Elemente der Theorie der Functionen einer Complexen veränderlichen Grösse

Fünfter Abschnitt: Der Logarithmus und die Exponentialfunction

In: Heinrich Jacob Karl Durége (author): Elemente der Theorie der Functionen einer Complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer berücksichtigung "Der schöpfungen Riemann´s". (German). Leipzig: B. G. Teubner, 1864. pp. 89--97.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400425

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

wenn das Integral längs einer den Punct $z = 1$ umgebenden geschlossenen Linie genommen wird. Denselben Werth hat das Integral auch, wenn die geschlossene Linie einen der drei anderen Verzweigungspuncte $-1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ umgiebt.

Die Untersuchung, welchen Werth das Integral B hat, wenn die Voraussetzungen des vorigen Satzes nicht erfüllt sind, kann erst später (Abschnitt VIII) vorgenommen werden.

Fünfter Abschnitt.

Der Logarithmus und die Exponentialfunction.

§ 22.

Da wir in der Folge von einigen Eigenschaften des Logarithmus Gebrauch zu machen genöthigt sein werden, so müssen wir für einen Augenblick die allgemeinen Betrachtungen unterbrechen und uns zuerst mit dieser speciellen Function beschäftigen. Dabei erscheint es nicht unzweckmässig, diese Untersuchung etwas vollständiger zu führen, als es für die beabsichtigte Anwendung nothwendig gewesen wäre, und auch gleich daran die Betrachtung der aus dem Logarithmus folgenden Exponentialfunction anzuschliessen. Da wir es hier alsdann mit einem speciellen Falle der in den Abschnitten IX und X anzustellenden allgemeinen Untersuchungen zu thun haben, so kann dies Beispiel auch dazu dienen, für jene späteren Betrachtungen die Vorstellungen zu fixiren.

Wir bezeichnen nach *Riemann* mit dem Namen Logarithmus jede Function $f(z)$, welche die Eigenschaft hat, dass

$$f(z.u) = f(z) + f(u) \tag{5}$$

ist. Dadurch ist die Function bis auf eine Constante vollständig bestimmt, denn wir werden daraus alle ihre Eigenschaften ableiten können. Setzt man zuerst $u = 1$ und lässt z beliebig, so folgt

$$f(z) = f(z) + f(1)$$

also

$$f(1) = \text{Log } 1 = 0.$$

Setzt man aber $u = 0$, so erhält man

$$f(0) = f(z) + f(0);$$

giebt man nun dem z einen Werth, für welchen $f(z)$ nicht gleich Null ist, so folgt

$$f(0) = \text{Log } 0 = \infty;$$

aus demselben Grunde wird auch Log ∞ unendlich gross. Man kann ferner den Logarithmus durch ein Integral ausdrücken. Denn differentiirt man die Gleichung (5) partiell nach u, so folgt

$$z f'(zu) = f'(u),$$

und wenn man dann $u = 1$ setzt

$$z f'(z) = f'(1).$$

Die Constante $f'(1)$ bezeichnen wir mit m. Von dieser Constanten hängt der Werth des Logarithmen einer Zahl ab. Die Logarithmen aller Zahlen, die man erhält, wenn man der Constanten m einen bestimmten Werth beilegt, bilden zusammen ein Logarithmensystem, und man nennt die Constante m den Modulus dieses Logarithmensystems.

Aus der Gleichung

$$z f'(z) = m$$

folgt nun

$$df(z) = d \text{ Log } z = m \frac{dz}{z}, \tag{6}$$

also

$$f(z) = m \int \frac{dz}{z} + C.$$

Da $f(1) = 0$ ist, so erhält die Constante C den Werth Null, wenn man dem Integral die untere Grenze 1 zuertheilt und z reelle Werthe durchlaufen lässt. Wir setzen daher auch im Allgemeinen

$$\text{Log } z = m \int_1^z \frac{dz}{z}$$

und haben damit den Logarithmus durch eine bestimmtes Integral ausgedrückt. Für die Analysis sind die Logarithmen desjenigen Systems die einfachsten, in welchem die Constante m den Werth 1 hat. Diese nennt man natürliche Logarithmen, und wir werden im Folgenden solche unter dem Zeichen log z verstehen. Dann ist also

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z},$$

und daher

$$\text{Log}\, z = m . \log z.$$

Setzt man

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so erhält man

$$dz = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,dr + r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi$$
$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(dr + i\,r\,d\varphi),$$

also

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i\,d\varphi.$$

Geht nun z auf irgend einem Wege von 1 nach einem beliebigen Puncte z, so durchläuft r die reellen Werthe von 1 bis r, und φ von 0 bis φ, daher ist

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_1^r \frac{dr}{r} + i\,\varphi$$

oder

$$\log z = \log r + i\,\varphi. \tag{7}$$

Hierdurch ist $\log z$ auf die Form einer complexen Grösse gebracht, denn da r in dem Integral $\int_1^r \frac{dr}{r}$ nur reelle und positive Werthe annimmt, so ist auch $\log r$ reell; und man sieht zugleich, dass $\log r$ positiv oder negativ ist, je nachdem r grösser oder kleiner als 1 ist; denn da r immer positiv ist, so bewegt sich der darstellende Punct auf der positiven Hauptaxe im ersten Falle nach der positiven, im letzteren Falle nach der negativen Seite, und daher sind im ersteren Falle alle Elemente $\frac{dr}{r}$ positiv, im letzteren alle negativ.

Wir ersehen ferner, dass der Logarithmus von dem Integrationswege abhängig ist; denn bezeichnet φ den Werth, den dieser Winkel erreicht, wenn z auf einer den Nullpunct nicht umwindenden Linie, bei welcher die Winkel wachsen, von 1 nach z geht, so ist $\varphi - 2\pi$ der Werth, den dieser Winkel annimmt, wenn die Linie auf der anderen Seite des Nullpuncts, also in der Richtung der abnehmenden Winkel von 1 nach z führt; und wird der Nullpunct von einer Linie n Mal in der Richtung der wachsenden Winkel umwunden, so erreicht φ in z den Werth $\varphi + 2\,n\pi$. Demnach ist vollständig

$$\log z = \log r + i\varphi \pm 2n\pi i.$$

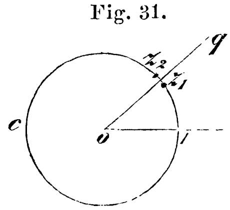
Hierdurch bestätigen sich unsere allgemeinen Betrachtungen. Die Function $\frac{1}{z}$ hat keinen Verzweigungspunct, dagegen den Unstetigkeitspunct $z = 0$. Lässt man z eine geschlossene Linie um den Nullpunct beschreiben, so ist der Werth des auf diese Linie in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckten Integrals $= 2\pi i$, weil

$$p = \left[\lim z\,\frac{1}{z}\right]_{z=0} = 1$$

ist (§ 20). Durch die am Schlusse des § 20 angestellten Betrachtungen erhält man dasselbe Resultat wie oben.

Hieraus folgt nun, dass die Function $\log z$ in keinem Puncte der Ebene einen völlig bestimmten Werth hat und in irgend zwei unendlich nahen Puncten durch passende Anordnung des Integrationsweges Werthe erhalten kann, die um ein Vielfaches von $2\pi i$ von einander verschieden sind. Um diese Unbestimmtheit so viel als möglich zu beschränken, denke man sich aus dem Nullpuncte eine ins Unendliche verlaufende Linie oq (Fig. 31) gezogen, welche sich selbst nicht schneidet. Eine solche Linie wird nach *Riemann* ein **Querschnitt** genannt. Dann muss von je zwei von 1 nach z führenden Wegen, welche den Nullpunct einschliessen, der eine nothwendig den Querschnitt durchschneiden, und folglich nimmt $\log z$ auf allen den Querschnitt nicht überschreitenden Wegen in jedem Puncte z einen einzigen ganz bestimmten Werth an, der sich auch mit z überall stetig ändert.

Fig. 31.



Nur auf den Puncten des Querschnitts selber bleibt die Unbestimmtheit bestehen. Bezeichnet man nun die unendliche Ebene, in welcher z sich bewegt, mit T, und denkt dieselbe längs des Querschnittes oq wirklich durchgeschnitten, so entsteht eine Fläche, die mit T' bezeichnet werden möge. Innerhalb dieser kann nun der Querschnitt nicht überschritten werden, und daher ist $\log z$ innerhalb T' eine einwerthige überall stetige Function von z. In der Fläche T dagegen wird $\log z$ beim Ueberschreiten des Querschnittes unstetig. Denn sind z_1 und z_2 zwei zu beiden Seiten des Querschnittes unendlich nahe an einander liegende Puncte (z_1 etwa rechts und z_2 links von der Richtung oq), und lässt man z von 1 aus über z_1 und z_2 eine geschlossene Linie um den Nullpunct beschreiben, so ist

$$J(1\, z_1\, z_2\, c\, 1) = J(1\, z_1) - J(1\, c\, z_2) = 2\pi i.$$

Bezeichnen also w_1 und w_2 die Werthe, welche $\log z$, zunächst in T' betrachtet, in z_1 und z_2 annimmt, sodass

$$w_1 = J(1\, z_1) \qquad w_2 = J(1\, c\, z_2)$$

ist, so hat man

$$w_1 - w_2 = 2\pi i.$$

Denkt man sich also nun die Fläche T wieder hergestellt, so springt $\log z$, wenn z von z_1 nach z_2 geht, plötzlich von w_1 in $w_1 - 2\pi i$, oder wenn z von z_2 nach z_1 geht, plötzlich von w_2 nach $w_2 + 2\pi i$ über. Dieses gilt, an welcher Stelle die geschlossene Linie den Querschnitt auch überschreiten mag. Längs des ganzen Querschnittes ist daher $\log z$ unstetig, und zwar sind für alle Puncte auf der rechten Seite desselben die Werthe von $\log z$ um $2\pi i$ grösser als auf der linken. Dieser constante Werth, um welchen alle Functionswerthe auf der einen Seite grösser sind, als die benachbarten auf der andern Seite, heisst nach *Riemann* der Periodicitätsmodul der Function oder des Integrals, insofern erstere durch ein Integral dargestellt ist.

§ 23.

Aus dem Logarithmus leitet sich die Exponentialfunction in folgender Art ab. Unter dem Zeichen

$$a^w$$

soll eine Function von w verstanden werden, für welche

$$\log(a^w) = w \, . \log a$$

ist. Bezeichnet nun e die reelle Zahl, für welche $\log e$ den Werth 1 hat, ist also e durch die Gleichung

$$\int_1^e \frac{dz}{z} = 1$$

definirt, so hat man

$$\log(e^w) = w.$$

Daher ist e^w die inverse Function des Logarithmus, denn für $e^w = z$ folgt nun $w = \log z$. Eigentlich ist zwar $\log e$ nicht bloss $= 1$, sondern auch $= 1 \pm 2n\pi i$; man berücksichtigt aber nur den ersteren Werth, d. h. man lässt in dem vorstehenden Integrale z nur reelle Werthe durchlaufen. Aus der Gleichung (6)

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$$

folgt nun

$$\frac{dz}{dw} = z,$$

also

(8) $$\frac{de^w}{dw} = e^w.$$

Nimmt man für z eine complexe Grösse, welche den Modul 1 hat, setzt man also

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

so hat man in der Gleichung (7)

$$\log z = \log r + i\varphi$$

$r = 1$ und daher $\log r = 0$ zu setzen. Demnach ist

$$\log (\cos \varphi + i \sin \varphi) = i\varphi$$

und folglich

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

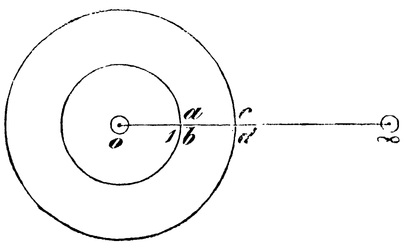
Die Exponentialfunction ist periodisch, denn da einem Werthe von z nicht bloss der Werth w, sondern auch die Werthe $w \pm 2n\pi i$ angehören, so ist

$$z = e^w = e^{w \pm 2n\pi i},$$

also ändert sich e^w nicht, wenn w um ein Vielfaches des Periodicitätsmoduls $2\pi i$ vermehrt oder vermindert wird.

Versuchen wir nun, die Fläche T' der z auf einer Ebene W der w abzubilden. Wir nehmen dazu am einfachsten als Querschnitt eine durch 0 und 1 gehende Gerade an (Fig. 32).

Fig. 32.



Nun ist

$$w = \log r + i\varphi,$$

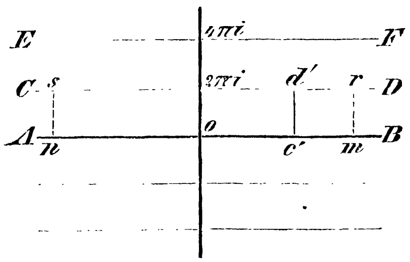
wenn

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gesetzt wird. Daher sind $\log r$ und φ die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes w. Lassen wir dann z einen Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunct in der Richtung der wachsenden Winkel von a nach b beschreiben, so ist $\log r = 0$, und folglich ist w

rein imaginär und geht auf der y-Axe von 0 bis $2\pi i$ (Fig. 33). Geht man ferner mit z von a längs der linken Seite des Querschnittes ins Unendliche, so bleibt $\varphi = 0$ und $\log r$ geht von 0 durch die positiven Werthe ins Unendliche, also beschreibt w den positiven Theil der Hauptaxe. Geht aber z von a auf der linken Seite des Querschnittes nach 0, so beschreibt w den negativen Theil der Hauptaxe ins Unendliche. Ist z zuerst um den Nullpunct herum nach b auf die rechte Seite des Querschnitts gelangt und geht dann längs der rechten Seite desselben nach ∞ oder nach 0, so ist w zuerst auf der y-Axe von 0 bis $2\pi i$ gegangen und beschreibt dann, da nun φ constant $= 2\pi$ bleibt, eine der Hauptaxe parallele Gerade, einmal nach der positiven und dann nach der negativen Richtung. Den beiden Seiten des Querschnitts in T' entsprechen daher in W zwei verschiedene Linien, der linken die Hauptaxe AB, der rechten eine durch $2\pi i$ mit der Hauptaxe parallel laufende Gerade CD (Fig. 33).

Fig. 33.



Lässt man nun z an irgend einer Stelle von der linken Seite c des Querschnitts auf einem Kreise um den Nullpunct auf die rechte Seite d gelangen, so bleibt r und daher auch $\log r$ constant, und φ wächst von 0 bis 2π. Folglich beschreibt w eine der y-Axe parallele Gerade $c'd'$ von der Hauptaxe AB bis zu der Parallelen CD. Daraus folgt, dass allen Puncten z in der ganzen unendlichen Ausdehnung der Fläche T', in welcher φ nicht über 2π hinaus wachsen kann, nur solche Puncte w entsprechen, die innerhalb des von den beiden Parallelen AB und CD gebildeten Streifens liegen. Die Function e^w oder z nimmt also innerhalb dieses Streifens ihre sämmtlichen Werthe an, und zwar jeden nur einmal, denn irgend zwei verschiedenen Werthen von $w = \log r + i\varphi$ gehören auch verschiedene Werthe von r oder φ und also auch verschiedene Werthe von

$$e^w = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{an.}$$

Will man die Fläche T' begrenzen, so kann dies einerseits dadurch geschehen, dass man um den Nullpunct einen Kreis mit einem sehr kleinen Radius ϱ beschreibt; diesem entspricht, da ϱ constant bleibt, in W eine der y-Axe parallele Gerade ns zwischen den beiden Parallelen AB und CD, welche sehr weit vom Nullpuncte entfernt auf der negativen Seite liegt. Diese rückt ins Unendliche, wenn ϱ bis zum Verschwinden abnimmt, also der Kreis in den Nullpunct zusammenschrumpft. In allen Puncten dieser ins Unendliche gerückten Geraden ns hat daher e^w den Werth Null. Andrerseits kann die Begrenzung von T' durch einen Kreis um den Nullpunct mit einem sehr grossen Radius R gebildet werden. Diesem entspricht in W eine auf der positiven Seite sehr weit entfernte Gerade mr parallel der y-Axe. Wächst R ins Unendliche, so rückt auch diese Gerade ins Unendliche, und in allen ihren Puncten ist e^w unendlich gross. Die Fläche T' kann im Unendlichen geschlossen angenommen werden, dann wird der Kreis mit dem grossen Radius R durch einen kleinen Kreis um den Punct ∞ vertreten, welcher in diesen Punct zusammenschrumpft, wenn R ins Unendliche wächst. Dann bilden also die beiden Seiten des von 0 nach ∞ gehenden Querschnitts allein die Begrenzung der geschlossenen Fläche T', und dieser entspricht der nach beiden Seiten ins Unendliche gehende Streifen zwischen den Parallelen AB und CD.

Fig. 32.

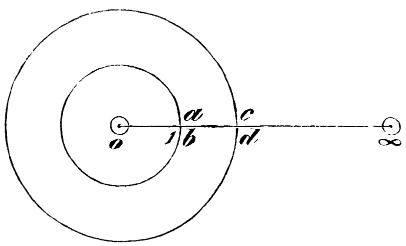
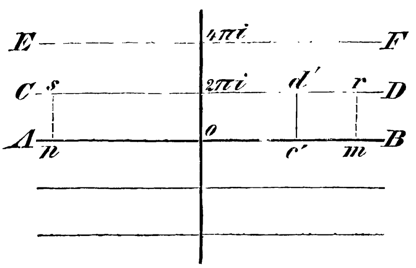


Fig. 33.



Lassen wir jetzt den Winkel φ über 2π hinaus wachsen, so setzt sich die Function w oder $\log z$ stetig fort; dann kann man sich den Querschnitt wie einen Verzweigungsschnitt denken, über den hinüber die Fläche T' sich in ein zweites Blatt fortsetzt. In diesem zweiten Blatte verhält sich dann alles wie im ersten, nur dass in allen Puncten desselben φ um 2π, also w um $2\pi i$ grösser ist, als an der entsprechenden Stelle im ersten Blatte. Daher erhält man in W einen zweiten Streifen zwischen den Parallelen CD und EF, welche durch $2\pi i$ und $4\pi i$ hindurchgehen. Setzt man diese Betrachtung fort und wendet sie auch auf negative Werthe von φ an, so wird die Ebene W in unendlich viele parallele Streifen getheilt. In jedem nimmt die Function e^w ihre sämmtlichen Werthe einmal an und hat in je zwei entsprechenden Puncten zweier verschiedener Streifen die gleichen Werthe. Auf der positiven Seite jedes Streifens geht e^w in Unendliche, auf der negativen Seite aber nähert es sich der Null.

Sechster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der Functionen.

§ 24.

Die Grundlage für die folgenden Untersuchungen bildet der überaus wichtige, in § 20 bewiesene Satz: Wird das Integral $\int f(z)\,dz$ auf die Begrenzung eines Flächentheils ausgedehnt, in welchem $f(z)$ keine Verzweigungspuncte besitzt (oder einändrig ist), und nur in einem Puncte $z = a$ unstetig wird, und zwar so, dass $(z-a)f(z)$ sich für $z = a$ einem bestimmten endlichen Grenzwerthe p nähert, so ist

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i p.$$

Ist nun $\varphi(z)$ eine Function, die in einem Flächentheile T keine Verzweigungspuncte besitzt und darin überall stetig bleibt, und bedeutet t einen beliebigen Punct dieser Fläche, so hat die Function

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z-t}$$

in T die im vorigen Satze verlangten Eigenschaften. Sie besitzt ebenfalls keine Verzweigungspuncte und wird nur für $z = t$ unstetig, und zwar so, dass

$$(z-t)\,f(z) = \varphi(z)$$