·13. Nechť množina $A \subset P$ je F_σ. Nechť množina $P - A$ je hustá. Pak množina A je prvé kategorie.

13·14. Nechť P a Q jsou dva metrické prostory. Nechť $C \subset P \times Q$. Pro $x \in P$ položme $\sigma''_x(C) = \underset{y}{\mathrm{E}}[(x, y) \in C]$. Je-li množina C v prostoru $P \times Q$ otevřená (uzavřená, F_σ, G_δ, $\mathsf{F}_{\sigma\delta}$, $\mathsf{G}_{\delta\sigma}$), je také množina $\sigma''_x(C)$ pro každé $x \in P$ v prostoru Q otevřená (uzavřená, F_σ, G_δ, $\mathsf{F}_{\sigma\delta}$, $\mathsf{G}_{\delta\sigma}$). Obdobně pro $\sigma'_y(C) = \underset{x}{\mathrm{E}}[(x, y) \in C]$ $(y \in Q)$.

13·15. Nechť P a Q jsou dva metrické prostory. Nechť $\emptyset \neq A \subset P$, $\emptyset \neq B \subset Q$. Množina $A \times B$ je $\mathsf{G}_\delta(P \times Q)$ tehdy a jen tehdy, když množina A je $\mathsf{G}_\delta(P)$ a mimo to množina B je $\mathsf{G}_\delta(Q)$. Zde je dovoleno místo G_δ psáti (současně a stejně na všech třech místech) buďto F_σ nebo $\mathsf{G}_{\delta\sigma}$ nebo $\mathsf{F}_{\sigma\delta}$.

§ 14. Funkce první třídy.

14·1. Nechť P je metrický prostor. Nechť f je funkce v oboru P. Pravíme, že f je *funkce první třídy* (*erster Klasse, de première classe, of the first class*), když existuje posloupnost $\{f_n\}$ *spojitých* funkcí v oboru P taková, že $f_n(x) \to f(x)$ pro každý bod $x \in P$. Můžeme vždy docíliti toho, že funkce f_n jsou *konečné*; nejsou-li, stačí je nahraditi funkcemí g_n takto definovanými:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= f_n(x), && \text{když } |f_n(x)| \leqq n, \\ g_n(x) &= n, && \text{když } f_n(x) > n, \\ g_n(x) &= -n, && \text{když } f_n(x) < -n. \end{aligned}$$

Následující věty jsou zřejmé:

14·1·1. *Spojitá funkce je první třídy.*

14·1·2. *Jsou-li c_i reálná čísla a jsou-li f_i konečné funkce první třídy, pak $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i$ je konečná funkce první třídy.*

14·1·3. *Je-li Q bodová množina vnořená do metrického prostoru P*

a je-li f funkce první třídy v oboru P, pak parciální funkce f_Q je první třídy v oboru Q.

14·2. Jsou-li f a f_n konečné funkce v oboru P, pravíme, že f je *stejnoměrná limita* posloupnosti $\{f_n\}$, když lze každému $\varepsilon > 0$ přiřaditi index p takový, že pro všecky body $x \in P$

$$n \geqq p \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Index p závisí ovšem pouze na ε, nikoli na x (jinak by každá limita byla stejnoměrná).

14·2·1. *Nechť f je konečná funkce. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konečných funkcí první třídy. Nechť f je stejnoměrná limita posloupnosti $\{f_n\}$. Pak f je funkce první třídy.*

Důkaz. Pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ existuje index n_i takový, že

$$n \geqq n_i \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^{i+1}},$$

tedy

$$m \geqq n_i,\ n \geqq n_i \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^i}.$$

Zřejmě můžeme předpokládati, že $n_1 < n_2 < \ldots$ Položme

$$F(x) = f(x) - f_{n_1}(x),\ F_i(x) = f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pak jest $|F_i(x)| < \dfrac{1}{2^i}$ a

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} F_i(x) = \lim_{m\to\infty} [f_{n_{m+1}}(x) - f_{n_1}(x)] = f(x) - f_{n_1}(x) = F(x)$$

Ježto $f(x) = F(x) + f_{n_1}(x)$, stačí dokázati, že funkce F je první třídy. Funkce F_i jsou první třídy, takže existují konečné spojité funkce ψ_{in} takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_{in}(x) = F_i(x)$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ a pro každý $x \in P$. Definujme funkce φ_{in} takto:

$$\varphi_{in}(x) = \psi_{in}(x) \quad \text{pro} \quad |\psi_{in}(x)| < \frac{1}{2^i},$$

$$\varphi_{in}(x) = \frac{1}{2^i} \quad \text{pro} \quad \psi_{in}(x) \geqq \frac{1}{2^i},$$

$$\varphi_{in}(x) = -\frac{1}{2^i} \quad \text{pro} \quad \psi_{in}(x) \leqq -\frac{1}{2^i}.$$

Pak φ_{in} jsou spojité funkce; ježto $|F_i(x)| < \dfrac{1}{2^i}$, jest

$$|\varphi_{in}(x) - F_i(x)| \leqq |\psi_{in}(x) - F_i(x)|,$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{in}(x) = F_i(x)$. Položme

$$\Phi_n(x) = \varphi_{1n}(x) + \ldots + \varphi_{nn}(x).$$

Funkce Φ_n jsou spojité, takže stačí odvoditi, že $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x) = F(x)$.

Zvolme bod $x \in P$ a číslo $\varepsilon > 0$. Zvolme index k tak, že $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{3}$ a že $\left| F(x) - \sum\limits_{i=1}^{k} F_i(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ježto $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{in}(x) = F_i(x)$, existuje index $m > k$ takový, že pro $i = 1, 2, \ldots, k$ a pro všecka $n > m$ jest $| \varphi_{in}(x) - F_i(x) | < \frac{\varepsilon}{3k}$. Nechť $n > m$. Pak

$$| \Phi_n(x) - F(x) | \leqq \left| \sum_{i=1}^{k} F_i(x) - F(x) \right| + \sum_{i=1}^{k} | \varphi_{in}(x) - F_i(x) | +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{\infty} | \varphi_{in}(x) | < \frac{\varepsilon}{3} + k \cdot \frac{\varepsilon}{3k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Tedy $n > m \Rightarrow | \Phi_n(x) - F(x) | < \varepsilon$, takže $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x) = F(x)$.

14·3. 14·3·1. *Nechť P je metrický prostor. Nechť f je funkce v oboru P. Nutná a postačující podmínka, aby funkce f byla prvé třídy, jest, aby pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ a $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ byly $\mathsf{F}_\sigma(P)$.*

Jiný tvar podmínky jest: aby pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \leqq c]$ a $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \geqq c]$ byly $\mathsf{G}_\delta(P)$.

Důkaz. I. Nechť funkce f je prvé třídy a nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí taková, že $f_n(x) \to f(x)$ pro každý $x \in P$. Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Je-li $f(x) > c$, pak existuje index m takový, že

$$n \geqq m \Rightarrow f_n(x) \geqq c + \frac{1}{m}. \tag{1}$$

Obráceně, existuje-li index m takový, že platí (1), jest $f(x) > c$. Tedy

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c] = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=m}^{\infty} A_{nm}, \; A_{nm} = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[f_n(x) \geqq c + \frac{1}{m}\right].$$

Ježto funkce f_n jsou spojité, podle **9·5** množiny A_{nm} jsou uzavřené, takže také množiny $\prod\limits_{n=m}^{\infty} A_{nm}$ jsou uzavřené a tedy množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ je F_σ. Stejně se dokáže, že i množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ je F_σ. Tedy množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \leqq c]$ a $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \geqq c]$ jsou $\mathsf{G}_\delta(P)$ podle **13·3·1.**

II. Nechť f je charakteristická funkce množiny A, která je současně i G_δ i F_σ. Dokažme, že f je funkce prvé třídy. Ježto A je i G_δ i F_σ, existují uzavřené množiny F_n a otevřené množiny G_n takové, že

$$F_n \subset F_{n+1},\ G_{n+1} \subset G_n,\ A = \sum_{n=1}^{\infty} F_n = \prod_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Je-li $F_n \neq \emptyset$ a $G_n \neq P$, položme

$$f_n(x) = \frac{\varrho(x, P - G_n)}{\varrho(x, F_n) + \varrho(x, P - G_n)};$$

ježto množiny F_n a $P - G_n$ jsou uzavřené, jest $\varrho(x, F_n) = 0$ pouze pro $x \in F_n$ a $\varrho(x, P - G_n) = 0$ pouze pro $x \in P - G_n$; ježto $F_n \subset G_n$, jest $\varrho(x, F_n) + \varrho(x, P - G_n) > 0$ pro každý bod x. Funkce f_n podle cvič. *9·10* je spojitá a má zřejmě tyto vlastnosti:

$$x \in F_n \Rightarrow f_n(x) = 1,\ x \in P - G_n \Rightarrow f_n(x) = 0. \tag{2}$$

Je-li $F_n = \emptyset$ a $G_n \neq P$, položme $f_n(x) = 0$ pro každý bod x; je-li $G_n = P$, položme $f_n(x) = 1$ pro každý bod x; v obou případech zase f_n je spojitá funkce s vlastnostmi (2). Stačí ukázati, že $f_n(x) \to f(x)$ pro každý bod x. Je-li *předně* $x \in A = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, existuje index m takový, že $x \in F_m$. Ježto $F_n \subset F_{n+1}$, jest

$$n \geqq m \Rightarrow x \in F_n \Rightarrow f_n(x) = 1,$$

tedy $\lim f_n(x) = 1 = f(x)$. Je-li *za druhé* $x \in P - A = P - \prod_{n=1}^{\infty} G_n = \sum_{n=1}^{\infty} (P - G_n)$, existuje index m takový, že $x \in P - G_m$. Ježto $G_{n+1} \subset G_n$, jest

$$n \geqq m \Rightarrow x \in P - G_n \Rightarrow f_n(x) = 0,$$

tedy $\lim f_n(x) = 0 = f(x)$.

III. Nechť funkce f je konečná a nabývá pouze konečného počtu hodnot $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Nechť každá z množin $C_i = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = c_i]$ $(1 \leqq i \leqq m)$ je současně G_δ i F_σ. Je-li f_i charakteristická funkce množiny C_i, zřejmě $f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x)$ pro každý bod x. Podle II funkce f_i jsou prvé třídy, takže i funkce f je prvé třídy.

IV. Nechť funkce f je taková, že: [1] $-1 \leqq f(x) \leqq 1$ pro každý bod x; [2] množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ a $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ jsou F_σ pro každé reálné číslo c. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ a pro celé i takové, že $-n \leqq i \leqq n - 1$ nechť

$$A_{in} = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{i}{n} \leqq f(x) \leqq \frac{i+1}{n}\right] = P - \left(\underset{x}{\mathrm{E}}\left[f(x) < \frac{i}{n}\right] + \underset{x}{\mathrm{E}}\left[f(x) > \frac{i+1}{n}\right]\right),$$

$$B_{in} = \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[\frac{i-1}{n} < f(x) < \frac{i+2}{n}\right] = \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[f(x) > \frac{i-1}{n}\right] . \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[f(x) < \frac{i+2}{n}\right].$$

Pak jest

$$P = \sum_{i=-n}^{n-1} A_{in}, \quad A_{in} \subset B_{in}, \quad x \in B_{in} \Rightarrow \left| f(x) - \frac{i}{n} \right| < \frac{2}{n},$$

množiny B_{in} jsou F_σ a množiny A_{in} jsou G_δ. Podle **13·5** existují množiny C_{in} takové, že: [1] $A_{in} \subset C_{in} \subset B_{in}$, takže $\sum_{i=-n}^{n-1} C_{in} = P$ a $x \in C_{in} \Rightarrow \left| f(x) - \frac{i}{n} \right| < \frac{2}{n}$, [2] C_{in} jsou F_σ, [3] C_{in} jsou G_δ. Položme $D_{-n,n} = C_{-n,n}$, $D_{i+1,n} = C_{i+1,n} - \sum_{j=-n}^{i} C_{jn} (-n \leqq i \leqq n-2)$. Pak jest: [1] $P = \sum_{i=-n}^{n-1} D_{in}$ s disjunktními sčítanci, [2] $x \in D_{in} \Rightarrow \left| f(x) - \frac{i}{n} \right| < \frac{2}{n}$, [3] D_{in} jsou F_σ, [4] D_{in} jsou G_δ. Podle vlastnosti [1] množin D_{in} existují funkce f_n v oboru P takové, že $x \in D_{in} \Rightarrow f_n(x) = \frac{i}{n}$. Podle vlastností [3] a [4] množin D_{in} a podle III funkce f_n jsou první třídy. Podle vlastnosti [2] množin D_{in} funkce f je stejnoměrná limita posloupnosti $\{f_n\}$, takže podle **14·2·1** f je funkce prvé třídy.

V. Nechť f je funkce taková, že množiny $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > c]$ a $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) < c]$ jsou F_σ pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ nebo, což podle **13·3·1** je totéž, že množiny $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \leqq c]$ a $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \geqq c]$ jsou G_δ. Podle cvič. *9·18* existuje homeomorfní zobrazení φ množiny $\mathbf{R}$ na interval $\mathop{\mathrm{E}}_{t}[-1 \leqq t \leqq 1]$. Položme $F(x) = \varphi[f(x)]$. Pak F je funkce v oboru P taková, že $x \in P \Rightarrow -1 \leqq F(x) \leqq 1$. Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Když *předně* $c \geqq 1$, pak $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[F(x) > c] = \emptyset$; když *za druhé* $c < -1$, pak $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[F(x) > c] = P$; když *za třetí* $-1 < c < 1$, pak $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > c] = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > \varphi_{-1}(c)]$; *za čtvrté* $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[F(x) > -1] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[F(x) > -1 + \frac{1}{n}\right]$. Tedy pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[F(x) > c]$ je F_σ a totéž se stejně dokáže i o množině $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[F(x) < c]$. Tedy podle IV F je funkce třídy 1, takže existuje posloupnost $\{F_n\}$ spojitých funkcí taková, že $F_n(x) \to F(x)$ pro každý bod x. Položme

$$\begin{aligned} G_n(x) &= F_n(x) && \text{pro} \quad |F_n(x)| \leqq 1, \\ G_n(x) &= 1 && \text{pro} \quad F_n(x) > 1, \\ G_n(x) &= -1 && \text{pro} \quad F_n(x) < 1. \end{aligned}$$

Pak G_n jsou spojité funkce takové, že $G_n(P) \subset \underset{t}{\mathrm{E}}[-1 \leqq t \leqq 1]$ a $G_n(x) \to$ $\to F(x)$. Položme

$$f_n(x) = \varphi_{-1}[G_n(x)].$$

Pak f_n jsou spojité funkce a pro každý bod x jest

$$f_n(x) \to \varphi_{-1}[F(x)] = f(x).$$

Tedy f je funkce prvé třídy.

Tím je důkaz věty **14·3·1** dokončen. Podle formulí (2) v **9·5** pro každou funkci f prvé třídy množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = c]$ $(c \in \mathbf{R})$ jsou $\mathbf{G}_\delta$ a množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < \infty]$, $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > -\infty]$ jsou $\mathbf{F}_\sigma$.

14·4. *Nechť f a g jsou konečné funkce prvé třídy. Pak $f \cdot g$ je funkce prvé třídy. Když $g(x) \neq 0$ pro každý bod $x \in P$, také $\frac{f}{g}$ je funkce prvé třídy.*

Důkaz. I. Nechť $c \in \mathbf{E}_1$. Když $c < 0$, pak $\underset{x}{\mathrm{E}}[f^2(x) > c] = P$. Když $c \geqq 0$, pak $\underset{x}{\mathrm{E}}[f^2(x) > c] = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > \sqrt{c}] + \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < -\sqrt{c}]$. Když $c \leqq 0$, pak $\underset{x}{\mathrm{E}}[f^2(x) < c] = \emptyset$. Když $c > 0$, pak $\underset{x}{\mathrm{E}}[f^2(x) < c] = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < \sqrt{c}]$ . . $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > -\sqrt{c}]$. Tedy podle **14·3** množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f^2(x) > c]$ a $\underset{x}{\mathrm{E}}[f^2(x) < c]$ jsou $\mathbf{F}_\sigma$ a f^2 je funkce prvé třídy.

II. Ježto

$$fg = \tfrac{1}{4}(f+g)^2 - \tfrac{1}{4}(f-g)^2,$$

také fg je funkce prvé třídy.

III. Když $c > 0$, pak [za předpokladu, že $g(x) \neq 0$]

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{g(x)} > c\right] = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[g(x) < \frac{1}{c}\right] . \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) > 0],$$

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{g(x)} < c\right] = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[g(x) > \frac{1}{c}\right] + \underset{x}{\mathrm{E}}\,[g(x) < 0];$$

když $c < 0$, pak

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{g(x)} > c\right] = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[g(x) < \frac{1}{c}\right] + \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) > 0],$$

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{g(x)} < c\right] = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[g(x) > \frac{1}{c}\right] . \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) < 0];$$

konečně

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{g(x)} > 0\right] = \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) > 0],$$

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[\frac{1}{g(x)} < 0\right] = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[g(x) < 0].$$

Tedy podle **14·3** funkce $\frac{1}{g}$ je prvé třídy, takže podle II funkce $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ je prvé třídy.

14·5. 14·5·1. *Nechť f je konečná funkce v oboru P. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konečných funkcí v oboru P. Nechť pro každý $x \in P$ jest $f_n(x) \to f(x)$. Nechť $a \in P$. Nechť všecky funkce f_n jsou spojité v bodě a. Nutná a postačující podmínka, aby funkce f byla v bodě a spojitá, jest, aby každému $\varepsilon > 0$ bylo lze přiřaditi $\delta(\varepsilon) > 0$ a index $m(\varepsilon)$ tak, že*

$$\varrho(a, x) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f_{m(\varepsilon)}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Zvolme $\varepsilon > 0$ a určeme $\delta(\varepsilon)$ a $m(\varepsilon) = m$. Ježto f_m je spojitá v bodě a, existuje $\eta(\varepsilon)$ takové, že $0 < \eta(\varepsilon) < \delta(\varepsilon)$ a že $\varrho(a, x) < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon$. Pak

$$\varrho(a, x) < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + \\ + |f_m(a) - f(a)| < 3\varepsilon.$$

Tedy každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\eta(\varepsilon) > 0$ tak, že $\varrho(a, x) < \eta(\varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - f(a)| < 3\varepsilon$. Tedy funkce f je spojitá v bodě a.

II. Nechť funkce f je v bodě a spojitá. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$ takové, že $\varrho(a, x) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ježto $f_n(a) \to f(a)$, existuje index m takový, že $|f_m(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ježto je f_m spojitá v bodě a, existuje $\delta_2 > 0$ takové, že $\varrho(a, x) < \delta_2 \Rightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nechť $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pak

$$\varrho(a, x) < \delta \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leqq |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| + \\ + |f(a) - f(x)| < \varepsilon.$$

14·5·2. *Nechť f je funkce první třídy v oboru P. Nechť D je množina těch $x \in P$, ve kterých funkce f je nespojitá. Množina D je prvé kategorie v P.**)

Důkaz. I. Nechť funkce f je konečná. Existuje posloupnost $\{f_n\}$

---

*) Věta **14·5·2** dává podmínku *nutnou* k tomu, aby f byla funkcí první třídy v oboru P. Podle **14·1·3** platí také tato věta:

14·5·3. *Nechť f je funkce první třídy v oboru P. Nechť $Q \subset P$. Nechť D_Q je množina oněch $x \in Q$, ve kterých parciální funkce f_Q je nespojitá. Množina D_Q je prvé kategorie v Q.* Dokážeme později (v. hlavně větu **16·6·3** a poznámku pod čarou k této větě), že *nutná* podmínka, vyslovená ve větě **14·5·3**, je v některých speciálních prostorech také podmínkou *postačující*. Stupně, po nichž dospějeme k větě **16·6·3**, jsou hlavně věty **14·5·2**, **15·8·3**, **16·6·2**.

konečných spojitých funkcí v oboru P taková, že $f_n(x) \to f(x)$ pro každý bod x. Pro každé $\varepsilon > 0$ a pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ položme

$$A_{m,\varepsilon} = \underset{x}{\mathrm{E}}[\mu > m,\ \nu > m \Rightarrow |f_\mu(x) - f_\nu(x)| \leqq \varepsilon]. \tag{1}$$

Ježto funkce $f_\mu(x) - f_\nu(x)$ jsou spojité, podle **9·5** množiny $A_{m,\varepsilon}$ jsou uzavřené. Ježto pro každý bod $x \in P$ posloupnost $\{f_n(x)\}$ je v obyčejném smyslu konvergentní, jest

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{m,\varepsilon} = P \tag{2}$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Položme

$$B_{m,\varepsilon} = \boldsymbol{H}(A_{m,\varepsilon}). \tag{3}$$

Podle cv. *12·7* množiny $B_{m,\varepsilon}$ jsou řídké. Tedy stačí ukázati, že

$$D \subset \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,\frac{1}{n}}.$$

Nechť

$$a \in P - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

Máme dokázati, že funkce f je v bodě a spojitá.

Zvolme $\varepsilon > 0$ a zvolme index $p > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Podle (2) a (4) jest

$$a \in \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,\frac{1}{p}} - \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,\frac{1}{p}},$$

takže existuje index q takový, že $a \in A_{q,\frac{1}{p}} - B_{q,\frac{1}{p}}$. Podle (3) a ježto $A_{q,\frac{1}{p}}$ je uzavřená, jest $a \in P - \overline{P - A_{q,\frac{1}{p}}}$, takže číslo $\varrho(a, P - A_{q,\frac{1}{p}})$ jest kladné. Nechť $0 < \delta < \varrho(a, P - A_{q,\frac{1}{p}})$. Pak

$$\Omega(a, \delta) \subset A_{q,\frac{1}{p}},$$

takže podle (1)

$$\varrho(a, x) < \delta,\ \mu > q,\ \nu > q \Rightarrow |f_\mu(x) - f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{p}.$$

Ježto $f_n(x) \to f(x)$, jest

$$\varrho(a, x) < \delta,\ n > q \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{p} < \varepsilon.$$

Tedy podle **14·5·1** funkce f je spojitá v bodě a.

II. Nechť f je libovolná funkce první třídy. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí taková, že $f_n(x) \to f(x)$. Podle cv. *9·18* existuje homeomorfní zobrazení φ množiny $\mathbf{R}$ na interval $\underset{t}{\mathrm{E}}[-1 \leqq t \leqq 1]$. Položme $\varphi[f_n(x)] = F_n(x)$, $\varphi[f(x)] = F(x)$. Pak funkce F_n jsou spojité a jest

$F_n(x) \to F(x)$. Tedy F je konečná funkce první třídy. Zřejmě množina D těch bodů, ve kterých funkce f je nespojitá, splyne s množinou těch bodů, ve kterých F je nespojitá. Tedy D je prvé kategorie podle I.

14·6. *Nechť f je funkce v oboru P. Nechť množina D těch $x \in P$, v nichž je f nespojitá, je spočetná. Pak funkce f je prvé třídy.*

Důkaz. Zvolme $c \in \mathsf{E}_1$ a položme $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$. Položme $C = P - D$. Když $x \in AC$, pak jest $f(x) > c$ a funkce f je v bodě x spojitá; z toho následuje snadno, že každému $x \in AC$ lze přiřaditi číslo $\delta(x) > 0$ tak, že $\Omega[x, \delta(x)] \subset A$. Položme

$$B = \sum_{x \in AC} \Omega[x, \delta(x)].$$

Pak jest $AC \subset B \subset A$ a množina B jest otevřená. Jest $A - B \subset D$, takže množina $A - B$ je spočetná. Podle **13·3·5** B je F_σ; podle cv. *13·11* $A - B$ je F_σ. Tedy množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c] = A = B + (A - B)$ je F_σ podle **13·3·3.** Podobně se ukáže, že také množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ je F_σ. Tedy f je první třídy podle **14·3·1.**

14·7. Nechť f je funkce v oboru P. Nechť $a \in P$. Pravíme, že funkce f je v bodě a *shora polospojitá* (*oberhalb stetig, semicontinue supérieurement, upper semicontinuous*), když lze každému $\alpha \in \mathsf{E}_1$ takovému, že $f(a) < \alpha$, přiřaditi $\delta > 0$ tak, že

$$x \in P,\ \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow f(x) < \alpha.$$

Podobně pravíme, že funkce f je v bodě a *zdola polospojitá* (*unterhalb stetig, semicontinue inférieurement, lower semicontinuous*), když každému $\alpha \in \mathsf{E}_1$ takovému, že $f(a) > \alpha$, lze přiřaditi $\delta > 0$ tak, že

$$x \in P,\ \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

Pravíme, že funkce f je v bodě a *polospojitá* (*halbstetig*), když je buďto shora nebo zdola polospojitá v bodě a. Pravíme, že f je *shora* (*zdola*) *polospojitá*, když f je v každém bodě $a \in P$ shora (zdola) polospojitá. Pravíme konečně, že f je *polospojitá*, když je buďto shora nebo zdola polospojitá.

Zřejmé jsou následující dvě věty:

14·7·1. *Funkce f je v bodě a zdola polospojitá, když a jen když funkce $-f$ je v bodě a shora polospojitá.*

14·7·2. *Funkce f je v bodě a spojitá, když a jen když je v bodě a i shora i zdola polospojitá.*

14·7·3. *Nechť f je funkce v oboru P. Funkce f je shora polospojitá, když a jen když pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ jest otevřená.**)

*) Podle (1) v **9·5** lze podmínku vysloviti takto: *pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \geqq c]$ jest uzavřená.*

Funkce f je zdola polospojitá, když a jen když pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ *jest otevřená.**)

Důkaz. I. Nechť pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ je otevřená. Nechť $a \in P$, $\alpha \in \mathsf{E}_1$, $f(a) < \alpha$. Jest $a \in \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < \alpha]$; ježto množina na pravé straně jest otevřená, existuje $\delta > 0$ takové, že $\Omega(a, \delta) \subset \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < \alpha]$, t. j. že $\varrho(a, x) < \delta \Rightarrow f(x) < \alpha$. Tedy funkce f je v bodě a shora polospojitá.

II. Nechť funkce f je shora polospojitá. Zvolme $c \in \mathsf{E}_1$. Položme $C = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$. Když $a \in C$, jest $f(a) < c$, tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $\varrho(a, x) < \delta \Rightarrow f(x) < c$, t. j. že $\Omega(a, \delta) \subset C$. Tedy množina C jest otevřená.

III. V prvém případě shora polospojité funkce jsme hotovi. Druhý případ zdola polospojité funkce se převede na prvý podle **14·7·1**.

14·7·4. *Nechť f je funkce v oboru P. Funkce f je shora polospojitá, když a jen když existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí v oboru P taková, že pro každý $x \in P$ jest:* [1] $f_n(x) \geqq f_{n+1}(x)$ *pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$; [2] $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. *Funkce f je zdola polospojitá, když a jen když existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí v oboru P taková, že pro každý $x \in P$ jest:* [1] $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ *pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$; [2] $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Důkaz. Podle **14·7·1** se můžeme omeziti na případ zdola polospojité funkce.

I. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí v oboru P taková, že pro každý $x \in P$ jest: [1] $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$; [2] $f_n(x) \to f(x)$. Nechť $a \in P$, $\alpha \in \mathsf{E}_1$, $f(a) > \alpha$. Ježto $f(a) = \lim f_n(a)$, existuje index p takový, že $f_p(a) > \alpha$. Ježto funkce f_p je v bodě a spojitá, existuje $\delta > 0$ takové, že $\varrho(a, x) < \delta \Rightarrow f_p(x) > \alpha$. Ježto $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$, $f_n(x) \to f(x)$, jest $f_p(x) > \alpha \Rightarrow f(x) > \alpha$. Tedy $\varrho(a, x) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha$. Tedy funkce f je zdola polospojitá.

II. Nechť funkce f je zdola polospojitá a nechť $-1 \leqq f(x) \leqq 1$ pro každý bod $x \in P$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ a pro $x \in P$ položme

$$f_n(x) = \inf_{z \in P} [f(z) + n \,.\, \varrho(x, z)].$$

Pro každý $z \in P$ je tedy $f_n(x) \leqq f(z) + n \,.\, \varrho(x, z)$. Volíme-li $z = x$, obdržíme $f_n(x) \leqq f(x)$, takže $f_n(x) \leqq 1$ a $f_n(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$. Ježto $f(z) \geqq -1$, $\varrho(x, z) \geqq 0$, jest $f_n(x) \geqq -1$; zřejmě $f(x) = -1 \Rightarrow f_n(x) = -1$. Je-li za druhé $f(x) = a > -1$, existuje $\delta > 0$ tak, že $z \in P$, $\varrho(x, z) < \delta \Rightarrow f(z) > \frac{1}{2}(-1 + a)$; tedy

$$z \in P \Rightarrow f(z) + n\varrho(x, z) \geqq \mathrm{Min}\,[-1 + n\delta, \tfrac{1}{2}(-1 + a)],$$

*) Podmínku lze vysloviti: *pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina* $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \leqq c]$ *jest uzavřená.*

takže $$f_n(x) \geqq \text{Min}\,[-1 + n\delta,\ \tfrac{1}{2}(-1 + a)] > -1.$$

Tedy jest $f_n(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -1$. Ježto $f(z) + n\varrho(x, z) \leqq f(z) + n\varrho(y, z) + n\varrho(x, y)$, jest
$$\inf_{z \in P} [f(z) + n\varrho(x, z)] \leqq \inf_{z \in P} [f(z) + n\varrho(y, z)] + n\varrho(x, y),$$
t. j. $f_n(x) \leqq f_n(y) + n\varrho(x, y)$ a ovšem také $f_n(y) \leqq f_n(x) + n \,.\, \varrho(x, y)$, tedy $|f_n(x) - f_n(y)| \leqq n \,.\, \varrho(x, y)$. Tedy pro každé n je f_n (dokonce stejnoměrně) spojitá funkce. Zřejmě $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) \leqq 1$, takže existuje $g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Ježto $f_n(x) \leqq f(x)$, jest $g(x) \leqq f(x)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Ježto funkce f je zdola polospojitá v bodě x, existuje $\delta > 0$ takové, že $\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow f(y) > f(x) - \varepsilon$. Ježto $f_n(x) = \inf_{z \in P} [f(z) + n\varrho(x, z)]$, existuje (při daném x) bod $z_n \in P$ takový, že $f(z_n) + n\varrho(x, z_n) < f_n(x) + \frac{1}{n} \leqq f(x) + \frac{1}{n}$, tedy $1 \geqq f(x) > n\varrho(x, z_n) - \frac{1}{n} + f(z_n) \geqq n \,.\, \varrho(x, z_n) - \frac{1}{n} - 1$, tedy $\varrho(x, z_n) \leqq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$. Existuje index q takový, že pro $n > q$ je $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < \delta$, tedy $\varrho(x, z_n) < \delta$, tedy $f(z_n) > f(x) - \varepsilon$. Avšak $f(z_n) \leqq f(z_n) + n\varrho(x, z_n) < f_n(x) + \frac{1}{n}$, tedy $f(x) < f_n(x) + \frac{1}{n} + \varepsilon$ pro všecka $n > q$, takže $f(x) \leqq \lim_{n \to \infty} \left[f_n(x) + \frac{1}{n}\right] + \varepsilon = g(x) + \varepsilon$. Ježto $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je $f(x) \leqq g(x)$; ježto také $g(x) \leqq f(x)$, je $f(x) = g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

III. Nechť funkce f je zdola polospojitá. Podle cvič. *9·18* existuje homeomorfní zobrazení φ množiny $\mathbf{R}$ na interval $\mathrm{E}_t[-1 \leqq t \leqq 1]$. Položme $\varphi[f(x)] = F(x)$. Zřejmě pro $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ platí: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$. Ježto f je zdola polospojitá, soudíme snadno, že také F je zdola polospojitá. Jest $-1 \leqq F(x) \leqq 1$ a $F(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -\infty$, $F(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \infty$. Podle II existuje posloupnost $\{F_n\}$ spojitých funkcí taková, že: [1] $F_n(x) \leqq F_{n+1}(x)$, [2] $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$, [3] $-1 \leqq F_n(x) \leqq 1$, [4] $F_n(x) = -1 \Leftrightarrow F(x) = -1$, [5] $F_n(x) = 1 \Rightarrow F(x) = 1$. Položme $\varphi_{-1}[F_n(x)] = f_n(x)$. Pak f_n jsou spojité funkce takové, že $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ a $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. Tím je důkaz dokončen; z důkazu však vychází ještě, že $f_n(x) = -\infty \Leftrightarrow f(x) = -\infty$ a $f_n(x) = \infty \Rightarrow f(x) = \infty$, takže můžeme vysloviti ještě větu:

14·7·5. *Nechť f je konečná funkce v oboru P. Funkce f je shora polospojitá, když a jen když existuje posloupnost $\{f_n\}$ konečných spojitých* *funkcí v oboru P taková, že pro každý $x \in P$ jest:* [1] $f_n(x) \geqq f_{n+1}(x)$ *pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$; [2] $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. *Funkce f je zdola polospojitá, když a jen když existuje posloupnost $\{f_n\}$ konečných spojitých funkcí v oboru P taková, že pro každý $x \in P$ jest:* [1] $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ *pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$; [2] $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Z věty **14·7·4** následuje:

14·7·6. *Polospojitá funkce je funkcí první třídy.*

14·8. 14·8·1. *Nechť g a h jsou funkce v oboru P. Nechť g je shora polospojitá; nechť h je zdola polospojitá. Nechť $g(x) \leqq h(x)$ pro každý $x \in P$. Pak existuje spojitá funkce f v oboru P taková, že $g(x) \leqq f(x) \leqq$ $\leqq h(x)$ pro každý $x \in P$.*

Důkaz. I. Nechť funkce g a h jsou konečné. Pro $t \in \mathsf{E}_1$ položme: [1] $\lambda(t) = t$ pro $t \geqq 0$, [2] $\lambda(t) = 0$ pro $t < 0$. Podle **14·7·5** existují posloupnosti $\{g_n\}$ a $\{h_n\}$ konečných spojitých funkcí v oboru P takové, že $g_n(x) \geqq g_{n+1}(x)$, $h_n(x) \leqq h_{n+1}(x)$, $g_n(x) \to g(x)$, $h_n(x) \to h(x)$. Jest

$$g_n(x) - h_n(x) \geqq g_n(x) - h_{n+1}(x) \geqq g_{n+1}(x) - h_{n+1}(x), \tag{1}$$

takže absolutní hodnoty členů (s výjimkou prvého) řady

$$\begin{aligned} &h_1(x) + \lambda[g_1(x) - h_1(x)] - \lambda[g_1(x) - h_2(x)] + \\ &\quad + \lambda[g_2(x) - h_2(x)] - \lambda[g_2(x) - h_3(x)] + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

blíží se monotonně nule. Ježto členy řady (2) jsou (s výjimkou prvého) střídavě $\geqq 0$ a $\leqq 0$, řada (2) podle dobře známého Leibnitzova kriteria je konvergentní. Její součet označme $f(x)$. Znamená-li $f_n(x)$ součet prvých n členů řady (2), pak f_n jsou spojité funkce a jest $f_{2n}(x) \geqq$ $\geqq f_{2n+2}(x)$, $f_{2n-1}(x) \leqq f_{2n+1}(x)$, $f_n(x) \to f(x)$, takže podle **14·7·2** a **14·7·5** funkce f je spojitá. Zbývá dokázati, že pro každý $x \in P$ jest $g(x) \leqq$ $\leqq f(x) \leqq h(x)$. Rozeznávejme dva případy. *Předně* nechť $g(x) = h(x)$. Pak jest $g_n(x) \geqq h_m(x)$, takže řada (2) zní

$$h_1(x) + [g_1(x) - h_1(x)] + [h_2(x) - g_1(x)] + [g_2(x) - h_2(x)] + \ldots$$

a její součet $f(x)$ je roven $\lim g_n(x) = \lim h_n(x) = g(x) = h(x)$. *Za druhé* nechť $g(x) < h(x)$. Pak od jistého n počínaje jest $g_n(x) < h_n(x)$, $g_n(x) < h_{n+1}(x)$. Nechť m je nejmenší index takový, že v $n^{\text{tém}}$ členu řady (2) za funkčním znamením λ stojí číslo záporné. Podle (1) pro $2 \leqq n \leqq m - 1$ v $n^{\text{tém}}$ členu řady (2) za funkčním znamením λ stojí číslo nezáporné, takže $f(x)$ je rovno součtu prvých $m - 1$ členů řady

$$\begin{aligned} &h_1(x) + [g_1(x) - h_1(x)] + [h_2(x) - g_1(x)] + \\ &\quad + [g_2(x) - h_2(x)] + [h_3(x) - g_2(x)] + \ldots \end{aligned}$$

Tedy, když $m = 2i$ je sudé, jest $f(x) = h_i(x)$ a jest $g_i(x) < h_i(x)$; když $m = 2i + 1$, jest $f(x) = g_i(x)$ a jest $g_i(x) < h_{i+1}(x)$. Ježto $g_n(x) \geqq$ $\geqq g_{n+1}(x)$, $h_n(x) \leqq h_{n+1}(x)$, $g_n(x) \to g(x)$, $h_n(x) \to h(x)$, je zřejmě $g(x) \leqq$ $\leqq f(x) \leqq h(x)$.

II. V obecném případě postupujeme takto: Podle cvič. *9·18* existuje homeomorfní zobrazení φ množiny $\mathbf{R}$ na interval $\underset{t}{\mathrm{E}}[-1 \leqq t \leqq 1]$ takové, že $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$. Položíme-li $G(x) = \varphi[g(x)]$, $H(x) = \varphi[h(x)]$, jest $-1 \leqq G(x) \leqq 1$, $-1 \leqq H(x) \leqq 1$, $G(x) \leqq H(x)$, G je shora polospojitá a H je zdola polospojitá funkce. Podle I existuje spojitá funkce F taková, že $G(x) \leqq F(x) \leqq H(x)$, tedy $-1 \leqq F(x) \leqq 1$, takže můžeme položiti $f(x) = \varphi_{-1}[F(x)]$. Zřejmě f je spojitá funkce a $g(x) \leqq f(x) \leqq h(x)$.

14·8·2. *Nechť množina $A \subset P$ je uzavřená. Nechť k je spojitá funkce v oboru A. Pak existuje spojitá funkce f v oboru P taková, že parciální funkce f_A jest identická s k.*

Důkaz. Definujme funkce g a h v oboru P takto:

$$x \in A \Rightarrow g(x) = h(x) = k(x), \quad x \in P - A \Rightarrow g(x) = -\infty, \ h(x) = \infty.$$

Nechť $c \in \mathbf{E}_1$. Jest

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in P, \ g(x) \geqq c] = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in A, \ k(x) \geqq c].$$

Tedy podle **9·5·1** a **8·7·4** množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in P, g(x) \geqq c]$ jest uzavřená, takže podle **14·7·3** g je shora polospojitá funkce v oboru P. Stejně se dokáže, že h je zdola polospojitá funkce v oboru P. Ježto $x \in P \Rightarrow g(x) \leqq h(x)$, podle **14·8·1** existuje spojitá funkce f v oboru P taková, že $x \in P \Rightarrow g(x) \leqq f(x) \leqq h(x)$. Pro $x \in A$ jest $g(x) = k(x) = h(x)$, tedy $f(x) = k(x)$.

14·8·3. *Nechť množina $A \subset P$ je uzavřená. Nechť k je konečná spojitá funkce v oboru A. Pak existuje konečná spojitá funkce f v oboru P taková, že parciální funkce f_A jest identická s k.*

Důkaz. Případ $A = \emptyset$ je triviální; nechť tedy $A \neq \emptyset$. Podle cv. *9·18* existuje homeomorfní zobrazení φ množiny $\mathbf{R}$ na interval $\underset{t}{\mathrm{E}}[-1 \leqq t \leqq 1]$ takové, že $\varphi(-\infty) = -1$, $\varphi(\infty) = 1$ a že $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$. Podle **14·8·2** existuje spojitá funkce l v oboru P taková, že $x \in A \Rightarrow l(x) = k(x)$. Položme $B = \underset{x}{\mathrm{E}}[l(x) = \infty] + \underset{x}{\mathrm{E}}[l(x) = -\infty]$. Podle **9·5** množina B jest uzavřená; zřejmě $AB = \emptyset$. Když $B = \emptyset$, můžeme položiti $f = l$; nechť tedy $B \neq \emptyset$. Pro $x \in P$ položme $L(x) = \varphi[l(x)]$. Pak L je spojitá funkce v oboru P taková, že $x \in P \Rightarrow |L(x)| \leqq 1$ a že $\underset{x}{\mathrm{E}}[|L(x)| = 1] = B$. Pro $x \in P$ položme

$$r(x) = \frac{\varrho(x, A)}{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)}.$$

Jest $\varrho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in A$, $\varrho(x, B) = 0 \Leftrightarrow x \in B$. Tedy r je konečná funkce v oboru P taková, že $x \in P \Rightarrow r(x) \geqq 0$, $x \in A \Rightarrow r(x) = 0$, $x \in B \Rightarrow r(x) = 1$. Podle cvič. *9·10* funkce r je spojitá. Pro $x \in P$ položme

$$F(x) = \frac{L(x)}{1 + r(x)}.$$

Pak F je spojitá funkce v oboru P taková, že: [1] $x \in P \Rightarrow |F(x)| < 1$; [2] $x \in A \Rightarrow F(x) = \varphi[k(x)]$. Pro $x \in P$ položme $f(x) = \varphi_{-1}[F(x)]$. Pak f je konečná spojitá funkce v oboru P taková, že $x \in A \Rightarrow f(x) = k(x)$.

Cvičení.

Ve cvičeních *14·1—14·3* χ je charakteristická funkce bodové množiny $A \subset P$.

14·1. Funkce χ je shora polospojitá, když a jen když množina A je uzavřená.

14·2. Funkce χ je zdola polospojitá, když a jen když množina A je otevřená.

14·3. Funkce χ je prvé třídy, když a jen když množina A je současně $\mathbf{F}_\sigma$ i $\mathbf{G}_\delta$.

14·4. Odvoditi větu **14·1·2** z věty **14·3·1**.

14·5. Odvoditi větu **14·2·1** z věty **14·3·1**.

14·6. Když konečné funkce f a g jsou obě shora polospojité, pak také $f + g$ je shora polospojitá. Odvoditi: [1] přímo z definice, [2] z věty **14·7·3**, [3] z věty **14·7·5**.

14·7. Když P je spočetný prostor, pak každá funkce v oboru P je první třídy.

14·8. Nechť f je funkce v oboru P. Pro $a \in P$ existují limity

$$\varphi_1(a) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\varrho(a,x)<\frac{1}{n}} f(x), \quad \varphi_2(a) = \lim_{n\to\infty} \sup_{0<\varrho(a,x)<\frac{1}{n}} f(x),$$

$$\psi_1(a) = \lim_{n\to\infty} \inf_{\varrho(a,x)<\frac{1}{n}} f(x), \quad \psi_2(a) = \lim_{n\to\infty} \inf_{0<\varrho(a,x)<\frac{1}{n}} f(x).$$

Funkce φ_1 a φ_2 jsou shora polospojité, funkce ψ_1 a ψ_2 jsou zdola polospojité.

14·9. Nechť $\mathbf{C} \neq \emptyset$ je libovolná množina. Pro každý $z \in \mathbf{C}$ nechť f_z je shora polospojitá funkce v oboru P. Pro $x \in P$ položme $f(x) = \inf_{z\in\mathbf{C}} f_z(x)$. Pak f je shora polospojitá funkce. Odvoditi: [1] přímo z definice, [2] z věty **14·7·3**.

14·10. Nechť f je funkce v oboru $\mathbf{E}_1$ taková, že $x < y \Rightarrow f(x) \leqq f(y)$. Pak f je funkce první třídy. Odvoditi: [1] přímo z definice, [2] z věty **14·3·1**, [3] z věty **14·6**.

14·11. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých zobrazení metrického prostoru P do metrického prostoru Q. Nechť pro každý $x \in P$ existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in Q$. Pak pro každou množinu $A \subset f(P)$ otevřenou v $f(P)$ platí, že množina $\mathrm{E}_x[f(x) \in A]$ jest $\mathbf{F}_\sigma$ v P.

14·12. Nechť f je zobrazení metrického prostoru P do euklidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ takové, že pro každou množinu $A \subset f(P)$ otevřenou v $f(P)$ množina $\mathrm{E}_x[f(x) \in A]$ jest $\mathbf{F}_\sigma$ v P. Pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých zobrazení prostoru P do $\mathbf{E}_m$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každý $x \in P$.

O funkci f v oboru P pravíme, že je *druhé třídy*, když existuje posloupnost $\{f_n\}$ funkcí prvé třídy v oboru P taková, že $f_n(x) \to f(x)$ pro každý $x \in P$.

14·13. Když f je konečná funkce druhé třídy v oboru P, pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ konečných funkcí prvé třídy v oboru P taková, že $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro každý $x \in P$.

14·14. Nechť f je konečná funkce. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konečných funkcí druhé třídy. Nechť f je stejnoměrná limita posloupnosti $\{f_n\}$. Pak f je funkce druhé třídy.

14·15. Nechť f je funkce v oboru P. Nutná a postačující podmínka, aby funkce f byla druhé třídy, jest, aby pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ a $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ byly $\mathsf{G}_{\delta\sigma}(P)$.

KAPITOLA III.

Speciální metrické prostory.

§ 15. Úplné prostory.

15·1. Nechť P je metrický prostor. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z P. Pravíme, že $\{x_n\}$ je *cauchyovská posloupnost*, když lze každému $\varepsilon > 0$ přiřaditi index $p(\varepsilon)$ tak, že

$$m > p(\varepsilon),\ n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Tento pojem je metrický, ne však topologický.

15·1·1. *Konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť $x_n \rightarrow x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje index $p(\varepsilon)$ takový, že $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak $m > p(\varepsilon)$, $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) \leqq$

$$\leqq \varrho(x_m, x) + \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pravíme, že P je *úplný prostor* (*vollständiger Raum*, *espace complet*, *complete space*), když P je metrický prostor takový, že každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní v P. Zřejmě každý konečný metrický prostor (na př. $\emptyset$) je úplný. Úplnost je zase metrický, ne však topologický pojem.

15·1·2. *Když P a Q jsou úplné prostory, pak $P \times Q$ jest úplný prostor.*

Důkaz. Nechť $\{(x_n, y_n)\}$ je cauchyovská posloupnost bodů z $P \times Q$. Ježto

$$\varrho(x_m, x_n) \leqq \varrho[(x_m, y_m), (x_n, y_n)],$$

zřejmě také $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Ježto prostor P je úplný, existuje $\lim x_n = x \in P$. Podobně existuje $\lim y_n = y \in Q$. Zřejmě $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.