# Dritter Abschnitt.

## Mehrdeutige Functionen.

### § 8.

Die Einführung complexer Variablen wirft auch ein helles Licht auf die Natur der mehrdeutigen Functionen. Da nämlich eine complexe Variable beim Uebergange von einem Anfangspuncte $z_0$ zu einem andern Puncte $z_1$ sehr verschiedene Wege einschlagen kann, so liegt es nahe, sich die Frage zu stellen, ob nicht der durchlaufene Weg von Einfluss sein kann auf den Werth $w_1$, den eine Function, die mit einem bestimmten Werthe $w_0$ aus $z_0$ ausgeht, im Endpuncte $z_1$ erlangt; sich zu fragen, ob die von $w$ beschriebenen, von $w_0$ ausgehenden Curven, welche den zwischen $z_0$ und $z_1$ beschriebenen entsprechen, immer in demselben Puncte $w_1$ endigen müssen, oder ob sie auch in verschiedenen Puncten endigen können. Nun ist zuerst klar, dass bei eindeutigen Functionen der Endwerth $w_1$ von dem Wege unabhängig sein muss, denn sonst müsste die Function für einen und denselben Werth von $z$ mehrere Werthe annehmen können, was bei einer eindeutigen Function nicht der Fall ist. Allein bei den mehrdeutigen Functionen fällt dieser Grund fort. Bei einer solchen hat in der That die Function für denselben Werth von $z$ mehrere Werthe, und daher ist von vornherein die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass verschiedene Wege auch zu verschiedenen Puncten oder Functionswerthen führen können. Lässt man z. B. in $w = \sqrt{z}$ die Variable $z$ von 1 nach 4 auf verschiedenen Wegen gehn, und geht man mit der Function $w$ für $z = 1$ mit $w = +1$ aus, so liegt die Möglichkeit vor, dass einige Wege von $w = +1$ nach $w = +2$, andere dagegen von $w = +1$ nach $w = -2$ führen können.

Es sind nun hier vor allen Dingen solche Puncte ins Auge zu fassen, in welchen zwei oder mehrere Werthe der Function $w$, die im Allgemeinen verschieden sind, einander gleich werden.

Ein solcher ist z. B. für $w = \sqrt{z}$ der Punct $z = 0$, in diesem werden die im Allgemeinen mit verschiedenen Vorzeichen behafteten Werthe von $w$ einander gleich, nämlich beide $= 0$. Betrachten wir ferner die durch die cubische Gleichung

$$w^3 - w + z = 0$$

definirte Function, so liefert hier die Cardanische Formel, wenn der Kürze wegen

$$p = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-z + \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\,\right)},\quad q = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-z - \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)},$$

und die beiden imaginären Cubikwurzeln der Einheit

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \alpha,\quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \alpha^2$$

gesetzt werden, folgende Ausdrücke für die drei Wurzeln der obigen Gleichung, welche mit $w_1$, $w_2$, $w_3$ bezeichnet werden mögen:

$$\begin{aligned} w_1 &= p + q \\ w_2 &= \alpha p + \alpha^2 q \\ w_3 &= \alpha^2 p + \alpha q. \end{aligned}$$

Für jeden Werth von $z$ hat hier im Allgemeinen $w$ die drei Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$. Von diesen werden aber die beiden letzten einander gleich, wenn $p = q$ ist, was eintritt, wenn

$$z = +\frac{2}{\sqrt{27}} \quad \text{oder} \quad z = -\frac{2}{\sqrt{27}}$$

ist. In diesen Puncten wird resp.

$$w_2 = w_3 = +\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad \text{oder} \quad w_2 = w_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Nehmen wir nun an, indem wir an dieses Beispiel die ferneren Betrachtungen anknüpfen, die Variable $z$ verändere sich stetig, oder der sie darstellende Punct beschreibe eine Linie, so werden die drei Grössen $w_1$, $w_2$, $w_3$ sich ebenfalls, jede für sich, stetig ändern, oder die drei entsprechenden Puncte werden drei abgesondert verlaufende Linien beschreiben. Wenn aber $z$ durch einen der beiden oben bestimmten Puncte hindurchgeht, z. B. durch den Punct $z = +\frac{2}{\sqrt{27}}$, so nehmen beide Grössen $w_2$ und $w_3$ den Werth $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ an; die beiden von $w_2$ und $w_3$ beschriebenen Linien werden daher in dem Puncte $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ zusammentreffen. Beim Ueberschreiten dieses Punctes kann demnach ohne Unterbrechung der Stetigkeit $w_2$ in $w_3$ und $w_3$ in $w_2$ übergehn, ja es bleibt vollständig willkürlich, auf welcher der beiden Linien man jede der beiden Grössen $w_2$ und $w_3$ ihren Weg fortsetzen lassen will. Es findet an dieser Stelle gleichsam eine **Verzweigung** der Linien statt, welche von den Grössen $w_2$ und $w_3$ beschrieben werden; daher hat *Riemann* die **Puncte der $z$-Ebene**, bei welchen ein Functionswerth in einen anderen übergehn kann, **Verzweigungspuncte** genannt. In unserem Beispiele sind hiernach die Puncte $z = +\frac{2}{\sqrt{27}}$ und $z = -\frac{2}{\sqrt{27}}$ Verzweigungspuncte (nicht etwa $w = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $w = -\sqrt{\frac{1}{3}}$). Zur Erläuterung ist Fig. A und B beigefügt worden. In Fig. A sind die

Fig. A.

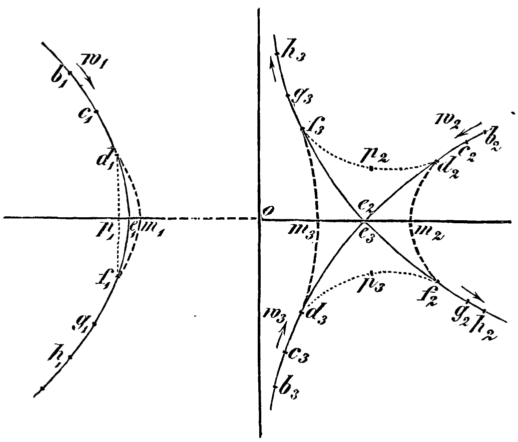
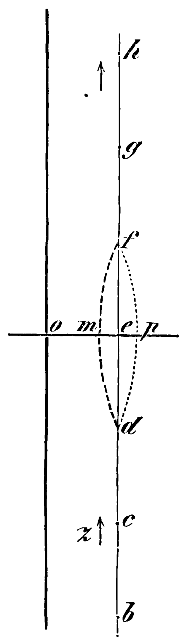



Fig. B.




drei Linien $w_1$, $w_2$, $w_3$ für den Fall gezeichnet, dass $z$ eine der $y$-Axe parallele Gerade beschreibt, welche durch den Verzweigungspunct $e = +\frac{2}{\sqrt{27}}$ (Fig. B) hindurchgeht. Dabei ist aber die Linie $w_1$ der Deutlichkeit wegen in doppelt so grossem Massstabe, als die übrigen Linien, dargestellt und, um Raum zu sparen, näher an die Ordinatenaxe herangerückt, als sie eigentlich verläuft. Die Puncte $w$, welche den Puncten $z$ entsprechen, sind mit den nämlichen Buchstaben und hinzugefügten Indices 1, 2, 3 bezeichnet. Das Bild der Verzweigung tritt nun noch deutlicher hervor, wenn man nur eine der Grössen z. B. $w_3$ verfolgt. Diese beschreibt die Linie $b_3\, c_3\, d_3$, welche sich dem Puncte $e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ nähert, wenn $z$ auf der Linie

$b\,c\,d$ an den Punct $c = \frac{2}{\sqrt{27}}$ heran geht; überschreitet nun $z$ diesen Punct, so gehen für $w_3$ zwei Wege von $c_2 = c_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ aus, nämlich $e_3\, f_3\, g_3\, h_3$ und $e_2\, f_2\, g_2\, h_2$, von denen der eine eben so gut

Fig. A.

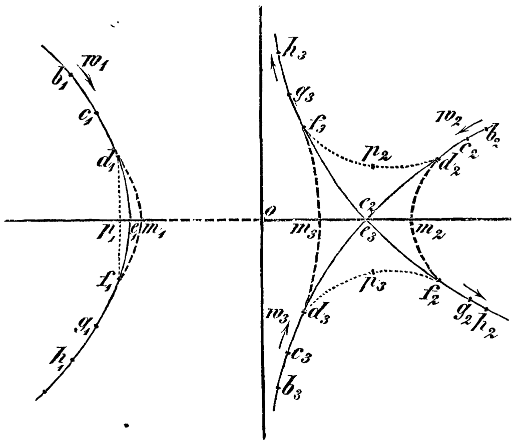
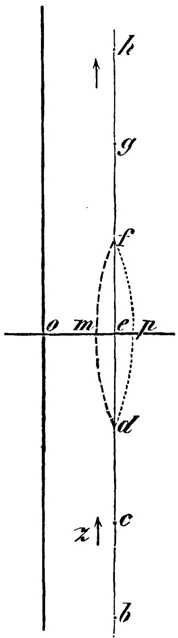


Fig. B.



wie der andere als der Fortsetzung $e\,f\,g\,h$ von $z$ entsprechend angesehen werden kann; es theilt sich der dem $w_3$ freistehende Weg bei $c_2 = c_3$ wirklich in zwei Zweige. Wenn nun $z$ von $b$ nach $h$ durch den Verzweigungspunct $e$ geht, so kann $w_3$ von $b_3$ ebensowohl nach $h_3$ wie nach $h_2$ gelangen, und ebenso $w_2$ von $b_2$ aus; bei einem solchen durch einen Verzweigungspunct hindurchführenden Wege bleibt also der Endwerth der Function unbestimmt. Wenn dagegen $z$ von $b$ nach $h$ einen Weg beschreibt, der nicht durch einen Verzweigungspunct hindurch führt, so kann zwar je nach der Beschaffenheit dieses Weges der Endwerth der Function ein verschiedener sein, er ist aber für jeden bestimmten Weg des $z$ immer ein ganz bestimmter. Auch dies erläutern die Figuren A und B. Geht nämlich $z$ von $b$ über $d$, und dann längs der gestrichelten Linie über $m$ nach $f$ und $h$, so geht $w_3$ von $b_3$ über $d_3$ und dann längs der ebenso bezeichneten Linie über $m_3$ nach $f_3$ und $h_3$; $w_2$ von $b_2$ über $d_2$, $m_2$, $f_2$ nach $h_2$; $w_3$ erlangt dann den bestimmten Werth $h_3$ und $w_2$ den bestimmten Werth $h_2$. Diese Endwerthe werden andre, aber wiederum bestimmte, wenn $z$ den Verzweigungspunct $e$ auf der anderen Seite längs der punctirten Linie über $p$ umgeht. In diesem Falle geht $w_3$ von $b_3$ über $d_3$ und dann längs der punctirten Linie über $p_3$ nach $f_2$ und $h_2$; und $w_2$ geht über $d_2$, $p_2$, $f_3$ nach $h_3$. In diesem Falle sind zwar die Fortschreitungen der Functionen und daher auch ihre Endwerthe andere als vorhin, aber wiederum ganz bestimmte. — Im Allgemeinen sind nun solche Puncte der $z$-Ebene, in welchen mehrere sonst verschiedene Werthe einer Function einander gleich werden, in der Regel auch Verzweigungspuncte der Function. Von einer Ausnahme hiervon soll sogleich die Rede sein.

Eine ähnliche Verzweigung der Function findet für solche Puncte statt, in denen $w$ unendlich gross wird und dadurch eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Dies ist z. B. bei der durch die Gleichung

$$(z-b)\,(w-c)^3 = z-a \quad \text{oder} \quad w = c + \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}}$$

bestimmten Function der Fall, in welcher $a$, $b$, $c$ drei complexe Constanten, also drei feste Puncte bedeuten. Hier ist $z = a$ ein Verzweigungspunct, in welchem drei Werthe der Function in dem einen $w = c$ zusammenfallen. Ausserdem aber werden für $z = b$ alle drei Werthe von $w$ unendlich gross. Hier erleiden die drei Functionen eine Unterbrechung der Stetigkeit und daher kann es wieder unentschieden bleiben, auf welchem Wege jede fortzusetzen ist, weil wenn die Function einen Sprung macht, sie eben so wohl nach der einen, wie nach einer anderen Fortsetzung ihres Weges überspringen kann. Daher ist $z = b$ ebenfalls ein Verzweigungspunct. Man bemerke dabei, dass wenn $w$ für einen Werth von $z$ unendlich gross wird, $\frac{1}{w}$ an dieser Stelle den Werth Null hat. Für die letztere Function fallen daher an dieser Stelle mehrere Functionswerthe zusammen; also wird hier in der Regel eine Verzweigung der Function $\frac{1}{w}$ statt finden; das nämliche gilt dann auch von $w$. Diejenigen Puncte, in denen $w$ unendlich gross oder unstetig ist, sind daher in der Regel ebenfalls Verzweigungspuncte.

Es kann hiervon aber auch Ausnahmen geben: es giebt Fälle, bei welchen Puncte, in denen Functionswerthe einander gleich oder unendlich gross werden, doch keine Verzweigungspuncte sind. Dies kann für jetzt nur erst an einem Beispiele erläutert werden. In den Functionen

$$\sqrt{1 - z^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

sind $z = +1$ und $z = -1$ Verzweigungspuncte; dagegen in

$$(z - a)\sqrt{z} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(z - a)\sqrt{z}}$$

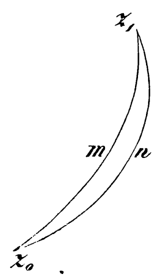
ist $z = a$ kein Verzweigungspunct, obgleich die Functionswerthe an dieser Stelle im ersten Falle beide gleich Null und im zweiten beide unendlich gross sind. Wenn nämlich $z$ den Punct $a$ überschreitet, so hat sowohl $z - a$ als auch $\sqrt{z}$ eine ganz bestimmte stetige Fortschreitung: $z - a$, weil es überhaupt eindeutig ist, und $\sqrt{z}$, weil $+\sqrt{a}$ ohne Unterbrechung der Stetigkeit nicht plötzlich nach $-\sqrt{a}$ überspringen kann. Daher haben auch die aus diesen Grössen auf rationale Weise zusammengesetzten Functionen an dieser Stelle für jede von $z$ beschriebene Linie eine bestimmte Fortschreitung, und es findet keine Verzweigung statt. Die Verzweigungspuncte sind demnach zwar nur unter denjenigen Puncten zu suchen, in welchen entweder eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt, oder mehrere Functionswerthe zusammenfallen; aber ob solche Puncte wirklich Verzweigungspuncte sind, muss noch besonders entschieden werden.

## § 9.

Die vorigen Betrachtungen haben gezeigt, dass wenn die Variable $z$ von einem beliebigen Puncte $z_0$ ausgehend nach einem andern Puncte $z_1$ hin einen Weg beschreibt, welcher durch einen Verzweigungspunct einer Function $w$ hindurchführt, dieselbe in $z_1$ verschiedene Werthe erhält, je nachdem man sie auf dem einen oder dem andern ihrer Zweige weiter gehen lässt. Bei einem solchen Wege des $z$ ist also der Werth des $w$ in $z_1$ unbestimmt. Auf jedem andern Wege dagegen, der nicht durch einen Verzweigungspunct hindurch führt, erhält $w$ in $z_1$ einen bestimmten Werth, und wir wollen nun zeigen, dass zwei Wege, die beide von $z_0$ nach $z_1$ führen, dem $w$ in $z_1$ nur dann verschiedene Werthe zuertheilen, wenn sie einen Verzweigungspunct einschliessen. Dazu beweisen wir zuerst folgenden Satz:

Lässt man die Variable $z$ zwei unendlich nahe liegende Wege $z_0\,m\,z_1$ und $z_0\,n\,z_1$ (Fig. 9) von $z_0$ nach $z_1$ beschreiben, welche an keiner Stelle einem Puncte unendlich nahe kommen, in dem entweder die Function $w$ unstetig wird, oder in welchem mehrere Functionswerthe zusammenfallen, so erhält die Function $w$, wenn sie aus $z_0$ mit dem nämlichen Werthe ausgeht, auf beiden Wegen in $z_1$ den nämlichen Werth.

Fig. 9.



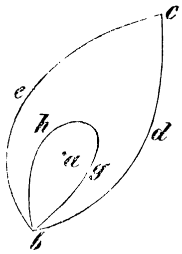

Um diesen Satz zu beweisen, bemerke man zuerst, dass die verschiedenen Werthe, welche eine mehrdeutige Function in einem und demselben Puncte $z$ hat, nur dann um eine unendlich kleine Grösse von einander verschieden sein können, wenn der Punct $z$ einem solchen Puncte unendlich nahe liegt, in dem mehrere Functionswerthe zusammenfallen. Denn nur für solche Puncte $z$ nähern sich die von den Functionswerthen beschriebenen Linien, während sie für alle anderen Puncte $z$ in endlichen Entfernungen von einander verlaufen. (Vgl. hierzu Fig. A. und B. S. 38). Da nun die beiden Wege $z_0\,m\,z_1$ und $z_0\,n\,z_1$ der Voraussetzung gemäss sich nirgend einem solchen Puncte nähern, so sind die verschiedenen Werthe, die $w$ in irgend einem Puncte der beiden Wege haben kann, um endliche Grössen von einander verschieden. Folglich können auch die Werthe, welche die Function $w$ auf den beiden Wegen $z_0\,m\,z_1$ und $z_0\,n\,z_1$ in $z_1$ erlangt, nur entweder einander gleich oder um eine endliche Grösse von einander verschieden sein. Nun kann aber die letztere Alternative nicht Statt haben. Denkt man sich nämlich, dass zwei bewegliche Puncte $z$ die beiden unendlich nahen Wege $z_0\,m\,z_1$ und $z_0\,n\,z_1$ in der Art durchlaufen, dass sie stets einander unendlich nahe bleiben, und bezeichnet man die Functionswerthe auf der einen Linie mit $w_m$ und auf der anderen mit $w_n$, so können $w_m$ und $w_n$ längs beider Linien nur um eine unendlich kleine Grösse von einander verschieden sein, da der Voraussetzung nach $w$ bei beiden Wegen aus $z_0$ mit dem nämlichen Werthe ausgeht, und beim Uebergang von einem Puncte der einen Linie zu einem unendlich nahen Puncte der anderen Linie Stetigkeit stattfindet. Wenn nun $w_m$ und $w_n$ in $z_1$ um eine endliche Grösse verschieden wären, so müsste mindestens eine dieser Functionen an irgend einer Stelle einen Sprung machen, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen wird, dass die beiden Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ sich keinem Puncte nähern sollen, in welchem eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt. Demnach können $w_m$ und $w_n$ in $z_1$ nicht um eine endliche Grösse von einander verschieden sein, und folglich sind sie einander gleich.

Denkt man sich nun, nachdem dies festgestellt ist, eine Reihe auf einander folgender und unendlich nahe an einander liegender Wege, alle zwischen den Puncten $z_0$ und $z_1$, und so beschaffen, dass keiner derselben sich einem Puncte nähert, in dem entweder Unstetigkeit eintritt, oder Functionswerthe zusammenfallen, so erhält die Function auf allen diesen Wegen den nämlichen Werth in $z_1$. Daraus folgt dann: Wenn man einen Weg zwischen zwei Puncten $z_0$ und $z_1$ so durch allmälige Uebergänge in einen andern Weg umformen kann, dass dabei keiner der so eben charakterisirten Puncte überschritten wird, so erhält die Function in $z_1$ auf dem zweiten Wege denselben Werth wie auf dem ersten. Lässt man nun die Variable $z$ von $z_0$ ausgehend eine geschlossene Linie beschreiben und wieder nach $z_0$ zurückkehren, so erhält die Function, wenn die Variable die geschlossene Linie durchlaufen hat und zum zweiten Male nach $z_0$ kommt, hier denselben Werth, den sie beim Ausgange hatte, wenn die geschlossene Linie keinen Punct umgiebt, in welchem entweder Unstetigkeit eintritt oder Functionswerthe zusammenfallen.

Solche geschlossene Linien, die von der Variablen $z$ beschrieben werden, sind nun für die Untersuchung des Einflusses, den der Weg, auf welchem die Variable $z$ nach irgend einem Puncte hingeht, auf den Werth ausübt, welchen die Function $w$ in diesem Puncte erlangt, maassgebend. Umgiebt eine geschlossene Linie keinen der schon so oft erwähnten Puncte, so ändert, wie gezeigt worden ist, die Function ihren Werth nicht; umgiebt sie aber einen solchen Punct, so kann die Function ihren Werth ändern, oder auch nicht ändern. Werden ferner von der Variablen zwischen zwei Puncten zwei Wege durchlaufen, die keinen derartigen Punct einschliessen, so führen diese zu gleichen Functionswerthen. Wir haben daher nur Wege zu betrachten, die einen solchen Punct einschliessen. Sei nun $a$ (Fig. 10) ein Punct von dieser Art, und nehmen wir zwei Wege $bdc$ und $bec$

an, welche $a$, aber keinen andern ähnlichen Punct einschliessen. Aus $b$ gehe $w$ mit dem Werthe $w_0$ aus und erlange auf dem Wege $bdc$ in $c$ den Werth $w_0'$. Lässt man dann aber die Variable $z$, ehe sie den andern Weg $bec$ betritt, zuvor eine den Punct $a$ umgebende geschlossene Linie $bghb$ durchlaufen, so kann der Weg $bghbec$ in $bdc$ umgeformt werden, ohne dass der Punct $a$ überschritten wird, folglich erlangt $w$ auf diesem Wege in $c$ ebenfalls den Werth $w_0'$, wenn es aus $b$ mit dem Werthe $w_0$ ausgeht. Wir haben also Folgendes:

Fig. 10.




auf $bdc$ geht $w$ von $w_0$ nach $w_0'$
„ $bghbec$ „ $w$ „ $w_0$ „ $w_0'$.

Nehmen wir nun zuerst an, $w$ ändere seinen Werth beim Durchlaufen der geschlossenen Linie $bghb$ und gehe in $w_1$ über, so haben wir zu setzen:

auf $bghb$ geht $w$ von $w_0$ nach $w_1$

und daher

auf $bec$ „ $w$ „ $w_1$ „ $w_0'$.

Demnach erlangt $w$ auf $bec$ in $c$ den Werth $w_0'$ dann, wenn es aus $b$ mit dem Werthe $w_1$ ausgeht; lässt man es also aus $b$ mit dem Werthe $w_0$ ausgehn, so kann es den Werth $w_0'$ nicht erlangen, sondern muss zu einem andern Werthe geführt werden. Wenn dagegen $w$ auf der geschlossenen Linie $bghb$ seinen Werth nicht ändert, so haben wir zu setzen:

auf $bghb$ geht $w$ von $w_0$ nach $w_0$
„ $bec$ „ $w$ „ $w_0$ „ $w_0'$;

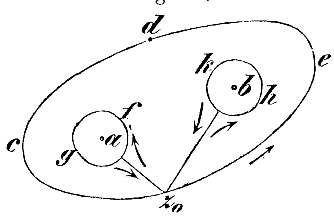
dann erlangt also $w$, aus $b$ mit dem Werthe $w_0$ ausgehend, auch auf dem Wege $bec$ den Werth $w_0'$.

Hieraus folgt also, wenn zwei Wege einen unserer in Rede stehenden Puncte $a$ einschliessen, so führen sie zu verschiedenen oder gleichen Functionswerthen, je nachdem die Function $w$ beim Durchlaufen einer den Punct $a$ umgebenden geschlossenen Linie ihren Werth ändert oder nicht ändert.

Jetzt sind wir im Stande, die Verzweigungspuncte näher festzustellen. Es soll nämlich ein Punct $a$, in welchem entweder eine Unstetigkeit eintritt oder mehrere Functionswerthe zusammenfallen, dann und nur dann ein Verzweigungspunct genannt werden, wenn die Function beim Umlaufe um eine diesen Punct und keinen andern ähnlichen umgebende geschlossene Linie ihren Werth ändert. Hiermit ist denn der im Eingange dieses Paragraphen ausgesprochene Satz dargethan, dass zwei verschiedene, dieselben Puncte verbindende Wege dann und nur dann einer Function, die vom Ausgangspuncte mit demselben Werthe ausgeht, verschiedene Werthe zuertheilen, wenn sie einen Verzweigungspunct einschliessen; und für geschlossene Linien können wir den Satz aussprechen: Eine mehrdeutige Function geht von einem in einem Puncte $z_0$ stattfindenden Werthe zu einem anderen in demselben Puncte stattfindenden Werthe dadurch auf stetige Weise über, dass die Variable $z$ von $z_0$ aus eine geschlossene Linie beschreibt, welche einen Verzweigungspunct umgiebt.

Geschlossene Linien, welche zwei oder mehrere Verzweigungspuncte umgeben, können ebenfalls auf solche geschlossene Linien zurückgeführt werden, welche nur einen Verzweigungspunct enthalten. Denn zieht man von einem Puncte $z_0$ aus um jeden Verzweigungspunct eine geschlossene Linie und lässt die Variable dieselben eine nach der anderen durchlaufen, so kann dieser Weg, ohne dass einer der Verzweigungspuncte überschritten wird, in eine geschlossene Linie umgeformt werden, die von $z_0$ aus alle Verzweigungspuncte umgiebt. (Fig. 11, wo $a$ und $b$ zwei Verzweigungspuncte bedeuten.) Man stellt solche geschlossene Linien um die einzelnen Verzweigungspuncte am einfachsten dadurch her, dass man um jeden einen kleinen Kreis beschreibt und jeden dieser Kreise mit $z_0$ durch eine Linie verbindet, die dann doppelt, hin und wieder zurück, durchlaufen werden muss.

Fig. 11.




## § 10.

Es sollen nun die vorigen Betrachtungen an einigen Beispielen erläutert, und daran zugleich gezeigt werden, in welcher Weise die Functionswerthe beim Durchlaufen geschlossener, einen Verzweigungspunct umgebender Linien in einander übergehen.

Erstes Beispiel.

$$w = \sqrt{z}.$$

Hier ist $z = 0$ ein Verzweigungspunct. Lässt man die Veränderliche von dem Puncte $z = 1$ ausgehen und die Peripherie eines aus dem Nullpuncte beschriebenen Kreises durchlaufen, so ist dies eine geschlossene Linie, welche den Verzweigungspunct umgiebt. Geht nun die Function $w = \sqrt{z}$ von dem Puncte $z = 1$ mit dem Werthe $w = +1$ aus, und setzt man

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so ist zuerst im Puncte $z = 1$, $r = 1$ und $\varphi = 0$. Durchläuft dann $z$ die Peripherie des Kreises in der Richtung der wachsenden Winkel, so bleibt $r$ constant $= 1$, und $\varphi$ nimmt von $0$ bis $2\pi$ zu. Kommt also die Veränderliche wieder nach dem Puncte $z = 1$ zurück, so ist jetzt

$$z = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$$

und folglich

$$w = \sqrt{z} = \cos\pi + i \sin\pi = -1;$$

die Function hat also jetzt im Puncte $z = 1$ nicht wieder den ursprünglichen Werth $+1$, sondern den andern Werth $-1$ erhalten. Ganz dasselbe tritt auch ein, wenn die Variable irgend eine andere geschlossene, den Nullpunct einmal umgebende Linie von $z = 1$ aus beschreibt; denn dieser Weg kann durch allmälige Aenderungen in den Kreis übergeführt werden, ohne dass dabei der Nullpunct überschritten wird. Geht überhaupt $w$ mit dem Werthe $w_0$ von irgend einem Puncte $z_0$ aus, für welchen

$$z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)$$

also

$$w_0 = r_0^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\varphi_0 + i \sin\tfrac{1}{2}\varphi_0)$$

ist, und beschreibt $z$ eine geschlossene Linie, welche den Nullpunct einmal in der Richtung der wachsenden Winkel umwindet, so ist bei der Rückkunft noch $z_0$

$$z = r_0(\cos(\varphi_0 + 2\pi) + i \sin(\varphi_0 + 2\pi))$$

geworden; mithin ist dann

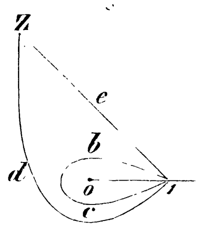
$$\begin{aligned} w &= r_0^{\frac{1}{2}}(\cos(\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \pi) + i \sin(\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \pi)) \\ &= -w_0. \end{aligned}$$

Wird die geschlossene Linie zweimal von der Variablen durchlaufen, oder beschreibt letztere eine andere geschlossene Linie, welche den Nullpunct zweimal umwindet, so wächst das Argument von

$z$ um $4\pi$, also das von $w$ um $2\pi$, und folglich erhält dann die Function ihren ursprünglichen Werth wieder.

Man lasse nun die Variable von dem Puncte $z = 1$ nach einem beliebigen Puncte $Z$ gehen, und zwar zuerst auf einer Linie $1\,e\,Z$ (Fig. 12), welche den Nullpunct nicht umwindet, und auf welcher die Winkel $\varphi$ wachsen. Auf diesem Wege mögen $r$ und $\varphi$ in $Z$ die Werthe $R$ und $\vartheta$, und $w$ den Werth $W$ erreichen, sodass

Fig. 12.




$$W = R^{\frac{1}{2}} (\cos \tfrac{1}{2}\vartheta + i \sin \tfrac{1}{2}\vartheta)$$

ist. Geht man dann aber auf der andern Seite des Nullpuncts von 1 nach $Z$ auf einer den Nullpunct nicht umwindenden Linie $1\,d\,Z$, so nimmt der Winkel $\varphi$ ab und erreicht in $Z$ den Werth $\vartheta - 2\pi$. Daher wird jetzt in $Z$

$$z = R\,(\cos(2\pi - \vartheta) - i \sin(2\pi - \vartheta))$$

und

$$w = R^{\frac{1}{2}} (\cos(\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta) - i \sin(\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta))$$

d. h.

$$w = -W.$$

Lässt man endlich $z$ zuerst von 1 aus eine geschlossene Linie $1\,b\,c\,1$ um den Nullpunct und dann die Linie $1\,d\,Z$ beschreiben, so wächst $\varphi$ zuerst von 0 bis $2\pi$ und nimmt dann um den Winkel $2\pi - \vartheta$ ab, so dass dann $\varphi$ in $Z$ den Werth $2\pi + \vartheta - 2\pi = \vartheta$ erhält; in diesem Falle geht also $w$ nach dem Durchlaufen der Linie $1\,b\,c\,1$ von 1 mit dem Werthe $-1$ aus und erlangt auf $1\,d\,Z$ in $Z$ den Werth $+W$.

Zweites Beispiel. In der Function

$$w = (z - 1)\sqrt{z}$$

ist zuerst $z = 0$ ein Verzweigungspunct, und es verhält sich diese Function in Beziehung auf diesen Punct ähnlich wie die vorige. Betrachten wir daher den Punct $z = 1$, für welchen ebenfalls $w = 0$ wird. Die Variable $z$ beschreibe um ihn einen Kreis mit dem Radius $r$, von dem Puncte $a = 1 + r$ der Hauptaxe (Fig. 13) ausgehend. Setzt man

$$z - 1 = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

so wird

$$w = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)\sqrt{1 + r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi}.$$

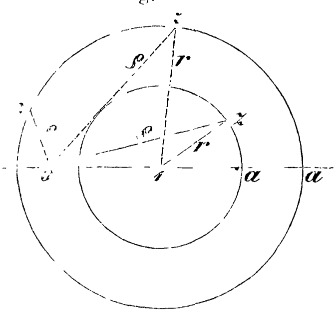
Da nun $r$ constant bleibt, und $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ wächst, so ändert der Factor $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ seinen Werth nicht. Um das Verhalten des zweiten Factors zu untersuchen, sei

$$1 + r\cos\varphi = \varrho\cos\psi \qquad r\sin\varphi = \varrho\sin\psi;$$

dann bedeutet $\varrho$ die Gerade $\overline{0z}$, und $\psi$ die Neigung derselben gegen die Hauptaxe, und es wird

$$w = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\varrho^{\frac{1}{2}}\,(\cos\tfrac{1}{2}\psi + i\sin\tfrac{1}{2}\psi).$$

Fig. 13.



Umgiebt nun der Kreis den Nullpunct nicht, so durchläuft $\psi$ von 0 an eine Reihe von Werthen, welche wieder mit dem Werthe 0 endigen, daher ändert $w$ seinen Werth nicht. Ist aber der Kreis so gross, dass der Nullpunct, welcher ein Verzweigungspunct ist, ebenfalls innerhalb desselben liegt, so wächst $\psi$ von 0 bis $2\pi$, und dann geht also der ursprüngliche Werth $w = r\varrho^{\frac{1}{2}}$ in $-r\varrho^{\frac{1}{2}}$ über. Es bestätigt sich also, dass nur der Punct $z = 0$ ein Verzweigungspunct ist, der Punct $z = 1$ aber nicht.

Man kann die gegebene Function $(z-1)\sqrt{z}$ als aus der folgenden

$$w' = \sqrt{(z-1)\,(z-b)\,z}$$

entstanden betrachten dadurch, dass $b$ gleich 1 geworden ist. Eine den Punct $z = 1$ umgebende Linie kann dann betrachtet werden als eine Linie, welche die beiden Puncte $z = 1$ und $z = b$ zugleich umgab, und bei welcher dann diese beiden Puncte zusammengefallen sind. Nun sind für die Function $w'$ sowohl $z = 0$, als auch $z = 1$ und $z = b$ Verzweigungspuncte. Eine geschlossene Linie, welche von einem Puncte $z_0$ aus beide Puncte 1 und $b$ umgiebt, kann ersetzt werden durch zwei geschlossene Linien, von denen jede nur einen derselben umgiebt. Geht nun $w'$ mit dem Werthe $w'_0$ aus $z_0$ aus, so geht beim Umkreisen des Punctes, $b$, $w_0'$ in $-w_0'$, und dann beim Umkreisen des Punctes 1 wieder $-w_0'$ in $w_0'$ über. Die Function kommt also mit dem ursprünglichen Werthe nach $z_0$ zurück. Dies bleibt nun bestehen, wenn $b$ sich dem Puncte 1 nähert, und wir sehen, dass wenn diese Verzweigungspuncte auf einander fallen, der gemeinschaftliche Punct aufhört, ein Verzweigungspunct zu sein. Es leuchtet ein, dass dies allgemein gelten muss: sobald bei zwei Verzweigungspuncten nur zwei und zwar die nämlichen zwei Functionswerthe gegenseitig in einander übergehen, so heben diese Verzweigungspuncte beim Zusammenfallen einander auf, und es entsteht ein Punct, der kein Verzweigungspunct mehr ist.

Drittes Beispiel. Sei

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}},$$

worin $a$ und $b$ zwei complexe Constanten bedeuten. Hier haben wir zwei Verzweigungspuncte $z = a$ und $z = b$. Lässt man nun zuerst $z$ eine geschlossene Linie von einem beliebigen Puncte $z_0$ aus um den Punct $a$ beschreiben, welche aber $b$ nicht umgiebt, und setzt zu dem Ende

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

während

$$z_0 - a = r_0\,(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$$

sei, so ist der Anfangswerth von $w$, der hier mit $w_1$ bezeichnet werden möge,

$$w_1 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}}\,(\cos\frac{1}{3}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{3}\varphi_0)}{[a-b+r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}.$$

Nachdem die geschlossene Linie einmal in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen ist, ist $\varphi_0$ um $2\pi$ gewachsen, und daher der entstehende Werth von $w$, welcher mit $w_2$ bezeichnet werden soll,

$$w_2 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}}\,(\cos(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi))}{[a-b+r_0\,(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}$$

geworden. Dabei kann der Nenner, also die Grösse $\sqrt[3]{z-b}$ ihren Werth nicht geändert haben, weil für diese $z = a$ kein Verzweigungspunct ist, sondern nur $z = b$, also $z$ eine geschlossene Linie beschrieben hat, die den Verzweigungspunct dieser Grösse nicht enthält. Bezeichnet man mit $\alpha$ den Werth

$$\alpha = \cos\tfrac{2}{3}\pi + i\sin\tfrac{2}{3}\pi = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

sodass $\alpha$ eine Wurzel der Gleichung $\alpha^3 = 1$ ist, so kann man auch schreiben, da

$$\cos(\tfrac{1}{3}\varphi_0+\tfrac{2}{3}\pi)+i\sin(\tfrac{1}{3}\varphi_0+\tfrac{2}{3}\pi)=(\cos\tfrac{1}{3}\varphi_0+i\sin\tfrac{1}{3}\varphi_0)(\cos\tfrac{2}{3}\pi+i\sin\tfrac{2}{3}\pi)$$

ist,

$$w_2 = \alpha w_1 .$$

Lässt man nun die Variable auf's Neue eine geschlossene Linie um den Punct $a$ herum beschreiben, so geht jetzt $w$ mit dem Werthe $w_2 = \alpha w_1$ von $z_0$ aus und erlangt folglich nach Vollendung des Umlaufs den Werth

$$w_3 = \alpha w_2 = \alpha^2 w_1 .$$

Nach einem dritten Umlaufe endlich erlangt $w$ den Werth $\alpha^3 w_1$, erhält also den ursprünglichen Werth $w_1$ wieder, da $\alpha^3 = 1$ ist. Wäre man, statt ursprünglich mit dem Werthe $w_1$ von $z_0$ auszugehen, zuerst mit dem Werthe $w_2$ ausgegangen, so hätte man nach resp. ein und zwei Umläufen die Werthe $w_3$ und $w_1$ erhalten; wäre aber $w_3$ der ursprüngliche Werth gewesen, so würde dieser in $w_1$ und $w_2$ übergegangen sein.

Aehnlich verhält es sich, wenn man $z$ eine geschlossene Linie beschreiben lässt, die nur den Punct $b$ umgiebt. Man setze alsdann

$$z - b = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und lasse $w$ mit dem Werthe $w_1$ von $z_0$ ausgehen, wo $w_1$ jetzt folgenden Ausdruck hat

$$w_1 = \frac{[b - a + r_0\,(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}{r_0^{\frac{1}{3}}\,(\cos\tfrac{1}{3}\varphi_0 + i\sin\tfrac{1}{3}\varphi_0)} .$$

Nach einem Umlaufe des $z$ in der Richtung der wachsenden Winkel wird der Werth von $w$

$$= \frac{[b - a + r_0\,(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}{r_0^{\frac{1}{3}}\,(\cos(\tfrac{1}{3}\varphi_0 + \tfrac{2}{3}\pi) + i\sin(\tfrac{1}{3}\varphi_0 + \tfrac{2}{3}\pi))},$$

wobei sich jetzt der Zähler nicht geändert haben kann, weil der Verzweigungspunct desselben, $a$, nicht umschrieben worden ist. Man erhält also jetzt für $w$ den Werth

$$\frac{w_1}{\alpha} = \alpha^2 w_1, \text{ d. h. den Werth } w_3 .$$

Nach einem zweiten Umlaufe erhält man

$$\frac{w_1}{\alpha^2} = \alpha w_1, \quad \text{also } w_2;$$

endlich nach einem dritten Umlaufe stellt der ursprüngliche Werth $w_1$ sich wieder ein, da

$$\frac{w_1}{\alpha^3} = w_1$$

ist.

Man sieht hieraus, dass die Functionswerthe bei mehrmaligem Umkreisen eines Verzweigungspunctes sich cyclisch mit einander vertauschen. Beim Umkreisen des Punctes $a$ in der Richtung der wachsenden Winkel gehen

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

nach dem ersten Umlaufe der Reihe nach über in

$$w_2 \quad w_3 \quad w_1 \,,$$

und nach dem zweiten Umlaufe in

$$w_3 \quad w_1 \quad w_2 \,;$$

bei einem dritten Umlaufe stellen sich daher die ursprünglichen Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

wieder ein. Ebenso gehen beim Umkreisen des Punctes $b$ in der Richtung der wachsenden Winkel die Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

in

$$w_3 \quad w_1 \quad w_2$$

und in

$$w_2 \quad w_3 \quad w_1$$

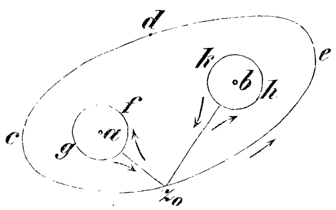
über und erhalten nach dem dritten Umlaufe die ursprünglichen Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

wieder.

Untersuchen wir nun noch, was eintritt, wenn $z$ eine geschlossene Linie beschreibt, welche beide Puncte, $a$ und $b$, enthält. Eine solche kann stets ohne Ueberschreitung eines dieser Puncte in eine andere übergeführt werden, die aus einer successiven Umkreisung des einen und des andern besteht (Fig. 11). Man lässt dann $z$ zuerst von $z_0$ aus den Punct $a$ umkreisen, nach $z_0$ zurückkehren und dann den Punct $b$ umkreisen. Auf diesem Wege erhält $w$ bei der letzten Rückkunft nach $z_0$ denselben Werth, als wenn $z$ die geschlossene Linie um beide Verzweigunspuncte durchläuft (§ 9). Geht nun $w$ mit $w_1$ aus $z_0$ aus, so erhält es nach der Umkreisung von $a$ den Werth $\alpha w_1 = w_2$, alsdann nach der Umkreisung von $b$ den Werth $\frac{w_2}{\alpha} = w_1$; die Function bekommt also ihren ursprünglichen Werth wieder. Be-

Fig. 11.



trachtet man in dieser Beziehung statt der gegebenen Function die folgende

$$w' = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)},$$

bei welcher, wie man leicht übersehen wird, auch bei einer Umkreisung des Punctes $b$ dem ursprünglichen Functionswerthe der Factor $\alpha$ hinzugefügt wird, so geht bei der Umkreisung von $a$ $w_1'$ in $\alpha w_1' = w_2'$, und bei der Umkreisung von $b$, $w_2'$ in $\alpha w_2' = w_3'$ über. Ein Umlauf um beide Puncte verwandelt also $w_1'$ in $w_3'$; ein zweiter Umlauf wird daher $w_3'$ in $w_2'$, und ein dritter $w_2'$ in $w_1'$ verwandeln.

Viertes Beispiel. Die Function

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c},$$

welche die Wurzel der Gleichung 6ten Grades

$$\begin{aligned}(z-b)^2 w^6 - 3\,(z-b)^2 (z-c)\, w^4 - 2\,(z-a)(z-b)\, w^3 \\ + 3\,(z-b)^2 (z-c)^2 w^2 - 6\,(z-a)(z-b)(z-c)\, w \\ + (z-a)^2 - (z-b)^2 (z-c)^3 = 0\end{aligned}$$

ist, hat die Puncte $a$, $b$, $c$ zu Verzweigungspuncten. Führt man der Kürze wegen

$$\sqrt[3]{z-a} = t\,,\quad \sqrt[3]{z-b} = u\,,\quad \sqrt{z-c} = v$$

ein und giebt dem Buchstaben $\alpha$ dieselbe Bedeutung wie in dem vorigen Beispiele, so kann man die 6 Functionswerthe folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{t}{u} + v & w_4 &= \frac{t}{u} - v \\ w_2 &= \alpha\frac{t}{u} + v & w_5 &= \alpha\frac{t}{u} - v \\ w_3 &= \alpha^2\frac{t}{u} + v & w_6 &= \alpha^2\frac{t}{u} - v. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun zuerst Umläufe der Variablen um den Punct $a$; dabei geht $t$ in $\alpha t$, $\alpha^2 t$, $t$, .... über, während $u$ und $v$ ungeändert bleiben; demnach geht über:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $w_1$, | $w_2$, | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
| nach dem ersten Umlauf in | $w_2$ | $w_3$ | $w_1$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_4$ |
| „ „ zweiten „ „ | $w_3$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_6$ | $w_4$ | $w_5$ |
| „ „ dritten „ „ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$. |

Um diesen Verzweigungspunct herum permutiren sich also nur die Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$ für sich, und $w_4$, $w_5$, $w_6$ für sich.

Bei Umläufen um den Punct $b$ bleiben $t$ und $v$ ungeändert, und $u$ verwandelt sich in $\alpha u$, $\alpha^2 u$, $u$, $\cdots$. Also gehn über:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
| nach dem ersten Umlauf in | $w_3$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_6$ | $w_4$ | $w_5$ |
| „ „ zweiten „ „ | $w_2$ | $w_3$ | $w_1$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_4$ |
| „ „ dritten „ „ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$; |

hier permutiren sich also dieselben Functionswerthe, wie bei $a$, nur in umgekehrter Aufeinanderfolge.

Bei Umläufen um den Punct $c$ endlich bleiben $t$ und $u$ ungeändert, und $v$ verwandelt sich in $-v$, $+v$, $\cdots$. Daher gehn hier über:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
| nach dem ersten Umlauf in | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
| „ „ zweiten „ „ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$. |

In diesem Beispiele haben wir also erstlich zwei Verzweigungspuncte $a$ und $b$, um welche herum die drei Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$ cyclisch in einander übergehn, niemals aber in einen der drei übrigen Werthe; ebenso permutiren sich hier $w_4$, $w_5$, $w_6$ cyclisch unter einander und gehen nie in einen der drei ersteren über. Alsdann haben wir noch einen Verzweigungspunct $c$, in welchem die drei Paare $w_1$, $w_4$; $w_2$, $w_5$; $w_3$, $w_6$ jedes unter sich ihre Werthe vertauschen, ohne dass jemals ein Werth aus einem andern Paare dazu träte.

Lässt man $z$ eine geschlossene Linie beschreiben, welche zwei Verzweigungspuncte umgiebt, so kann man eine solche wieder durch zwei successive Umkreisungen je eines Punctes ersetzen. Werden die Puncte $a$ und $b$ umschlossen, so verhält sich die Sache ebenso wie bei dem vorigen Beispiele, wir wollen daher nur Umläufe um $a$ und $c$ verfolgen und stellen das Ergebniss in folgender Tabelle zusammen:

| Umläufe | um $a$ | um $c$ | um beide |
|---|---|---|---|
| 1 | $w_1$ geht über in $w_2$ | $w_2$ in $w_5$ | $w_1$ in $w_5$ |
| 2 | $w_5$ „ „ „ $w_6$ | $w_6$ „ $w_3$ | $w_5$ „ $w_3$ |
| 3 | $w_3$ „ „ „ $w_1$ | $w_1$ „ $w_4$ | $w_3$ „ $w_4$ |
| 4 | $w_4$ „ „ „ $w_5$ | $w_5$ „ $w_2$ | $w_4$ „ $w_2$ |
| 5 | $w_2$ „ „ „ $w_3$ | $w_3$ „ $w_6$ | $w_2$ „ $w_6$ |
| 6 | $w_6$ „ „ „ $w_4$ | $w_4$ „ $w_1$ | $w_6$ „ $w_1$ |

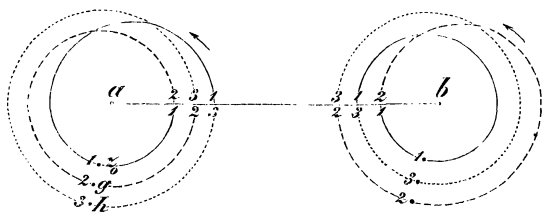
Dabei erreicht also $w$ seinen ursprünglichen Werth erst nach 6 Umläufen um die Puncte $a$ und $c$.

## § 11.

Die im Vorigen angestellten Betrachtungen zeigen, dass man bei einer mehrdeutigen Function, indem man der Variablen complexe Werthe zuertheilt und dieselbe eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe durchlaufen lässt, die mit demselben Werthe endigen, mit dem sie begonnen haben (geometrisch ausgedrückt, indem man die Variable eine geschlossene Linie beschreiben lässt), von einem der Werthe, die eine Function für denselben Werth der Variablen anzunehmen vermag, zu einem andern auf stetige Weise übergehen kann. Es ist ferner gezeigt worden, dass eine bestimmte stetige Reihenfolge der Werthe der Variablen (ein bestimmter Weg) auch stets zu einem bestimmten Functionswerthe führt, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo der Weg der Variablen durch einen Verzweigungspunct hindurch führt, ein Fall, der aber immer dadurch vermieden werden kann, dass man die Variable in der Nähe des Verzweigungspunctes eine beliebig kleine Ausbiegung machen lässt. Hieran knüpft sich nun der natürliche Wunsch, sich von der Verschiedenheit der Werthe einer mehrdeutigen Function zu befreien, um eine solche wie eine eindeutige behandeln zu können. Nach den früheren Auseinandersetzungen ist hierzu nur erforderlich, dass man sich von der Verschiedenartigkeit der Wege befreie, welche die Variable zwischen zwei bestimmten Puncten durchlaufen kann. Nun bemerkte schon *Cauchy*, dass man dies, wenigstens in beschränkter Weise, dadurch erreichen könne, dass man gewisse Theile der Ebene, in welcher die Variable $z$ sich bewegend gedacht wird, abgrenzt und der Veränderlichen nicht gestattet, die Grenzen eines solchen Gebietes zu überschreiten. Da nämlich eine Function, von einem Puncte $z_0$ der Variablen ausgehend, in einem anderen Puncte $z_1$ nur dann verschiedene Werthe annehmen kann, wenn zwei von der Variablen durchlaufene Wege einen Verzweigungspunct einschliessen (§ 9), so ist es stets leicht, ein Stück der $z$-Ebene abzugrenzen, innerhalb dessen von $z_0$ nach $z_1$ zwei solche Wege nicht möglich sind. Innerhalb eines solchen Gebietes bleibt dann die Function eindeutig, da sie in jedem Puncte $z_1$ auf jedem Wege nur einen einzigen Werth erhält. *Cauchy* nannte dann die Function monodrom in diesem Gebiete, wofür *Riemann* das deutsche Wort einändrig setzte. Allein auf diese Weise wird der Variablen eine Schranke auferlegt, welche man nicht immer einhalten kann, da die Untersuchungen oft über das Gebiet, innerhalb dessen eine Function einändrig ist, hinausführen. Daher hat *Riemann* ein anderes Mittel ersonnen, sich von der Mehrdeutigkeit der Functionen zu befreien, welches vollständig zum Ziele führt.

*Riemann* nimmt an, dass wenn eine Function $n$-deutig ist, also jedem Werthe der Variablen $n$ Werthe der Function zugehören, die Ebene der $z$ aus $n$ über einander liegenden Schichten oder Blättern bestehe (oder dass $n$ solche Blätter über der Ebene der $z$ ausgebreitet seien), über welche die Variable sich frei hin bewegen kann. Jedem Puncte in jedem Blatte entspricht nur ein einziger Werth der Function, und den $n$ unmittelbar über einander liegenden Puncten aller $n$ Blätter die $n$ verschiedenen Werthe der Function, die demselben Werthe von $z$ angehören. In den Verzweigungspuncten nun, wo mehrere sonst verschiedene Functionswerthe einander gleich sind, hängen mehrere jener Blätter zusammen, sodass der betreffende Verzweigungspunct zu gleicher Zeit in allen diesen zusammenhängenden Blättern liegend gedacht wird. Die Anzahl dieser so in einem Verzweigungspuncte zusammenhängenden Blätter kann für jeden Verzweigungspunct verschieden sein und ist gleich der Anzahl der Functionswerthe, welche beim Umlaufe der Variablen um den Verzweigungspunct cyclisch in einander übergehen. In dem letzten Beispiele des vorigen §, wo die Function 6-werthig ist, werden wir die $z$-Ebene als aus 6 Blättern bestehend annehmen. Um jeden der Verzweigungspuncte $a$ und $b$ herum gehen einerseits die Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$ und andrerseits die Werthe $w_4$, $w_5$, $w_6$ in einander über; daher nehmen wir an, dass in jedem dieser Puncte einerseits die Blätter 1, 2, 3, andrerseits die Blätter 4, 5, 6 zusammenhängen. Um den Punct $c$ herum dagegen gehen erstens $w_1$ und $w_4$, zweitens $w_2$ und $w_5$ und drittens $w_3$ und $w_6$ gegenseitig in einander über; daher hängen im Puncte $c$ einmal die Blätter 1 und 4, dann die Blätter 2 und 5 und endlich die Blätter 3 und 6 zusammen. Um nun den stetigen Uebergang eines Functionswerthes in einen andern zu vermitteln, werden sogenannte Verzweigungsschnitte geführt. Dies sind ganz beliebige, nur sich selbst nicht schneidende, Linien, welche entweder von einem Verzweigungspuncte aus ins Unendliche gehn oder zwei Verzweigungspuncte mit einander verbinden. Ueber diese Verzweigungsschnitte hinüber denkt man sich nun die Blätter nicht so zusammenhängend, wie sie natürlich über einander liegen, sondern so, wie die Functionswerthe in einander übergehen. Legen wir z. B. in dem letzten Beispiele des vorigen § einen Verzweigungsschnitt von $a$ nach $b$ (Fig. 14), so lassen wir, indem wir den Punct $a$ in der Richtung der wachsenden Winkel

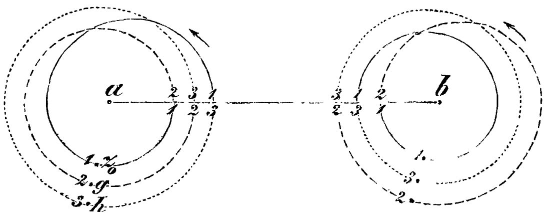
Fig. 14.




umkreisen, über den Verzweigungsschnitt hinüber das Blatt 1 mit dem Blatte 2, dann 2 mit 3 und endlich 3 wieder mit 1 zusammenhängen. Wir wollen die rechte Seite des Verzweigungsschnittes $\overline{ab}$ diejenige nennen, welche ein Beobachter zur Rechten hat, wenn er sich in $a$ befindet und nach $b$ hinsieht. Geht dann $z$ von einem Puncte $z_0$ im Blatte 1 ($w$ mit dem Werthe $w_1$) aus und umkreist den Punct $a$ in der Richtung der wachsenden Winkel, so gelangt es, indem es den Verzweigungsschnitt von der Rechten zur Linken überschreitet aus dem ersten Blatte in das zweite und befindet sich noch darin, wenn es nach $z_0$ zurück oder vielmehr in den unmittelbar unter $z_0$ im 2ten Blatte liegenden Punct $g$ kommt, sodass jetzt $w$ den Werth $w_2$ erlangt hat. Wird dann der Kreislauf fortgesetzt, so gelangt $z$, wenn es zum zweiten Male den Verzweigungsschnitt von der Rechten zur Linken überschreitet, in das 3te Blatt und befindet sich noch darin, wenn es nach dem in diesem Blatte unter $z_0$ befindlichen Puncte $h$ gekommen ist; jetzt hat $w$ den Werth $w_3$ erhalten. Ueberschreitet endlich $z$ den Verzweigungsschnitt zum dritten Male, so nehmen wir an, dass nun die rechte Seite des 3ten Blattes sich durch das 2te Blatt hindurch mit der linken Seite des 1sten Blattes über den Verzweigungsschnitt hinüber verbinde, sodass dann $z$ aus dem 3ten Blatte in das 1ste hinübertrete und dann wirklich wieder nach $z_0$ zurückgelangt.*) Jetzt erst ist die Linie wirklich geschlossen, und $w$ hat auch wieder seinen ursprünglichen Werth erlangt. In Fig. 14 sind die Linien mit den Nummern der Blätter bezeichnet, in denen sie verlaufen, und ausserdem die im 2ten und 3ten Blatte verlaufenden resp. gestrichelt und punctirt. Die Puncte $z_0$, $g$, $h$, welche eigentlich direct unter einander liegen sollen, sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet.

In ähnlicher Weise hat man sich die Sache bei allen Verzweigungspuncten zu denken, und da von jedem solchen Puncte ein Verzweigungsschnitt ausgeht, so kann die Variable den Verzweigungspunct nicht umkreisen, ohne den Verzweigungsschnitt zu überschreiten und dadurch nach und nach in alle diejenigen Blätter zu gelangen, welche in dem Verzweigungspuncte zusammenhängen. Wie in jedem Falle die Verzweigungsschnitte zu legen sind, hängt von der zu untersuchenden Function ab und kann meist in verschiedener Weise gewählt werden. In unserem Beispiele darf man $a$ und $b$ durch einen solchen Schnitt verbinden, weil bei der Umkreisung des Punctes $b$ in der Richtung der wachsenden Winkel die Function $w_1$ in $w_3$, und diese in $w_2$ übergeht (Fig. 14), und daher bei $b$ dieselben Blätter und in dersel-

Fig. 14.




ben Weise zusammenhängen wie bei $a$, nämlich die rechte Seite von 1 mit der linken von 2, die rechte Seite von 2 mit der linken von 3, und die rechte Seite von 3 mit der linken von 1.

*) Dies würde sich in Wirklichkeit, z. B. an einem Modell vollständig allerdings nicht ausführen lassen; aber man kann dadurch ein ganz anschauliches Modell herstellen, dass man das erste Blatt mit dem zweiten nur längs eines Theiles des Verzweigungsschnittes, etwa mittelst eines übergeklebten Papierstreifens, verbindet, ebenso das zweite mit dem dritten, und dabei eine Lücke lässt, durch welche hindurch das dritte Blatt mit dem ersten verbunden werden kann. Dies Verfahren lässt sich in allen Fällen ausführen, z. B. auch da, wo die Blätter 1, 4; 2, 5; 3, 6 gegenseitig in einander übergehn.

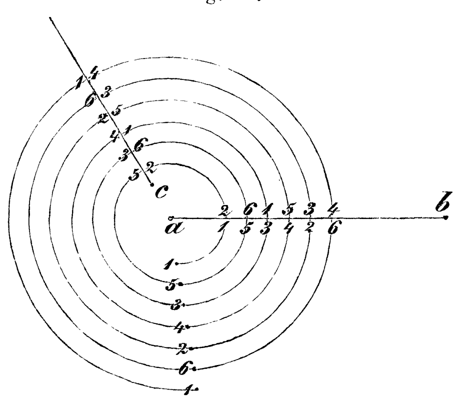
Bleiben wir noch bei diesem Beispiele stehn, und untersuchen wir auch den im vorigen § besprochenen Umlauf um $a$ und $b$ und um $a$ und $c$. Bei einem Umlauf um $a$ und $b$ wird der Verzweigungsschnitt gar nicht überschritten, sodass $z$ im 1sten Blatte bleibt; in der That erhält nach einem solchen Umlauf $w$ in $z_0$ seinen Anfangswerth wieder (vgl. Beisp. 3. § 10). Um die Umkreisung der Puncte $a$ und $c$ zu untersuchen, legen wir von $c$ aus einen Verzweigungsschnitt ins Unendliche und lassen hier je zwei der Blätter 1, 4; 2, 5; 3, 6 gegenseitig in einander übergehen.

Für die hier stattfindenden Uebergänge der Functionswerthe hatten wir S. 52 folgende Tabelle gefunden:

| Umläufe | um $a$ | um $c$ | um beide |
|---|---|---|---|
| 1 | $w_1$ geht über in $w_2$ | $w_2$ in $w_5$ | $w_1$ in $w_5$ |
| 2 | $w_5$ „ „ „ $w_6$ | $w_6$ „ $w_3$ | $w_5$ „ $w_3$ |
| 3 | $w_3$ „ „ „ $w_1$ | $w_1$ „ $w_4$ | $w_3$ „ $w_4$ |
| 4 | $w_4$ „ „ „ $w_5$ | $w_5$ „ $w_2$ | $w_4$ „ $w_2$ |
| 5 | $w_2$ „ „ „ $w_3$ | $w_3$ „ $w_6$ | $w_2$ „ $w_6$ |
| 6 | $w_6$ „ „ „ $w_4$ | $w_4$ „ $w_1$ | $w_6$ „ $w_1$ |

Diese Uebergänge sind in Fig. 15 dargestellt, indem jede Linie mit der Nummer des Blattes bezeichnet ist, in welcher sie verläuft. Die eigentlich unter dem Ausgangspuncte 1 liegenden Puncte sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet, und den letzten Punct 1 hat man sich mit dem ersten als zusammenfallend zu denken.

Fig. 15.




Dieses in unserem Beispiele aus 6 Blättern bestehende Gebiet für die Veränderliche $z$ bildet nun eine einzige zusammenhängende Fläche, indem die Blätter in den Verzweigungspuncten zusammenhängen und längs der Verzweigungsschnitte in einander übergehen. In dieser Fläche ist $w$ eine vollkommen eindeutige Function des Ortes in der Fläche, da sie in jedem Puncte der letzteren denselben Werth erlangt, auf welchem Wege auch die Variable zu dem Puncte gelangen möge. Beschreibt $z$ zwischen zwei Puncten zwei Wege, welche einen Verzweigungspunct einschliessen, so muss einer von beiden nothwendig einen Verzweigungsschnitt überschreiten und dadurch in ein anderes Blatt gelangen, so dass die Endpuncte der beiden Wege nicht mehr als zusammenfallend, sondern als zwei verschiedene Puncte der $z$-Fläche zu betrachten sind, in denen dann auch verschiedene Functionswerthe statt haben. Beschreibt aber $z$ eine wirklich geschlossene Curve, d. h. fallen Anfangs- und Endpunct der Curve in den nämlichen Punct des nämlichen Blattes zusammen, so erhält auch die Function den Anfangswerth wieder. Nur wenn die Variable durch einen Verzweigungspunct hindurch geht, kann sie nach Belieben in jedes der hier zusammenhängenden Blätter übergehn, und dann bleibt es unbestimmt, welchen Werth die Function annimmt. (§ 8).

## § 12.

Um nun im Allgemeinen nachzuweisen, dass wirklich in allen Fällen durch eine die $z$-Ebene $n$-fach bedeckende Fläche, deren einzelne Blätter in den Verzweigungspuncten und längs der Verzweigungsschnitte in der oben erläuterten Weise zusammenhängen, eine $n$-deutige Function in eine eindeutige verwandelt werden kann, haben wir nur unser Augenmerk auf irgend eine scheinbar geschlossene Linie zu richten, worunter wir eine Linie verstehen wollen, deren Endpunct unter oder über dem Anfangspuncte in einem anderen Blatte wie der letztere liegt. Wenn eine solche scheinbar geschlossene Linie, welche einen oder mehrere Verzweigungspuncte beliebig oft umwinden mag, und von der wir nur voraussetzen, dass sie durch keinen Verzweigungspunct hindurchführt, von der Variablen durchlaufen ist, so wird jeder der $n$ Functionswerthe entweder ungeändert geblieben oder in einen anderen übergegangen sein, sodass die $n$ Werthe wieder sämmtlich, nur in einer anderen Anordnung, auftreten. Nun kann aber jede beliebige Anordnung von $n$ Elementen aus einer anderen Anordnung durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen erzeugt werden. Unter einer cyclischen Vertauschung $p$ter Ordnung versteht man nämlich eine solche, bei welcher man aus den vorhandenen $n$ Elementen beliebige $p$ herausgreift und nun an die Stelle des ersten ein zweites, an Stelle dieses ein drittes u. s. w., endlich an Stelle des $p$ten wieder das erste setzt. Eine solche cyclische Vertauschung $p$ter Ordnung hat die Eigenschaft, dass nach $p$ Wiederholungen derselben, und nicht früher, die ursprüngliche Anordnung wieder zum Vorschein kommt; denn da an die Stelle jedes Elementes ein anderes, an die Stelle des $p$ten aber das erste tritt, so kann jedes Element erst dann wieder an seiner ursprünglichen Stelle erscheinen, wenn die sämmtlichen $p-1$ anderen Elemente an derselben Stelle aufgetreten sind, dann aber tritt jedes Element auch wirklich wieder an seine ursprüngliche Stelle. Um nun nachzuweisen, dass jede Anordnung aus einer anderen durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen erzeugt werden kann, nehmen wir an, irgend eine Anordnung entstehe aus einer anderen so, dass an die Stelle eines Elementes, z. B. 1 ein anderes, z. B. 3, getreten sei. An die Stelle von 3 tritt dann entweder 1, und dann haben wir schon eine cyclische Vertauschung zweiter Ordnung, oder ein anderes z. B. 5. An die Stelle dieses letzteren tritt nun wieder entweder das erste 1, und dann haben wir eine cyclische Vertauschung dritter Ordnung, oder wiederum ein anderes, das nothwendig von den schon benutzten 1, 3, 5 verschieden sein muss. An die Stelle dieses kann entweder das erste treten, wodurch eine cyclische Vertauschung geschlossen wäre, oder wieder ein anderes; einmal aber muss die cyclische Vertauschung sich schliessen, weil überhaupt nur eine endliche Anzahl von Elementen vorhanden ist, und das erste Element 1 sich an irgend einer Stelle der zweiten Anordnung vorfinden muss. Auf diese Weise ist dann eine Reihe von Elementen abgefertigt. Beginnt man nun mit irgend einem der noch nicht verwendeten Elemente, so kann man das vorige Verfahren wiederholen, bis alle Elemente erschöpft sind und hat so eine gewisse Anzahl cyclischer Vertauschungen erhalten, welche nach einander angewendet, die zweite Anordnung aus der ersten erzeugen. Hat ein Element bei der zweiten Anordnung seine Stelle nicht geändert, so kann eine Nicht-änderung als eine cyclische Vertauschung erster Ordnung angesehen werden. Ein Beispiel möge das Vorige erläutern. Seien die 11 Elemente

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11$$

in die Anordnung

3 11 5 2 7 10 1 9 6 8 4

übergegangen; so sieht man, dass nach der Reihe

1 3 5 7

in

3 5 7 1

übergegangen sind; diese bilden also eine cyclische Vertauschung vierter Ordnung. Geht man dann von 2 aus, so zeigt sich, dass

2 11 4

in

11 4 2

übergehn; also hat man eine zweite cyclische Vertauschung dritter Ordnung. Das nächste noch nicht verwendete Element ist 6. Dann geht 6 10 8 9

in 10 8 9 6

über, und man hat eine dritte cyclische Vertauschung vierter Ordnung. Jetzt sind alle 11 Elemente erschöpft, und folglich wird die zweite gegebene Anordnung aus der ersten durch die gefundenen drei cyclischen Vertauschungen erzeugt.

Kehren wir nun zu unseren Functionswerthen zurück, so folgt, dass was auch immer für eine Anordnung derselben durch eine scheinbar geschlossene Linie entstehen mag, dieselbe immer durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen der Functionswerthe hervorgebracht werden kann. Damit ist zuerst die Einführung der Verzweigungspuncte und der von ihnen ausgehenden Verzweigungsschnitte gerechtfertigt, um welche herum die Functionswerthe nur cyclische Vertauschungen erleiden. Aber diese müssen auch ganz bestimmte sein, denn die Werthänderung, welche jeder Functionswerth bei einer einmaligen Umkreisung des Verzweigungspunctes erfährt, erfährt der nämliche Functionswerth bei einer zweiten Umkreisung wieder, sodass andre als die bestimmten Glieder der cyclischen Vertauschung hier nicht vorkommen können. Dadurch rechtfertigt sich, dass in jedem Verzweigungspuncte nur eine Anzahl ganz bestimmter Blätter zusammenhängen. Da endlich jeder scheinbar geschlossene Weg in eine Reihe von Umkreisungen der einzelnen Verzweigungspuncte umgeformt werden kann (§ 9), so können überhaupt nur solche Anordnungen der Functionswerthe vorkommen, welche durch die bestimmten bei den Umkreisungen der Verzweigungspuncte stattfindenden cyclischen Vertauschungen erzeugt werden können.

Damit ist dargethan, dass alle Anordnungen, welche die Functionswerthe einer $n$-werthigen Function eingehen können, durch die cyclischen Vertauschungen um die Verzweigungspuncte herum hervorgebracht werden; und denkt man sich nun die Blätter der Fläche längs der Verzweigungsschnitte in der Weise zusammenhängend, wie die cyclischen Vertauschungen es verlangen, so vertheilen sich für jeden Werth von $z$ die einzelnen Functionswerthe auf die einzelnen Blätter, und die Function wird in der That zu einer eindeutigen Function des Ortes dieser Fläche.

Hierdurch ist die Vieldeutigkeit der Functionen aufgehoben, und wir werden nun im Folgenden stets annehmen, dass das Gebiet der Veränderlichen aus so vielen Blättern bestehe, als nöthig sind, um eine zu betrachtende vieldeutige Function in eine eindeutige zu verwandeln, und werden zwei Puncte nur dann als identisch betrachten, wenn sie auch demselben Blatte der Fläche angehören. Demgemäss nennen wir eine Linie nur dann wirklich geschlossen, wenn ihr Anfangs- und Endpunct in dem nämlichen Puncte des nämlichen Blattes zusammenfallen. Endigt dagegen eine Linie in einem Puncte, der unter oder über dem Anfangspuncte in einem anderen Blatte liegt, so nennen wir die Linie scheinbar geschlossen.

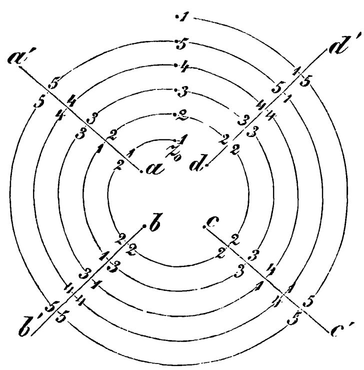
## § 13.

Hieran knüpfen sich noch folgende Bemerkungen. Beim Ueberschreiten eines Verzweigungsschnittes setzt sich, wie erläutert worden ist, ein Blatt in ein anderes fort, in der Art, dass wenn die Variable sich auf demselben fortbewegt, die Function sich stetig ändert. Wenn dagegen die Variable in dem nämlichen Blatte von der einen Seite eines Verzweigungsschnittes auf die andere Seite desselben hinüber tritt, so erleidet die Function eine Unterbrechung der Stetigkeit; in der That wird angenommen, dass der auf der rechten Seite eines Verzweigungsschnittes befindliche Theil eines Blattes mit dem auf der linken Seite liegenden Theile desselben Blattes über den Verzweigungsschnitt hinüber nicht im Zusammenhange steht. In zwei Puncten, welche einander unendlich nahe liegen, aber in dem nämlichen Blatte auf verschiedenen Seiten eines Verzweigungsschnittes sich befinden, sind daher die Functionswerthe nicht auch nur um ein unendlich Kleines von einander verschieden, sondern um eine endliche Grösse, falls die beiden Puncte nicht gerade einem Verzweigungspuncte unendlich nahe liegen. Man drückt dies auch kurz so aus, dass man sagt, die Function hat in demselben Blatte zu beiden Seiten eines Verzweigungsschnittes verschiedene Werthe, während sie auf den in einander übergehenden Blättern zu beiden Seiten des Verzweigungsschnittes gleiche Werthe hat. Nimmt man z. B. bei $\sqrt{z}$ den von dem Verzweigungspuncte $z = 0$ ausgehenden positiven Theil der Hauptaxe als Verzweigungsschnitt und betrachtet zwei Puncte $1 + \varepsilon$ und $1 - \varepsilon$, welche zu beiden Seiten des Verzweigungsschnittes unendlich nahe an dem Puncte 1 liegen, indem $\varepsilon$ eine unendlich kleine (etwa rein imaginäre) Grösse bedeute; nimmt man ferner an, auf der linken Seite der positiven Hauptaxe hätten im ersten Blatte die Werthe von $\sqrt{z}$ das Vorzeichen $+$ und daher im 2ten Blatte das Vorzeichen $-$, so ist für $z = 1 + \varepsilon$ im ersten Blatte $\sqrt{z} = +\sqrt{1+\varepsilon}$, für $z = 1 - \varepsilon$ dagegen in demselben Blatte $\sqrt{z} = -\sqrt{1-\varepsilon}$; denn geht man von $z = 1$ auf einer geschlossenen Linie in der Richtung der wachsenden Winkel um den Nullpunct herum nach 1 zurück, so geht $\sqrt{z}$ von $+1$ in $-1$ über (§ 10. Beisp. 1). Daher haben die Werthe von $\sqrt{z}$ auf der rechten Seite des Verzweigungsschnittes im ersten Blatte das Vorzeichen $-$, und im zweiten Blatte das Vorzeichen $+$. Lässt man nun $z$ den Verzweigungsschnitt überschreiten und von $1 - \varepsilon$ im ersten Blatte nach $1 + \varepsilon$ im zweiten Blatte gelangen, so geht $-\sqrt{1-\varepsilon}$ in $-\sqrt{1+\varepsilon}$ über. Diese Aenderung ist stetig, da der Unterschied gleich $-\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}$, also mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung gleich $-(1+\frac{1}{2}\varepsilon) + (1-\frac{1}{2}\varepsilon) = -\varepsilon$, daher unendlich klein ist. Tritt aber $z$ von $1 - \varepsilon$ auf dem rechten Theile des ersten Blattes nach $1 + \varepsilon$ auf dem linken Theile desselben Blattes hinüber, so geht $-\sqrt{1-\varepsilon}$ in $+\sqrt{1+\varepsilon}$ über, und dann ist der Unterschied gleich $\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}$ $= 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + (1 - \frac{1}{2}\varepsilon) = 2$, also nicht mehr unendlich klein. Die Function macht also in der That einen Sprung.

*Riemann* nennt die Verzweigungspuncte auch W i n d u n g s p u n c t e, weil die Fläche sich um einen solchen Punct wie eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Ganghöhe herumwindet. Hängen dann in einem solchen Puncte nur zwei Blätter der Fläche zusammen, so heisst derselbe ein e i n f a c h e r V e r z w e i g u n g s p u n c t oder ein W i n d u n g s p u n c t e r s t e r O r d n u n g, hängen aber in ihm $n$ Blätter der Fläche zusammen, so heisst er ein W i n d u n g s p u n c t ($n - 1$)t e r O r d n u n g. Für manche Untersuchungen ist es nun wichtig zu zeigen, dass ein Windungspunct $(n - 1)$ter Ordnung immer so angesehen werden kann, als wenn in ihm $n - 1$ einfache Verzweigungspuncte zusammengefallen wären. Nehmen wir beispielsweise $n = 5$ an, so gelangt bei einem Verzweigungspuncte, in welchem 5 Blätter zusammenhängen, die Variable nach jedem Umlaufe in das nächstfolgende Blatt, und eine Curve muss 5 Umläufe um den Verzweigungspunct machen, ehe sie wieder in das erste zurückgelangt und sich schliesst. Dasselbe findet aber auch statt, wenn man 4 einfache Verzweigungspuncte $a$, $b$, $c$, $d$ annimmt, in welchen der Reihe nach folgende Blätter zusammenhängen;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| in | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| | 1 und 2 | 1 und 3 | 1 und 4 | 1 und 5. |

Fig. 16.




In Fig. 16 sind $aa'$, $bb'$, $cc'$, $dd'$ die Verzweigungsschnitte, und die Zahlen bedeuten die Nummern der Blätter, in welchen die Linien verlaufen. Ueberschreitet die Curve von $z_0$ aus den Schnitt $aa'$, so tritt sie aus 1 in 2 und bleibt bei dem ganzen Umlauf in 2, weil dies Blatt in keinem der Puncte $b$, $c$, $d$ mit einem anderen zusammenhängt. Beim ersten Umlaufe kommt also die Curve aus 1 in 2. Wird nun $aa'$ zum zweiten Male überschritten, so tritt sie aus 2 in 1 und dann bei $bb'$ aus 1 in 3. Dann aber bleibt sie bis zur Rückkunft nach $z_0$ in 3, also bringt der 2te Umlauf sie nach 3. Erst bei $bb'$ tritt sie wieder aus 3 in 1 und dann bei $cc'$ aus 1 in 4. In dieser Weise bringt jeder neue Umlauf die Curve in das nächstfolgende Blatt; nach dem 5ten Umlaufe gelangt sie daher in das erste Blatt zurück und schliesst sich. Man sieht also, dass die Uebergänge hier in derselben Weise stattfinden, wie bei einem Windungspuncte 4ter Ordnung, nähern sich daher die 4 einfachen Verzweigungspuncte und fallen schliesslich zusammen, so bleibt alles ungeändert. Es zeigt sich zugleich in diesem einfachen Falle, dass die Anzahl der Umläufe, welche eine Curve um ein Gebiet machen muss, um sich zu schliessen, um 1 grösser ist, als die Anzahl der in diesem Gebiete enthaltenen einfachen Verzweigungspuncte, da der Windungspunct 4ter Ordnung 4 einfachen Verzweigungspuncten aequivalent ist. Es soll später gezeigt werden, dass diese Beziehung allgemein gilt.

## § 14.

Es scheint hier der geeignete Ort zu sein, einer Vorstellungsart Erwähnung zu thun, welche auch im Unendlichen entweder eine bestimmte Fortschreitung oder eine Verzweigung möglich macht. Nach *Riemann* kann man sich nämlich die Ebene, deren Puncte die Werthe einer veränderlichen Grösse darstellen, im Unendlichen geschlossen, als eine Kugel mit unendlich grossem Radius denken. Der unendlich entfernte Punct kann dann als ein ganz bestimmter in dieser geschlossenen Fläche aufgefasst werden. Besteht nun eine Fläche aus $n$ Blättern, so ist jedes als im Unendlichen geschlossen, als eine Kugelfläche mit unendlich grossem Radius zu denken, und in jeder dieser Kugelflächen nimmt der unendlich entfernte Punct eine bestimmte Stelle ein. Dann ist es auch denkbar, dass mehrere Blätter in dem Punkte $\infty$ zusammenhängen, und dass dieser ein Verzweigungspunct ist. Um bei einer durch einen Ausdruck gegebenen Function $w = f(z)$ zu entscheiden, ob $z = \infty$ ein Verzweigungspunct ist, braucht man nur $z = \frac{1}{u}$ zu setzen. Geht dann $f(z)$ in $\varphi(u)$ über, so liefert jeder Verzweigungspunct $z = a$ von $f(z)$ für $\varphi(u)$ einen Verzweigungspunct $u = \frac{1}{a}$, und umgekehrt jeder Verzweigungspunct $u = b$ von $\varphi(u)$ einen solchen $z = \frac{1}{b}$ von $f(z)$; daher ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunct von $f(z)$ oder nicht, je nachdem $u = 0$ ein Verzweigungspunct von $\varphi(u)$ ist oder nicht. Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche, bei welcher $z = \infty$ ein bestimmter Punct ist, kann man nicht mehr einen unbestimmt ins Unendliche gehenden Verzweigungsschnitt ziehen, sondern, wenn ein solcher ins Unendliche geht, so endet er in dem bestimmten Puncte $z = \infty$. Zur Erläuterung dieser Vorstellungsart geschlossener Flächen und einiger dabei zur Sprache kommender Nebenumstände mögen ein Paar Beispiele vorgeführt werden, wobei wir uns in Betreff der Bezeichnungen der Kürze wegen auf die in § 10 und 11 angewendeten beziehen.

1) Die schon betrachtete Function

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c}$$

geht durch die Substitution $z = \frac{1}{u}$ in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{\frac{1-au}{1-bu}} + \frac{\sqrt{1-cu}}{\sqrt{u}}$$

über, daher ist $u = 0$ und also auch $z = \infty$ ein Verzweigungspunct, und zwar hängen, wie man sieht, hier dieselben Blätter zusammen, wie im Puncte $c$. Man wird daher einen Verzweigungsschnitt von $a$ nach $b'$, und einen zweiten von $c$ nach $\infty$ ziehen.

2) Die Function

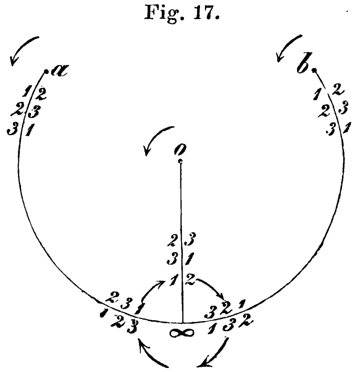
$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z-a)(z-b)}{z^2}}$$

geht in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{(1-au)(1-bu)}$$

über; daher ist $z = \infty$ kein Verzweigungspunct, sondern nur die Puncte 0, $a$ und $b$. Man kann nun hier einen Verzweigungsschnitt von $a$ durch $\infty$ nach $b$, und einen zweiten von 0 nach $\infty$ legen (Fig. 17). Dann gehen aber über den Theil $a\,\infty$ hinüber die Blätter in anderer Weise in einander über, wie über den Theil $b\,\infty$, nämlich so wie die Zahlen in der Figur es andeuten.

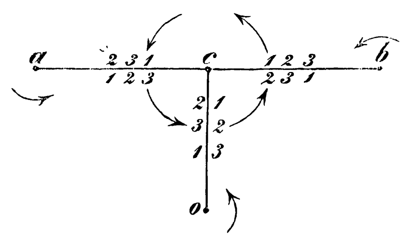
Fig. 17.




Um den Verzweigungspunct 0 in der Richtung der wachsenden Winkel herum geht $f(z)$ in $\frac{f(z)}{\alpha^2} = \alpha\, f(z)$, also 1 in 2 und daher auch 2 in 3, und 3 in 1 über. Umkreist man nun den Punct $\infty$, so geht beim Ueberschreiten von $0\,\infty$, 1 in 2, dann beim Ueberschreiten von $b\,\infty$, 2 in 3, und endlich beim Ueberschreiten von $a\,\infty$, 3 in 1 über. Hier kommt man also schon nach dem ersten Umlauf in das erste Blatt zurück, die Function ändert ihren Werth nicht, und der Punct $\infty$ ist daher wirklich kein Verzweigungspunct.

Man hätte hier auch die Puncte $a$ und $b$ durch einen in der Endlichkeit verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinden können (Fig. 18). Dann muss es aber auf dieser Linie einen Punct $c$ geben, wo die Scheidung statt findet, sodass über $ac$ hinüber die Blätter in anderer Weise zusammenhängen, als über $bc$. Legt man dann den zweiten Verzweigungsschnitt von 0 nach $c$, so bleibt auch beim Umkreisen des Punctes $c$ die Function ungeändert, sodass $c$ kein Verzweigungspunct ist. Man kann hier die Sache in ähnlicher Weise, wie es im 2ten Beispiele des § 10 schon erläutert wurde, so ansehn, als wenn der Punct $c$ durch das Zusammenfallen dreier Verzweigungspuncte $d, e, f$ entstanden wäre, welche sich gegenseitig aufgehoben haben, sodass die gegebene Function aus der folgenden

Fig. 18.




$$\sqrt[3]{\frac{z-a}{z-d}\cdot\frac{z-b}{z-e}\cdot\frac{(z-f)^2}{z^2}}$$

dadurch entstanden gedacht wird, dass $d = e = f = c$ geworden ist. Man kann hier die Verzweigungsschnitte auch noch auf eine dritte Art wählen, indem man einen solchen von $a$ nach 0, und einen zweiten von 0 nach $b$ zieht.

3) Die Function

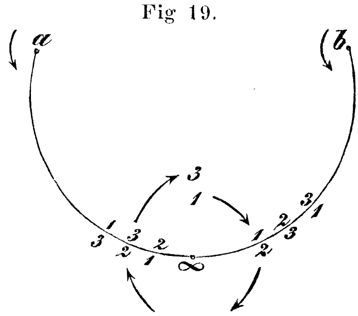
$$f(z) = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$$

geht in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{\frac{(1-au)(1-bu)}{u^2}}$$

über, daher ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunct. Man kann hier einen Verzweigungsschnitt von $a$ nach $\infty$ und einen zweiten von $b$ nach $\infty$ legen (Fig. 19), und die Blätter so zusammenhängen lassen, wie die Figur andeutet. Ein Umkreisen des Puncts $\infty$ führt dann zuerst über $b\,\infty$ von 1 nach 2, und dann über $a\,\infty$ von 2 nach 3, also bei einem Umlaufe von 1 nach 3, sodass die Function sich ändert, und $z = \infty$ wirklich als Verzweigungspunct auftritt. Man bemerke dabei, dass wenn die Bewegungsrichtung auch hier die der wachsenden Winkel sein soll, die Umkreisung

Fig 19.



von $\infty$ aus gesehn in entgegengesetzter Richtung stattfinden muss. Denn setzt man

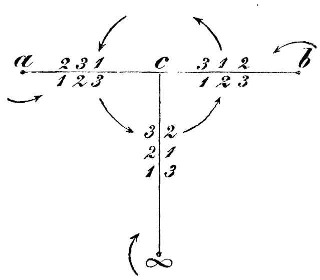
$$u = r\,(cos\ \varphi - i\ sin\ \varphi),$$

so folgt

$$z = \frac{1}{r}\,(cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi).$$

Beschreibt also $u$ einen Kreis um den Nullpunct mit kleinem Radius und in der Richtung der abnehmenden Winkel, so beschreibt $z$ einen Kreis mit grossem Radius und in der Richtung der wachsenden Winkel. In diesem Falle geht $\varphi\,(u)$ bei einem Umlauf in $\alpha^2\,\varphi\,(u)$, also auch $f\,(z)$ in $\alpha^2\,f\,(z)$ über, d. h. man kommt aus 1 nach 3, wie es die Figur zeigt.

Fig. 20.



Man kann auch hier die Puncte $a$ und $b$ durch einen im Endlichen verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinden, darauf einen Scheidungspunct $c$ annehmen und von diesem einen zweiten Verzweigungsschnitt nach $\infty$ ziehen (Fig. 20). Auch dann ändert sich die Function beim Umkreisen des Punctes $c$ nicht.

## § 15.

Bedeutet $w$ eine mehrdeutige Function von $z$, $W$ aber eine rationale Function von $w$ und $z$ (oder auch von $w$ allein), so ist die $z$-Fläche für die Functiou $W$ ebenso beschaffen, wie für die Function $w$. Denn bezeichnet man mit $w_\varkappa$ und $w_\lambda$ irgend zwei demselben $z$ zugehörige Werthe von $w$, mit $W_\varkappa$ und $W_\lambda$ die entsprechenden Werthe von $W$, so muss $W_\varkappa$ in $W_\lambda$ übergehen, so oft $w_\varkappa$ in $w_\lambda$ übergeht, weil jedem Werthenpaare von $z$ und $w$ nur ein einziger Werth von $W$ entspricht. Die Uebergänge der $W$-Werthe hängen daher in derselben Weise von den von $z$ durchlaufenen Umkreisungen ab, wie die $w$-Werthe. Daher hat die $z$-Fläche für $W$ dieselben Verzweigungspuncte und Verzweigungsschnitte wie für $w$, und in jedem Verzweigungspuncte hängen auch die nämlichen Blätter zusammen. Aus diesem Grunde nennt *Riemann* alle rationalen Functionen von $w$ und $z$ ein System gleichverzweigter Functionen.

---

# Vierter Abschnitt.

## Integrale mit complexen Variabelen.

---

### § 16.

Man kann das bestimmte Integral von einer Function einer complexen Veränderlichen genau in derselben Weise definiren, wie dies bei reellen Variablen geschieht.

Es seien $z_0$ und $z$ irgend zwei complexe Werthe der Variablen $z$. Man denke sich die Puncte, welche diese beiden Werthe repräsentiren, durch eine beliebige ununterbrochene Linie verbunden und nehme auf derselben eine Reihe eingeschalteter Puncte an, welche den Werthen $z_1, z_2, \ldots z_n$ der Variablen entsprechen. Ist ferner $f(z)$ eine Function von $z$, und bildet man die Summe der Producte

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots + f(z_n)(z - z_n),$$

so ist der Grenzwerth derselben, wenn die Anzahl der zwischen $z_0$ und $z$ längs der beliebigen Linie eingeschalteten Werthe ins Unendliche zunimmt, die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc. also ins Unendliche abnehmen, das bestimmte Integral zwischen den Grenzen $z_0$ und $z$, also

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim \left[f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + f(z_n)(z - z_n)\right].$$

Man sieht, dass diese Definition von der gewöhnlich bei reellen Variablen gegebenen in nichts Wesentlichem verschieden ist. Ein Unterschied besteht allerdings darin, dass, wie es die Natur einer complexen Veränderlichen erfordert, der Weg, den dieselbe zwischen der unteren und der oberen Grenze durchläuft, d. h. die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, nicht vorgeschrieben ist, sondern durch jede ununterbrochene Linie gebildet werden kann.