Einleitung.

Die Verfolgung der allmäligen Entwickelung der Lehre von den imaginären Grössen bietet besonders deswegen ein grosses Interesse dar, weil man hier noch deutlich erkennen kann, mit welchen Schwierigkeiten die Einführung neuer, vorher nicht bekannter, oder wenigstens nicht hinreichend geläufiger Begriffe verbunden ist. Die Zeiten, in welchen die negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen in die Mathematik eingeführt wurden, liegen uns so ferne, dass wir uns von den Schwierigkeiten, welche auch die Einführung dieser Begriffe früher gehabt haben mag, keine rechte Vorstellung mehr machen können. Ausserdem ist die Erkenntniss des Wesens der imaginären Grössen auch wieder rückwärts für die Erkenntniss der negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen lehrreich geworden, da ein gemeinsames Band alle diese Grössen umschlingt.

Bei den älteren Mathematikern herrschte fast durchgängig die Ansicht, dass die imaginären Grössen unmöglich seien. Man begegnet beim Durchblättern älterer mathematischer Schriften immer wieder dem Ausspruche, dass das Auftreten imaginärer Grössen keine andre Bedeutung habe, als die, die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe darzuthun, dass diese Grössen keinen Sinn hätten, dass man sich ihrer aber bisweilen mit Nutzen bedienen könne, obgleich die Form der Resultate dann nur eine symbolische sei. In dieser Beziehung ist es interessant, den Entwickelungsgang *Cauchy's* zu beobachten. Dieser grosse Mathematiker ist neben unserem „*Princeps mathematicorum*" *Gauss*, welcher zuerst und wohl schon sehr frühe die hohe Bedeutung der imaginären Grössen für alle Theile der Mathematik erkannte, als Schöpfer der Lehre von den Functionen imaginärer Variabeln zu betrachten. Gleichwohl schloss er sich sowohl in seiner „algebraischen Analysis“, als auch in den „Exercices“ vom Jahre 1844 noch ganz der Ansicht der älteren Mathematiker an. Es heisst dort an einer Stelle*): „Toute équation imaginaire n'est autre chose que la réprésentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. L'emploi des expressions imaginaires, en permettant de remplacer deux équations par une seule, offre souvent le moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats fort compliqués. Tel est même le motif principal pour lequel on doit continuer à se servir de ces expressions, qui prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, ne signifient rien et n'ont pas de sens. Le signe $\sqrt{-1}$ n'est en quelque sorte qu'un outil, un instrument de calcul, qui peut être employé avec succès dans un grand nombre de cas pour rendre beaucoup plus simples non-seulement les formules analytiques, mais encore les méthodes à l'aide desquelles on parvient à les établir.“

Die imaginären Grössen wurden von den italienischen Algebraikern des 16ten Jahrhunderts in die Mathematik eingeführt, und sind wahrscheinlich zuerst von *Cardano***) erwähnt worden, der sie aber verwirft, weil sie weder positiv noch negativ, und daher von keinem Nutzen seien. *Albert Girard****) nennt sie *quantités enveloppées.* Der Name unmögliche, eingebildete oder imaginäre Grössen findet sich zuerst in der im Jahre 1673 gedruckten Algebra von *Wallis.*

Bei diesen älteren Mathematikern und noch viel später blieb nun, wie bemerkt, die Ansicht herrschend, dass die imaginären Grössen in der That unmöglich seien, dass ihnen wirklich keine Existenz zuzuschreiben sei, und dass ihr Auftreten bei der versuchten Lösung einer Aufgabe lediglich die Unmöglichkeit der Lösung manifestire. Sie wurden fast nur in einer der mathematischen Disciplinen unbeschränkt mit berücksichtigt, nämlich in der Lehre von

*) *Cauchy*, Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome III. p. 361.

**) Artis magnae sive de regulis Algebrae liber unus. 1545.

***) Invention nouvelle en Algèbre. 1629.

den algebraischen Gleichungen; hier war es viel zu wichtig, zugleich auf alle Wurzeln Rücksicht zu nehmen, als dass das Imaginärwerden der letzteren den Untersuchungen hätte Stillstand gebieten können. Einzelne Männer, die, wie es scheint, sich mit einer gewissen Vorliebe den imaginären Grössen zuwandten, wie *de Moivre, Johann Bernoulli,* die beiden *Fagnano, d'Alembert, Euler* fanden allmälig die diesen Grössen innewohnenden ausgezeichneten Eigenschaften auf und bildeten ihre Lehre immer mehr und mehr aus. Doch wurden diese Untersuchungen im Ganzen mehr für wissenschaftliche Spielereien, für blosse Curiosa angesehen, und man legte ihnen nur in so fern Werth bei, als sie nützliche Hülfsmittel für andere Untersuchungen darboten. Es hat aber auch nicht an solchen gefehlt, welche die imaginären Grössen wegen ihrer vermeintlichen Unmöglichkeit nirgend angewendet wissen wollten.*)

Die Ansicht von der Unmöglichkeit der imaginären Grössen ist eigentlich von einem Verkennen des Wesens der negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen ausgegangen. Da nämlich die Anwendung dieser mathematischen Begriffe auf Geometrie, Mechanik, Physik und zum Theil selbst im bürgerlichen Leben sich so leicht und so von selbst darbot, ja ohne Zweifel in vielen Fällen die Veranlassung zur Untersuchung dieser Grössen wurde, so kam es, dass man in irgend einer dieser Anwendungen das wahre Wesen dieser Begriffe und ihre wahre Stellung im Gebiete der Mathematik zu finden glaubte. Bei den imaginären Grössen lag nun eine solche Anwendung nicht so nahe, und wegen der mangelnden Kenntniss derselben glaubte man die imaginären Grössen in das Reich der Unmöglichkeit verweisen, ihre Existenz bezweifeln zu müssen. Dabei liess man aber ausser Acht, dass die reine Mathematik, die Wissenschaft der Addition, so wichtig auch ihre Anwendungen sind, doch an und für sich mit den letzteren nichts zu thun hat, dass ihre durch eine vollständige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe in der Defini-

*) Aussi a-t-on vu quelques géomètres d'un rang distingué ne point goûter ce genre de calcul, non qu'ils doutassent de la justesse de son résultat, mais parce qu'il paraissait y avoir une sorte d'inconvenance à employer des expressions de ce genre qui n'ont jamais servi qu'à annoncer une absurdité dans l'énoncé d'un problème. *Montucla,* Histoire des mathématiques. Tome III. p. 283.

tion selber ihre Existenz begründen, und dass ihre Sätze wahr sind, gleich viel, ob man von ihnen eine Anwendung machen kann oder nicht. Ob und wann dieser oder jener Satz eine Anwendung finden wird, lässt sich oft nicht vorherbestimmen, und gerade die heutige Zeit ist ja reich genug an Beispielen, dass sich die wichtigsten, selbst tief in das Leben der Völker eingreifenden Anwendungen an Sätze geknüpft haben, dei deren Entdeckung man sicherlich keine Ahnung von diesen Folgen hatte. So stark war aber allmälig der Glaube an die Unmöglichkeit der imaginären Grössen geworden, dass als seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Idee auftauchte, die imaginären Grössen geometrisch darzustellen*), man nun umgekehrt aus der vermeintlichen Unmöglichkeit derselben auch die Unmöglichkeit, sie geometrisch darzustellen, folgerte.**)

Um die Stellung, welche die imaginären Grössen im Gebiete der reinen Mathematik einnehmen, zu erkennen, und um einzusehen, dass sie mit den negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen durchaus auf eine Linie zu stellen sind, müssen wir etwas zurückgreifen.

Die ersten mathematischen Begriffe, die sich unmittelbar aus der Grundoperation der Mathematik, der Addition, ergeben, sind diejenigen, die man nach dem heutigen Sprachgebrauche positive ganze Zahlen nennt. Geht man von der Addition zu ihrer Umkehrung, der Subtraction, über, so stellt sich alsbald die Nothwen-

---

*) Der erste Versuch, die imaginären Grössen geometrisch darzustellen, wurde von *Kühn* im Jahre 1750 gemacht. (Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Novi commentarii Acad. Petrop. III ad 1750 et 1751). Obgleich *Montucla* (Histoire des Mathématiques. Tome III. p. 30) meint, es sei nicht der Mühe werth, diese Abhandlung zu lesen, so ist neben manchem Unrichtigen doch die Idee darin schon ausgesprochen, dass man unter $a\sqrt{-1}$ eine Gerade zu verstehen habe, welche auf der Geraden a senkrecht steht und mit ihr gleiche Länge hat. Uebrigens scheint *Kühn* ein sonderbarer Kauz gewesen zu sein. Wenigstens theilt *Montucla* (a. a. O.) einige höchst eigenthümliche Ansichten desselben mit. Wenn aber Jemand in der damaligen Zeit auf die Idee kommen konnte, die für unmöglich gehaltenen imaginären Grössen geometrisch darstellen zu wollen, so wäre es nicht zu verwundern, wenn er ein Mann war, der am Sonderbaren Geschmack fand.

**) *Foncenex*, Reflexions sur les quantités imaginaires. Miscellanea Taurinensia. Tom. I. p. 122.

digkeit ein, neue mathematische Begriffe einzuführen. Sobald nämlich die Aufgabe entsteht, eine grössere Zahl von einer kleineren zu subtrahiren, so kann dieselbe nicht mehr durch eine positive ganze Zahl gelöst werden. Auf einem Standpunkte, auf dem man nur positive ganze Zahlen kennt, hat man daher die Alternative, entweder eine solche Aufgabe als unmöglich, als unlösbar zu bezeichnen, und damit dem Fortschritt der Wissenschaft nach dieser Richtung hin eine Schranke zu setzen, oder aber die Möglichkeit der Auflösung jener Aufgaben dadurch herbeizuführen, dass man solche mathematischen Begriffe, welche die Aufgabe zu lösen vermögen, als neue Begriffe einführt. Auf diese Weise entstehen durch die Subtraction die negativen Grössen als Differenzen zunächst zweier positiver ganzer Zahlen, von denen der Subtrahendus grösser ist, als der Minuendus. Ihre Existenz und Bedeutung für die reine Mathematik ist dann nicht etwa in einem Gegensatze zwischen Rechts und Links, Vorwärts und Rückwärts, Bejahung und Verneinung, Vermögen und Schulden oder in irgend einer ihrer mannigfaltigen Anwendungen begründet, sondern lediglich in der Definition, durch welche sie eingeführt werden.

Wenngleich nun aber in rein begrifflicher Beziehung in den negativen Grössen nichts Unmögliches liegt, so kann es sich doch ereignen, dass durch das Auftreten von negativen Grössen die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe angezeigt wird, nämlich dann, wenn die Natur der Aufgabe zu ihrer Lösung nothwendig positive Grössen erfordert. Ist z. B. folgende Aufgabe gestellt: Man soll 6 Kugeln so in zwei Urnen vertheilen, dass sich in der einen 8 mehr befinden, als in der andern, so ist darin folgende rein mathematische Aufgabe enthalten: zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 6 und deren Differenz gleich 8 sei. Wird nun nur verlangt, dass diese Zahlen mathematische Begriffe seien, ohne dieselben auf eine besondere Art von mathematischen Begriffen zu beschränken, und sind ferner vorher die negativen Grössen durch ihre Definition begrifflich festgestellt worden, so liegt die Lösbarkeit der rein mathematischen Aufgabe auf der Hand; wie Jeder sieht, sind die positive Zahl 7 und die negative Zahl -1 diejenigen Grössen, welche der Aufgabe genügen. Nichts desto weniger ist die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen unmöglich, denn in derselben wird verlangt, dass jede der gesuchten Zahlen eine Anzahl bedeuten soll, also nothwendig positiv sein muss. Läge nun die Unmöglichkeit nicht so offen da, wie bei diesem einfachen Beispiele, so würde das Auftreten der negativen Zahl — 1 die Unlösbarkeit der Aufgabe zu Tage bringen.

Ganz dieselben Umstände treten nun bei jeder andern indirecten Operation auf's Neue ein. Die nächste indirecte Operation ist die Division. Stellt man die Aufgabe, eine ganze Zahl in eine andere zu dividiren, welche nicht ein Vielfaches der ersteren ist, so entsteht die Unmöglichkeit, diese Aufgabe durch positive oder negative ganze Zahlen zu lösen. Der Fortschritt der Wissenschaft erfordert also wieder, die Möglichkeit der Lösung dadurch herbeizuführen, dass man die dazu nöthigen Grössen einführt und begrifflich feststellt. Diese neuen Begriffe sind hier die rationalen Brüche. Aber auch hier kann der Fall eintreten, dass das Auftreten derselben die Unmöglichkeit der Lösung einer Aufgabe kundgiebt, nämlich wiederum dann, wenn die Natur der Aufgabe die Lösung durch die neuen Begriffe nicht gestattet. Als ein Beispiel diene folgende Aufgabe: Durch ein in einer Maschine oder einem Uhrwerke befindliches Rad, welches 100 Zähne besitzt und in der Minute einmal umläuft, soll unmittelbar ein anderes Rad so in Bewegung gesetzt werden, dass dieses 12 Mal in der Minute umläuft; man fragt, wie viele Zähne man dem letzteren Rade geben muss. Die hier zu Grunde liegende rein mathematische Aufgabe besteht einfach darin, 100 durch 12 zu dividiren, und sind die Brüche einmal begrifflich festgestellt worden, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit, sie liefert $8^1/_3$. Das Auftreten dieses Bruches aber zeigt zugleich die Unmöglichkeit an, die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen, da die zu bestimmende Anzahl der Zähne des zweiten Rades eine ganze Zahl sein muss.

Die dritte indirecte Operation ist die Wurzelausziehung. Setzt man

$$\sqrt[n]{a} = x,$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeute, so ist die Aufgabe, eine dieser Gleichung entsprechende Grösse x zu finden, durch ganze Zahlen oder rationale Brüche nicht mehr lösbar, sobald a nicht die $n$te Potenz einer solchen Grösse ist. In diesem Falle tritt also wieder die Nothwendigkeit ein, die Aufgabe durch Einführung neuer Begriffe lösbar zu machen. Ist nun entweder a positiv, oder wenn a negativ ist, n eine ungerade Zahl, so sind die neu einzuführenden Begriffe die irrationalen Grössen; ist aber a negativ und zugleich n eine gerade Zahl, so entstehen als neue Begriffe die imaginären Grössen. Es liegt nun ebenso wenig die Unmöglichkeit vor, diese letzteren begrifflich festzustellen, wie die irrationalen Grössen oder wie früher die rationalen Brüche und die negativen Grössen, denn bei keiner der hier aufzustellenden Definitionen stösst man auf einen inneren Widerspruch. Wenn ein solcher einträte, wenn Eigenschaften mit einander in Verbindung gesetzt würden, von denen bewiesen werden kann, dass sie nicht mit einander bestehen können, dann allerdings hätte man es wirklich mit etwas Unmöglichem zu thun. *Gauss**) führt als ein Beispiel einer solchen Unmöglichkeit ein ebenes rechtwinkliges gleichseitiges Dreieck an. In der That wird bewiesen, dass ein ebenes gleichseitiges Dreieck nicht zugleich rechtwinklig sein kann. Hier läge also wirklich etwas Unmögliches vor.

Wenn nun schon das Auftreten von negativen Grössen oder von Brüchen bisweilen die Unmöglichkeit einer Aufgabe kund giebt, so ist leicht begreiflich, dass diese auch durch imaginäre Grössen angezeigt werden kann, wie in folgendem Beispiel: Eine gegebene Gerade von der Länge 2 soll in zwei solche Theile getheilt werden, dass das aus ihnen gebildete Rechteck den Inhalt 4 habe. Der rein mathematische Inhalt dieser Aufgabe ist, zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 2, und deren Product gleich 4 ist. Wird nun nur verlangt, dass diese Zahlen mathematische Grössen seien, ohne näher anzugeben, welcher Art sie sein sollen, so hat die Auflösung, nachdem die imaginären Grössen einmal begrifflich festgestellt worden sind, keine Schwierigkeit. Sie führt auf die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2\,x + 4 = 0,$$

deren Wurzeln die imaginären Zahlen

$$1 + \sqrt{-3} \quad \text{und} \quad 1 - \sqrt{-3}$$

sind. Nimmt man aber auf die ursprüngliche Aufgabe Rücksicht, wonach die gesuchten Grössen Theile einer geraden Linie bedeuten sollen und daher reelle Grössen sein müssen, dann ist die

*) Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. (Inaug. Diss.) pag. 4. Note.

Aufgabe zu lösen unmöglich, weil das grösste aus zweien Theilen der Linie 2 gebildete Rechteck den Inhalt 1 hat, und daher keines den Inhalt 4 haben kann; und diese Unmöglichkeit wird hier durch das Auftreten imaginärer Grössen angezeigt. *Montucla* *) hat dies nämliche Beispiel als Beleg für die Ansicht gewählt, dass in der Unmöglichkeit einer Aufgabe überhaupt die Bedeutung und Entstehung der imaginären Grössen zu suchen sei, indem sie dann aufträten, wenn man eine Aufgabe stelle, welche eine unmögliche oder absurde Forderung enthalte. Wir haben gesehen, dass ganz dasselbe auch von den negativen Grössen und den Brüchen behauptet werden könnte, und die Worte: „Ainsi toutes les fois que la résolution d'un problème conduit à de semblables expressions et que parmi les différentes valeurs de l'inconnue il n'y en a que de telles, le problème, ou pour mieux dire, ce qu'on demande est impossible.“ und weiterhin: „Le problème, qui conduirait à une pareille équation, serait impossible ou ne présenterait qu'une demande absurde“ lassen sich fast wörtlich auf die beiden früher angeführten Beispiele anwenden, in denen die Unmöglichkeit der Aufgabe durch eine negative Zahl und durch einen Bruch angezeigt wurde.

Aus den vorigen Erörterungen erhellt, dass die imaginären, die irrationalen, die rational gebrochenen und die negativen Grössen eine gemeinsame Entstehungsart haben, nämlich durch die indirecten Operationen, bei welchen ihre Einführung durch den Fortschritt der Wissenschaft nothwendig gemacht wird. Sie alle finden ihre Existenz in ihrer Definition begründet, welche bei keiner etwas Unmögliches in sich schliesst; bei allen aber kann es Fälle geben, wo ihr Auftreten wegen der besonderen Natur der Aufgabe die Unmöglichkeit diese zu lösen kund giebt.

Ehe wir nun zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, sei noch eine Bemerkung über das Rechnen mit den imaginären Grössen erlaubt. Auch hier können wir wieder an die ihnen verwandten Grössen anknüpfen. Jedesmal, wenn in die Mathematik ein neuer Begriff eingeführt wird, ist es an und für sich in vieler Beziehung eine Sache der Willkür, in welcher Weise man die Operationen, denen man die früheren Begriffe unterwirft, auf den neuen Begriff übertragen will. Nachdem z. B.

---

*) Histoire des mathématiques. Tome III. pag. 27.

die Definition der Potenzen mit ganzen positiven Exponenten aus der wiederholten Multiplication einer Grösse mit sich selber hergeleitet ist, entsteht die Frage, was man unter einer Potenz mit einem negativen Exponenten zu verstehen habe. An und für sich ist dieses ganz willkürlich, indem es nichts giebt, was uns zwingt, etwas Bestimmtes darunter zu verstehen. Allein, wenn man hier und in allen ähnlichen Fällen ganz willkürlich verfahren wäre und sich nicht an eine bestimmte Norm gebunden hätte, so würde das mathematische Gebäude gewiss eine seltsame, die Uebersicht gewaltig erschwerende Gestalt erhalten haben. Die äussere Consequenz und die harmonische Uebereinstimmung in allen ihren Theilen verdankt die Mathematik der Befolgung des Grundsatzes, dass man jedesmal, wenn man einen neu eingeführten Begriff den früher bekannt gewordenen Operationen unterwirft, die von diesen Operationen geltenden Hauptsätze auch dann noch als fortbestehend annimmt, wenn man jene auf die neuen Begriffe überträgt. Diese an und für sich willkürliche Annahme ist so lange zu machen erlaubt, als daraus nicht Widersprüche entstehen. Wenn nun dieser Grundsatz befolgt wird, dann sind die Definitionen, von denen oben die Rede war, nicht mehr willkürlich, sondern ergeben sich als nothwendige Folge jenes Grundsatzes. Bei den Potenzen wird z. B. bewiesen, dass, wenn m und n zwei positive ganze Zahlen sind, und $m > n$ angenommen wird,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ist. Nun wird willkürlich festgesetzt, dass dieser Satz auch dann noch richtig bleibe, wenn $m < n$, also $m - n = -p$ eine negative Zahl ist; und dann folgt, dass man

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

zu setzen habe, wodurch die Bedeutung einer Potenz mit einem negativen Exponenten nun bestimmt festgestellt ist.

Dass der obige Grundsatz, trotzdem dass seine Annahme durchaus nicht nothwendig, sondern willkürlich ist, für die Mathematik die grösste Wichtigkeit besitzt, bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung. Man braucht sich nur zu vergegenwärtigen, wie das System der Mathematik beschaffen sein würde, wenn jener Grundsatz nicht befolgt wäre, um sofort zu erkennen, welche

Unterscheidungen man bei jedem Schritte zu machen gezwungen wäre, und wie schwerfällig alsdann der Gang der Beweise sein würde. Die durch diesen Grundsatz herbeigeführte in weiter Ausdehnung stattfindende Allgemeingültigkeit der mathematischen Sätze lässt auch eine andre Erscheinung in der Geschichte der Mathematik begreifen, nämlich die eine Zeit lang so weit auseinandergehenden Ansichten über die Bedeutung der divergenten Reihen. Da man gewohnt war, fast alle mathematischen Sätze als allgemein gültig zu betrachten, so bedurfte es längerer Zeit, bis die Ueberzeugung durchdrang, dass bei den Reihenentwickelungen die Resultate nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen Geltung haben, und dass überhaupt bei der Einführung des Unendlichen in die Mathematik jener Grundsatz nicht so unbedingt zur Anwendung gebracht werden darf, wie sonst.

Bei der Uebertragung der mathematischen Operationen auf die imaginären Grössen findet nun aber der obige Grundsatz volle Anwendung, und es ist vollständig nachgewiesen, dass dabei keinerlei Widersprüche eintreten. Es liegt nicht in der Absicht, diesen Nachweis hier zu wiederholen; erwähnt mag aber werden, dass jener Grundsatz, obwohl sonst stets befolgt, doch gerade bei den imaginären Grössen nicht von jeher und allgemein anerkannt wurde. Noch zu *Euler's* Zeit waren die Mathematiker gar nicht darüber einig, was man unter dem Product zweier Quadratwurzeln aus negativen Grössen zu verstehen habe. *Euler* selbst setzte obigem Grundsatze gemäss, und wie jetzt allgemein angenommen wird, wenn a und b zwei positive Grössen bedeuten,

$$\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b} = \sqrt{ab},$$

also das Product dieser beiden imaginären Grössen einer reellen Grösse gleich. Dies wurde aber nicht allgemein anerkannt, vielmehr glaubte *Emerson*, ein englischer Mathematiker, dass man annehmen müsse, es sei

$$\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b} = \sqrt{-ab},$$

weil es absurd sei, anzunehmen, dass das Product zweier unmöglicher Grössen nicht auch unmöglich sei; und *Hutton* sagt in seinem mathematischen Wörterbuche*), dass zu seiner Zeit die Ansichten der Mathematiker hierüber ziemlich gleich getheilt seien.

*) *Hutton*, Mathematical dictionary. 1796.

* * *

Eine der bemerkenswerthen Eigenschaften, welche die imaginären Grössen besitzen, ist die, dass man alle auf eine einzige, nämlich auf die Grösse $\sqrt{-1}$ zurückführen kann, für welche *Gauss* den jetzt allgemein gebräuchlichen Buchstaben i eingeführt hat.*) Mittelst derselben lässt sich ferner jede imaginäre Grösse z auf die Form

$$z = x + iy$$

bringen, in welcher x und y reelle Grössen bedeuten. Eine Grösse von dieser Form hat *Gauss* eine complexe Grösse genannt,**) indem er diesen Namen der allgemeinen Bedeutung, wonach derselbe eine irgend wie aus ungleichartigen Theilen zusammengesetzte Grösse bezeichnete, und in dieser Bedeutung früher hie und da angewendet wurde, entkleidete und ihn zur Bezeichnung der besonderen ungleichartigen Zusammensetzung verwendete, bei welcher eine Grösse aus einem reellen und einem imaginären Theile, die durch Addition verbunden sind, besteht.

Die complexen Grössen umfassen zugleich die reellen mit, nämlich in dem Falle, dass die reelle Grösse y den Werth Null hat. Wenn dagegen die andre reelle Grösse x gleich Null ist, also z die Form

$$z = iy$$

hat, pflegt man die complexe Grösse rein imaginär zu nennen.

Wenn in der Grösse $z = x + iy$ die beiden reellen Grössen x und y, oder mindestens eine von ihnen, veränderlich ist, so nennt man z eine complexe veränderliche Grösse. Damit eine solche den Werth Null erhalte, ist erforderlich, dass beide reelle Grössen x und y zugleich verschwinden, weil es nicht möglich ist, dass sich die beiden ungleichartigen Grössen, die reelle, x, und die imaginäre, iy, gegenseitig aufheben. Dagegen genügt es zum Unendlichwerden der complexen Grösse z, wenn nur einer ihrer beiden reellen Bestandtheile, x oder y, unendlich wird. Ebenso tritt in z eine andere Unterbrechung der Stetigkeit ein, sobald nur eine der reellen Grössen x oder y eine solche erleidet. So lange aber x und y beide sich stetig ändern, nennt man auch z eine stetig veränderliche complexe Grösse.

---

*) Die erste Stelle, in welcher diese Bezeichnung angewendet ist, findet sich: Disquisitiones arithmeticae. Sect. VII. Art. 337.

**) Theoria residuorum biquadraticorum. Comment. societatis Gottingensis. Vol. VII (ad 1828—32) pag. 96.

Schon die Betrachtung der reellen Veränderlichen und ihrer Functionen wird durch die geometrische Darstellung derselben wesentlich erleichtert und anschaulich gemacht. Dies ist nun in erhöhtem Maasse bei den complexen Veränderlichen der Fall; daher wollen wir uns zuerst mit der Art und Weise beschäftigen, wie man imaginäre Grössen bildlich darstellen kann.

Erster Abschnitt.

Geometrische Darstellung der imaginären Grössen.

---

§ 1.

Um sich von einer reellen veränderlichen Grösse ein geometrisches Bild zu machen, denkt man sich bekanntlich einen Punct, der sich auf einer geraden Linie bewegt. Auf derselben, die wir die x-Axe oder auch die Haupt-Axe nennen wollen, nimmt man einen festen Punct o (den Nullpunct) an und stellt den Werth einer veränderlichen Grösse x durch den Abstand $\overline{op}$ eines auf der x-Axe liegenden Punctes p vom Nullpuncte o dar. Dabei nimmt man zugleich auf die Richtung, in welcher die Strecke $\overline{op}$ von o aus gerechnet liegt, Rücksicht, indem ein positiver Werth von x durch eine Strecke $\overline{op}$ nach der einen Seite (etwa nach rechts, wenn man sich die x-Axe horizontal liegend denkt), ein negativer Werth von x dagegen durch eine Strecke $\overline{op'}$ nach der andern Seite (nach links) repräsentirt wird. Wenn nun x seinen Werth ändert, so ändert sich auch die Strecke $\overline{op}$, indem der Punct p seine Lage auf der x-Axe ändert. Man kann daher entweder sagen, dass durch jeden Werth von x die Lage eines Punctes p auf der x-Axe gegeben ist, oder dass durch ihn die Länge einer begrenzten Geraden in einer von zwei einander direct entgegengesetzten Richtungen bestimmt wird.

Eine complexe veränderliche Grösse $z = x + iy$ hängt nun von zwei gänzlich von einander unabhängigen reellen Veränderlichen x und y ab. Zur geometrischen Verbildlichung einer complexen Grösse wird daher ein Gebiet einer Dimension, eine ge-