Elemente der Theorie der Functionen einer Complexen veränderlichen Grösse

Zwölfte Abschnitt: Über die Bestimmung des Zusammenhangs einer gegebenen Fläche

In: Heinrich Jacob Karl Durége (author): Elemente der Theorie der Functionen einer Complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer berücksichtigung "Der schöpfungen Riemann´s". (German). Leipzig: B. G. Teubner, 1864. pp. 217--228.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400432

gungspunct der Fläche T fällt. Wollte man aber einen solchen dazu nehmen, um welchen die Fläche T sich h Mal windet, so würde man, indem man $(z-a)^{\frac{1}{h}}=\zeta$ setzt, w als Function von ζ betrachten und den Mittelpunct des Kreises S dem Puncte $\zeta=0$ entsprechen lassen. Dann würde also $\log w$ so unstetig werden müssen, wie $\frac{1}{h}\log(z-a)$.

Da die Werthe von u an der Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche gleich Null sein müssen, so kann diese auch durch Ziehen von Querschnitten aus einer mehrfach zusammenhängenden entstanden sein, und auch dann kann die Function w so bestimmt werden, dass der Begrenzung dieser Fläche T' ein einfacher Kreis S entspricht.

Zwölfter Abschnitt.

Ueber die Bestimmung des Zusammenhangs einer gegebenen Fläche.

§ 58.

Wir machen von dem vorigen Satze nun noch einige Anwendungen und beschäftigen uns zuerst mit der Aufgabe, die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte zu finden, welche in einer ihrer Begrenzung nach gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche liegen. Dabei machen wir Gebrauch von der § 13 erwähnten Auffassungsweise, nach welcher man einen Windungspunct $(m-1)$ter Ordnung betrachten kann als entstanden durch das Zusammenfallen von $m-1$ einfachen Verzweigungspuncten. Wenn daher die in einer gegebenen Fläche enthaltenen Windungspuncte resp. von den Ordnungen $m'-1$, $m''-1$, $m'''-1$, etc. sind, so bedeutet jener Auffassung gemäss $\Sigma(m-1)$ die Anzahl der in der Fläche enthaltenen einfachen Verzweigungspuncte.

Wir bezeichnen die gegebene einfach zusammenhängende

Fläche der z mit T und nehmen dieselbe zuerst von endlicher Ausdehnung an, sodass z nicht unendlich gross wird. Nach dem Satze des vorigen § denken wir uns diese Fläche mittelst einer Function w durch eine Kreisfläche, die mit S bezeichnet werden möge, abgebildet. Dann wird w ebenfalls nicht unendlich gross, und da diese Fläche der w eine einfache aus einem Blatte bestehende Kreisfläche ist, so hat z, als Function von w betrachtet, keine Verzweigungspuncte. Da nun weder z noch w unendlich gross ist, so bleibt $\frac{dw}{dz}$ und also auch $\frac{dz}{dw}$ für alle Puncte z, die keine Verzweigungspuncte sind, endlich und von Null verschieden (§ 39). Ist ferner $z = b$ ein Windungspunct $(m-1)$ ter Ordnung, und $w = w_b$ der ihm entsprechende Punct der w-Fläche, so ist (nach dem Satze (27) § 39) $\frac{dw}{dz}$ unendlich gross, und zwar so, dass

$$\lim (w - w_b)^{m-1} \frac{dw}{dz}$$

endlich und von Null verschieden ist. Setzt man

$$(w - w_b)^{m-1} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\psi(w)}$$

so bedeutet $\psi(w)$ eine Function, welche für $w = w_b$ weder Null noch unendlich gross ist. Hieraus folgt

(52) $$\frac{dz}{dw} = (w - w_b)^{m-1} \psi(w),$$

und daher ist $\frac{dz}{dw}$, als Function von w betrachtet, für $w = w_b$ von der $(m-1)$ten Ordnung unendlich klein (§ 34). Demnach kann man auch sagen, $\frac{dz}{dw}$ wird für einen Punct $z = b$, in welchem $(m-1)$ einfache Verzweigungspuncte vereinigt sind, $m-1$ Mal Null. In allen übrigen Puncten verschwindet $\frac{dz}{dw}$ nicht, und daher ist die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte in T gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dz}{dw} = 0.$$

Nun erstreckt die Fläche T sich nicht ins Unendliche, daher wird z nicht unendlich gross, und folglich wird, da die w-Fläche keine Verzweigungspuncte besitzt, auch $\frac{dz}{dw}$ innerhalb T nicht unendlich gross. Da ferner aus demselben Grunde z eine einwerthige Function von w ist, so können wir den Satz (22) des § 35 anwenden und die Anzahl der Puncte, in welchen $\frac{dz}{dw}$ verschwindet, durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Bezeichnet nämlich g diese Anzahl, also auch die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte, welche innerhalb T liegen, so ist nach jenem Satze

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i g, \tag{53}$$

das Integral in positiver Richtung auf die Begrenzung von T oder von S ausgedehnt, je nachdem man z oder w als unabhängige Variable ansieht. Dies Resultat folgt auch aus der Gleichung (52), wenn man auf diese das Verfahren des § 35 anwendet und berücksichtigt, dass $\frac{dz}{dw}$ innerhalb T endlich bleibt und nur in den Verzweigungspuncten verschwindet.

Nun kann aber das obige Integral auch durch die Anzahl der Umläufe ausgedrückt werden, welche die Begrenzung von T macht, welche Begrenzung, da T einfach zusammenhängend ist, aus einem ununterbrochenen Zuge besteht (§ 48). Nimmt man nämlich auf den Begrenzungen von T und S zwei feste einander entsprechende Puncte z_0 und w_0 beliebig an und bezeichnet mit s die Länge der Begrenzungslinie von T, von dem festen Puncte z_0 an bis zu einem variablen Puncte z dieser Begrenzung genommen, ebenso mit σ die Länge des entsprechenden Kreisbogens der Begrenzung von S, so hängt die Lage eines Puncts z der Begrenzung von T von der Länge s, diese von der Länge des Kreisbogens σ, und diese endlich von der Lage des entsprechenden Punctes w auf der Peripherie des Kreises S ab. Mit anderen Worten: z kann als Function von s, s als Function von σ, und σ als Function von w betrachtet werden. Demnach kann man setzen

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dw} \tag{54}$$

oder

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma}}{\frac{dw}{d\sigma}};$$

folglich ist

$$\log \frac{dz}{dw} = \log \frac{dz}{ds} + \log \frac{ds}{d\sigma} - \log \frac{dw}{d\sigma}$$

und

(55) $$\int d\log\frac{dz}{dw}=\int d\log\frac{dz}{ds}+\int d\log\frac{ds}{d\sigma}-\int d\log\frac{dw}{d\sigma},$$

alle diese Integrale auf die Begrenzung von T oder von S ausgedehnt. Nun ist, um mit dem letzten Integrale anzufangen, $d\sigma$ die Länge des unendlich kleinen Kreisbogens, welcher in Beziehung auf Länge und Richtung zugleich durch dw dargestellt wird, d. h. $d\sigma$ ist der Modul der complexen Grösse dw; setzt man also

$$dw=d\sigma\,.\,e^{i\varphi},$$

so bedeutet φ den Winkel, welchen das Bogenelement $d\sigma$ an irgend einer Stelle mit der Hauptaxe bildet. Nun folgt

$$\int d\log\frac{dw}{d\sigma}=i\int d\varphi,$$

und darin bedeutet $\int d\varphi$ die ganze Zunahme, welche der Winkel φ erfährt, während der Punct w die Peripherie des Kreises von w_0 an bis wieder zu diesem Puncte zurück durchläuft. Diese Zunahme beträgt 2π, und daher ist

$$\int d\log\frac{dw}{d\sigma}=2\pi i.$$

Dieselbe Betrachtung findet Anwendung auf das erste Integral in (55). Bei diesem ist ds der Modul von dz. Man kann daher setzen

$$dz=ds\,.\,e^{i\varphi}$$

$$\int d\log\frac{dz}{ds}=i\int d\varphi,$$

und dann bedeutet φ den Winkel, welchen das Bogenelement ds mit der Hauptaxe bildet, und $\int d\varphi$ die ganze Zunahme, die dieser Winkel erfährt, während z von dem Puncte z_0 anfangend die ganze Begrenzung von T durchläuft. Da die letztere eine geschlossene Linie ist, die einen ununterbrochenen Zug bildet, so muss sie eine gewisse Anzahl von Umläufen entweder in der Richtung der wachsenden Winkel oder in der entgegengesetzten Richtung machen; jeder Umlauf in der ersteren Richtung vergrössert den Winkel φ um 2π, jeder Umlauf in der entgegengesetzten Richtung verkleinert ihn um ebenso viel. Bezeichnet man daher mit U die positive oder negative ganze Zahl, welche entsteht, wenn man die Anzahl der Umläufe in der Richtung der abnehmenden Winkel subtrahirt von der Anzahl der Umläufe in der Richtung der wachsenden Winkel, so ist

$$\int d\varphi = 2\pi U$$

und daher

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i U. \qquad (56)$$

Die Umläufe sind dabei stets in positiver Begrenzungsrichtung auszuführen. Wir wollen diese positive oder negative Zahl U der Kürze wegen die Anzahl der positiven Umläufe nennen.

Was endlich das zweite Integral der Gleichung (55), nämlich

$$\int d \log \frac{ds}{d\sigma}$$

anbetrifft, so kann leicht gezeigt werden, dass es verschwindet. Die Grössen ds und $d\sigma$ sind nämlich reell, folglich ist auch $\frac{ds}{d\sigma}$ reell, und zwar ist diese Grösse der Modul von $\frac{dz}{dw}$, wie aus der Gleichung (54) leicht hervorgeht; demnach bildet $\log \frac{ds}{d\sigma}$ den reellen Theil von $\log \frac{dz}{dw}$. Nun erhält $\log \frac{ds}{d\sigma}$ am Ende des Umlaufs denselben Werth wie am Anfange, und da diese Grösse ausserdem während des Umlaufs nicht unendlich gross werden kann, so ist

$$\int d \log \frac{ds}{d\sigma} = 0.$$

Setzt man nun die gefundenen Werthe für die drei Integrale in (55) ein, so erhält man

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i \; (U - 1)$$

und dann durch Vergleichung mit (53)

$$g = U - 1.$$

Demnach ergibt sich der Satz, den wir für einen speciellen Fall schon in § 13 bestätigt fanden: Die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte, welche innerhalb einer endlich begrenzten und einfach zusammenhängenden Fläche T liegen, ist um Eins kleiner als die Anzahl der positiven Umläufe, welche die Begrenzung von T macht. Dabei ist diese Anzahl der positiven Umläufe in dem Sinne zu nehmen, wie es oben angegeben wurde.

§ 59.

Der Begrenzung von T war im Vorigen weiter keine Beschränkung auferlegt worden als die, dass die von ihr begrenzte Fläche einfach zusammenhängend sei und sich nicht ins Unendliche erstrecke. Wir können daher die gefundenen Resultate sogleich auf eine endliche Fläche T' anwenden, die durch Hinzufügung von Querschnitten aus einer mehrfach zusammenhängenden Fläche T entstanden und einfach zusammenhängend geworden ist. Diese Verwandlung lässt die Verzweigungspuncte ungeändert. Die Begrenzung von T' besteht dann aus der Begrenzung von T und den doppelt durchlaufenen Querschnitten. Wir bezeichnen die Anzahl der letzteren durch q. Bedeutet nun U' die Anzahl der positiven Umläufe, welche die Begrenzung von T' macht, so ist

$$U' = g + 1.$$

Nach Gleichung (56) aber ist auch

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i\, U',$$

also haben wir, wenn dies Integral jetzt auf die Begrenzung von T' ausgedehnt wird,

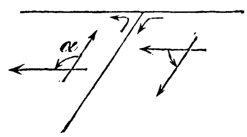
$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i\,(g + 1). \tag{57}$$

Nun kann man dies Integral auch durch die Anzahl q der Querschnitte und die Anzahl der positiven Umläufe U, welche die Begrenzung von T macht, ausdrücken. Da es nämlich auch gleich

$$i \int d\varphi$$

ist, so haben wir nur zuzusehn, um wie viel der Winkel φ, den das Bogenelement ds mit der Hauptaxe macht, im Ganzen zunimmt, während die Begrenzung von T', d. h. also die Begrenzung von T und die Querschnitte, die letzteren doppelt, durchlaufen werden. Da die Begrenzung von T U positive Umläufe macht, so lässt diese den Winkel φ um $2\pi U$ zunehmen. Betrachten wir nun die Querschnitte. An jedem Endpuncte eines Querschnitts, gleichviel ob derselbe in einen Begrenzungstheil von T oder in einen anderen Querschnitt mündet, erfährt die Begrenzungsrichtung von T' eine plötzliche Aenderung. Sei α der Winkel, um welchen sich die Richtung ändere (Fig. 61). (Es kann allerdings auch der Fall eintreten, dass der Querschnitt ohne plötzliche Richtungsänderung in einen anderen Begrenzungstheil übergeht; dieser Fall ordnet sich aber dem Vorigen unter, indem dann $\alpha = 0$ anzunehmen ist.) Der Winkel φ nimmt also an dieser Stelle plötzlich um α zu. Beim Durchlaufen der Begrenzung von T' kommt man nun aber, da die Querschnitte zwei Mal durchlaufen werden müssen, noch einmal an diese Stelle zurück, und zwar wird dann der Querschnitt in entgegengesetzter, der anstossende Begrenzungstheil aber in der nämlichen Richtung durchlaufen. Daraus folgt, dass die Begrenzungsrichtung jetzt eine plötzliche Aenderung erfährt, die gleich dem Winkel $\pi - \alpha$ ist. Demnach nimmt φ auf's Neue um $\pi - \alpha$ zu. An jedem Endpuncte eines Querschnitts erfährt also φ einen Zuwachs gleich $\alpha + \pi - \alpha$ oder gleich π. Bei jedem Querschnitte kommen aber beide Endpuncte in Betracht, auch dann, wenn der Querschnitt eine geschlossene Linie ist, weil auch in diesem Falle Anfangs- und Endpunct als auf verschiedenen Seiten der anstossenden Begrenzungslinie liegend zu betrachten sind; daher giebt jeder Querschnitt dem Winkel φ einen Zuwachs $= 2\pi$.

Fig. 61.



Ist nun die Anzahl der Querschnitte gleich q, die Anzahl der positiven Umläufe, welche die Begrenzung von T' macht, gleich U, so wird

$$\int d\varphi = 2\pi\,(U + q).$$

und daher das auf die Begrenzung von T' erstreckte Integral

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i\,(U + q).$$

Dies Resultat, mit der Gleichung (57) verglichen, ergiebt die Beziehung

$$g + 1 = U + q$$

zwischen der Anzahl der positiven Umläufe, U, welche die Begrenzung einer beliebigen endlichen Fläche T macht, der Anzahl der Querschnitte, q, welche T in eine einfach zusammenhängende verwandeln und der Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte, g, die innerhalb T liegen.

Besteht die Fläche T z. B. aus einem Blatte, so ist $g = 0$; wird sie ferner begrenzt von einer äusseren Linie und n kleinen

Kreisen, die von der ersteren umschlossen werden, so macht bei positiver Begrenzungsrichtung jene einen Umlauf in der Richtung der wachsenden Winkel, jeder der kleinen Kreise einen Umlauf in entgegengesetzter Richtung, folglich ist

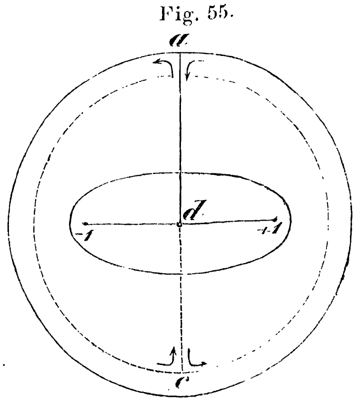
$$U = 1 - n,$$

und man erhält

$$1 = 1 - n + q \quad \text{oder} \quad q = n;$$

die Anzahl der Querschnitte ist gleich der Anzahl der inneren Kreise.

Fig. 55.



Wählen wir ferner zur Vergleichung die in § 52. 3) benutzte und durch Fig. 55 dargestellte Fläche, welche aus zwei Blättern besteht, zwei Verzweigungspuncte hat, und in jedem Blatte durch eine geschlossene Linie begrenzt ist, so muss jede der letzteren bei positiver Begrenzungsrichtung in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen werden, daher ist $U = 2$; ausserdem ist $g = 2$, und folglich ergiebt sich in Uebereinstimmung mit dem Früheren

$$2 + 1 = 2 + q \quad \text{oder} \quad q = 1.$$

Durch die vorige Beziehung, welche auch

$$q = g - U + 1$$

geschrieben werden kann, ist also der Zusammenhang einer Fläche bekannt, so bald die Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspuncte und die Anzahl der positiven Umläufe ihrer Begrenzung gegeben ist.

§ 60.

Wir wenden uns jetzt zu der Betrachtung einer Fläche T, die sich ins Unendliche erstreckt, und nehmen sie dann als geschlossene Fläche an. Hier fällt die Begrenzung fort; statt dessen wollen wir annehmen, dass die Anzahl der Blätter, aus denen die Fläche besteht, bekannt sei, und diese Anzahl mit n bezeichnen. Denken wir nun wieder diese Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende T' zerschnitten, so gilt in diesem Falle die Gleichung (53) § 58 nicht mehr, denn da jetzt z und also auch $\frac{dz}{dw}$ unendlich gross wird, so ist das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int d\log\frac{dz}{dw}$ bezogen auf die Begrenzung von T' nach dem Satze (21) § 35 gleich der Differenz aus der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = 0$ und der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = \infty$. Da nun die w-Fläche ein einfacher Kreis ist, so bleibt w für alle Werthe von z endlich, und z hat als Function von w betrachtet keine Verzweigungspuncte. Daher ist $\frac{dz}{dw}$ für alle endlichen Werthe von z, die keine Verzweigungspuncte sind, weder Null noch Unendlich und wird für $z = \infty$ unendlich gross. In den endlichen Verzweigungspuncten ist $\frac{dz}{dw} = 0$ und zwar in jedem so viele Male, als einfache Verzweigungspuncte in ihm vereinigt sind. Ist daher keiner der unendlich entfernten Puncte der z-Fläche zugleich Verzweigungspunct, so ist wieder die Anzahl der Verzweigungspuncte gleich der Anzahl der Wurzeln von $\frac{dz}{dw} = 0$, und diese möge wie oben mit g bezeichnet werden. Die Variable z wird in jedem der n Blätter der z-Fläche unendlich gross, also n Mal. Aber da, wo z von der ersten Ordnung unendlich gross ist, wird (nach § 29) $\frac{dz}{dw}$ von der zweiten Ordnung unendlich gross, wenn wie hier das entsprechende w endlich ist, daher wird $\frac{dz}{dw}$ in $2n$ Puncten unendlich gross von der ersten Ordnung. Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = \infty$ ist also $2n$, die der Gleichung $\frac{dz}{dw} = 0$ war g, also hat man (nach (21) § 35)

$$\int d\log\frac{dz}{dw} = 2\pi i\,(g - 2n).$$

Wenn dagegen der Punct $z = \infty$ als Verzweigungspunct auftritt, und m Blätter in ihm zusammenhängen, so ist an dieser Stelle $\frac{dz}{dw}$ (nach dem Satze (31) § 39, indem man $\mu = 1$ zu setzen hat) $(m + 1)$ Mal unendlich gross. Ausserdem kommt der Punct $z = \infty$ noch in $n - m$ nicht zusammenhängenden Blättern vor, und in diesen wird $\frac{dz}{dw}$ daher $(2n - 2m)$ Mal unendlich gross. Demnach ist im Ganzen die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = \infty$ gleich $m + 1 + 2n - 2m$ oder gleich $2n - m + 1$. Bedeutet g wieder die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dw} = 0$, so ist jetzt

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i\,(g - 2n + m - 1).$$

Nun ist g nur die Anzahl der endlichen Verzweigungspuncte; zu diesen kommen noch $m - 1$ einfache Verzweigungspuncte hinzu, welche in dem Puncte $z = \infty$ vereinigt sind. Bezeichnet also g' die Anzahl aller einfachen Verzweigungspuncte, so ist

$$g' = g + m - 1$$

und daher wieder

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i\,(g' - 2n).$$

Ganz dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn mehrere der unendlich entfernten Puncte als Verzweigungspuncte auftreten. Demnach ist in allen Fällen, wenn g die Anzahl aller einfachen Verzweigungspuncte, und n die Anzahl der Blätter der z-Fläche bedeutet,

(58) $$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i\,(g - 2n).$$

Nun kann man dies Integral in ähnlicher Weise wie in § 58 behandeln. Auf die Begrenzung von T' oder von S ausgedehnt hat man, wenn die nämlichen Bezeichnungen wie dort angewendet werden, nach (55)

(59) $$\int d \log \frac{dz}{dw} = \int d \log \frac{dz}{ds} + \int d \log \frac{ds}{d\sigma} - \int d \log \frac{dw}{d\sigma},$$

und darin ist wieder

$$\int d \log \frac{ds}{d\sigma} = 0 \quad , \quad \int d \log \frac{dw}{d\sigma} = 2\pi i,$$

das erste Integral aber erhält einen andern Werth. Da nämlich die Fläche T im Unendlichen geschlossen ist, so ist der erste Querschnitt jedenfalls eine geschlossene Linie, von dieser geht der zweite aus. Wenn man nun wieder

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = i \int d\varphi$$

setzt, so erhält, wie im vorigen § der Winkel φ an jeder Stelle, wo ein Querschnitt in einen früheren einmündet, den Zuwachs π, und da dies sowohl beim Anfangs- wie beim Endpuncte des Querschnittes stattfindet, so liefert jeder Querschnitt den Zuwachs 2π. Davon macht aber der erste Querschnitt eine Ausnahme, weil dieser nicht in eine frühere Begrenzungslinie einmündet, sondern im Begrenzungspuncte anfängt und endigt. Ist daher q die Anzahl der Querschnitte, so ist die Zunahme, welche φ beim Umlaufe um die Begrenzung von T' an den Stellen erfährt, wo die Querschnitte an einander anstossen, gleich

$$2\pi\,(q-1);$$

die Umläufe um die Querschnitte selbst dagegen heben sich alle auf, da jeder Querschnitt zwei Mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Demnach ist

$$\int d \log \frac{dz}{ds} = 2\pi i\,(q-1).$$

Die Gleichung (59) liefert also

$$\int d \log \frac{dz}{dw} = 2\pi i\,(q-2),$$

und durch Vergleichung mit (58) erhält man

$$g-2n=q-2 \text{ oder } q=g-2\,(n-1),$$

und diese Gleichung giebt an, wieviel Querschnitte erforderlich sind, um eine geschlossene Fläche, die aus n Blättern besteht und g Verzweigungspuncte besitzt, in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln.

Besteht z. B. die Fläche nur aus 2 Blättern, d. h. ist $n=2$, so folgt

$$q=g-2,$$

dann ist also die Anzahl der Querschnitte immer um 2 kleiner als die Anzahl der Verzweigungspuncte, was in früheren Beispielen (§ 48) seine Bestätigung findet. Sind nur zwei Verzweigungspuncte vorhanden, ist also $g=2$, so wird $q=0$, d. h. die Fläche ist einfach zusammenhängend (§ 46. 2)). Ein negativ Werden von q würde darauf hindeuten, dass die Fläche nicht mehr zusammenhängt, sondern aus getrennten Theilen besteht. Eine zusammenhängende Fläche mit zwei Blättern muss daher mindestens zwei Verzweigungspuncte haben. Im Allgemeinen muss eine aus n Blättern bestehende Fläche, wenn sie zusammenhängend sein soll, mindestens $2(n-1)$ einfache Verzweigungspuncte besitzen, und wenn sie gerade so viele hat, so ist sie einfach zusammenhängend. Der einfachste Fall hierfür wäre der, dass 2 Windungspuncte $(n-1)$ter Ordnung vorhanden sind.

Berichtigungen.

S. 4.	Z. 7.	lies „bei" statt „dei"
S. 45.	„ 5.	lies „um den Nullpunct" statt „aus dem Nullpuncte"
S. 73.	„ 2. v. u.	in den Grenzen der Integrale lies x_h und x_k statt x^h und x^k.
S. 103.	„ 7.	in der oberen Grenze des ersten Integrals lies 2π statt 2.
S. 135.	„ 6. v. u.	lies „so ist" statt „iso st".
S. 167.	„ 11.	lies „ununterbrochenen" statt „ununterbrochenem".
S. 180.	„ 9.	lies „von Vielfachen des Periodicitätsmoduls" statt „von den Periodicitätsmoduln".
S. 184.	„ 9. v. u.	in den Grenzen der Integrale lies $+1$ und -1 statt $+$ und $-$.
S. 185.	„ 14. v. u.	lies $w_a - 2\pi$ statt $w_{a-2\pi}$.
S. 205.	„ 5. v. u.	lies „zusammenhängenden" st. „zusamenhängenden".