POZNÁMKY

Překlad je pořízen z otisku původního vydání, které připravil do tisku Bolzanův žák dr. Fr. Příhonský a které vyšlo pod názvem „Dr. Bernard Bolzanos Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlass des Verfassers von Dr Fr. Přihonsky" v Lipsku roku 1851 v nakladatelství C. H. Reclam sen. Otisk vyšel jako 99. číslo sbírky „Philosophische Bibliotek", řízené filosofem Aloisem Höflerem, v Lipsku 1920, nakl. Felixe Meinera. K tomuto otisku je připojen výborný komentář známého německého matematika prof. Hanse Hahna.

Používám v následujících poznámkách tohoto komentáře v značném rozsahu s příslušným odkazem. Je však nutno poznamenat, že tento komentář se výslovně vzdaluje problematiky filosofické a do značné míry i logické (viz Hahnovo vyjádření o této věci na str. 133 cit. vydání, poznámka pod čarou). Doplňuji proto Hahnův komentář a snažím se čtenáři přiblížit i některé jiné problémy, které v souvislosti s Bolzanovými tématy nabyly významu v pozdější době. Na druhé straně jsou tyto poznámky psány s ohledem na širší okruh čtenářů a proto se úmyslně vyhýbají technicky náročným úvahám, ke kterým by jistě bylo dost příležitosti.

Mnohé z toho, o čem zde mluví Bolzano sám, je komentováno, vykládáno a hodnoceno v monografii akademika A. Kolmana „Bernard Bolzano" vydané v českém překladě r. 1958 v SNPL Praha, zejména na str. 72 — 87. Doporučuji četbu této přístupně psané monografie každému čtenáři, který si přeje poznat toto Bolzanovo dílo i jeho ostatní činnost v širších souvislostech.

Pokud jde o minimální nezbytné poučení o problémech matematického nekonečna, doporučuji čtenáři spisek doc. dr. Bedřicha Pospíšila „Nekonečno v matematice", vydaný posmrtně Jednotou československých matematiků a fyziků v Praze 1949 ve sbírce „Cesta k vědění".

V poznámkách je zachován postup podle paragrafů Bolzanova spisu. Jsou z větší části nepříliš rozsáhlé, takže čtenář snadno nalezne místo, k němuž se poznámka vztahuje. Před poznámky je umístěna jen stručná charakteristika vydavatele Bolzanova spisu.

Předmluva. Dr František Příhonský, žák a přítel Bolzanův (naroz. 6. října 1788 v Praze, zemřel 12. ledna 1859 v Budyšíně), studoval na pražské universitě teologii a filosofii. Krom funkcí, jež zastával jako kněz, působil čtyři roky (1818 — 1822) na pražské universitě jako adjunkt teoretické a praktické filosofie, krom toho od r. 1819 jako suplent estetiky do r. 1824. Od podzimu 1824 působil s přestávkou let 1827 — 1834 až do své smrtí v Budyšíně, později ve vysokém církevním postavení. Významné je jeho veřejné působení v Lužici, kde si získal velkou oblibu svými charakterovými vlastnostmi a svým rozsáhlým vzděláním. Sám byl spisovatelsky činný v oboru filosofie (viz spis „Neuer Antikant oder Prüfung der Kritik der reinen Vernunft", psaný pod vlivem Bolzanovým), avšak v naší souvislosti jsou zvláště důležité jeho zásluhy o šíření Bolzanova díla. Je autorem Bolzanova životopisu („Bolzanos kurze Lebensbeschreibung", 1850), psal o Bolzanově atomové teorii a krom „Paradoxů nekonečna" vydal ještě jiné Bolzanovy filosofické a náboženské spisy. Také byl prvním, kdo sestavil soupis Bolzanových prací (včetně prací jeho žáků).

Bolzanovou Logikou, o níž se Příhonský v předmluvě zmiňuje, rozumí zřejmě čtyřdílnou „Wissenschlaftslehre", jedno ze základních děl moderní fáze logiky vůbec, vydané poprvé péčí Bolzanových přátel v Sulzbachu 1837.

§ 1. Jako v jiných Bolzanových pracích je i v tomto spise, snad jen ještě ve význačnější míře, stavba Bolzanovy věty místy velmi složitá. Požadavky soudobého překladu by snad byly žádaly, aby příliš dlouhé a stavebně komplikované věty byly zjednodušeny (rozložením v několik vět a.p). Bylo by se k tomu mohlo využít i Bolzanova vnitřního členění vět (užitím dvojteček a středníků). Po určité úvaze jsem se však rozhodl ponechat Bolzanovu původní interpunkci. Vycházím totiž z toho, že českému čtenáři je nutno podat co možno úplný obraz stavby bolzanovské věty, která tu je mnohem spíše diktována požadavky logickými než estetickými.

§ 2. Vztah pojmů konečna a nekonečna a jejich názvů je třeba chápat ve smyslu Bolzanovy nauky o pojmu, rozvinuté zejména v I. dílu „Wissenschaftslehre") (v dalším textu pouze W s případným udáním paragrafu a dílu původního vydání). Pro pochopení § 2 je zvlášť důležitá Bolzanova analýza pojmu na jeho části (nebo součásti). V § 58 W I říká: „Velmi pozoruhodnou vlastností, která přísluší většině představ o sobě, i když ne všem, je jejich složení z částí. Naše vědomí nás totiž poučuje, že takřka u každé myšlené představy rozeznáváme určité části, jejichž spojením právě vzniká. Příklad nám může poskytnout představa kterou označuje výraz pozemský tvor. Neboť jistě si myslíme a musíme při tomto výrazu myslit právě totéž, co si myslíme při více slovech: „Tvor, který sídlí na zemi." ... Je-li však myšlená představa složena z určitých částí, které jasným vědomím rozeznáváme: není pochyby, že také představa o sobě... musí být složena alespoň z tak mnoha částí." Z tohoto hlediska pokládá Bolzano i každý negativní pojem za složený a to alespoň ze dvou částí, z nichž jedna je označena výrazem „ne —". Pojem nekonečna bude tedy mít alespoň dvě součásti. Bolzano směřuje svým postupem k vymezení pojmu nekonečna na základě pojmu konečna, tj. jde o pochod od pojmu jednoduššího k pojmu složitějšímu. (Srov. též Bolzanův výklad negovaných pojmů v § 89 W I). K uvedenému citátu z W je třeba jen dodat, že „představou" tu nemíní Bolzano onen pojem, který je znám z psychologie. Představu ve smyslu psychologickém charakterizuje Bolzano jako představu, kterou někdo má (gehabte Vorstellung). Naproti tomu v naší souvislosti jde o představu o sobě (Vorstellung an sich), která je součástí věty o sobě. Věta o sobě je jedním ze základních pojmů logicko-filosofické koncepce Bolzanovy. Stručně ji lze vystihnout asi takto: věta může být vyřčena, vyslovena, tj. skutečně pronesena. Přitom to, co je proneseno, musí o něčem vypovídat. To, co je vypovídáno, může být jen pravdivé nebo nepravdivé. Avšak vedle pronášených vět jsou, jak soudí Bolzano, též věty pouze myšlené. V obou případech je však třeba lišit větu samu od jejího pronesení nebo od myšlenky na ni. Věta o sobě je pak tím objektem myšlení, který ještě zbývá, položíme-li si otázku, zda ji někdo pronesl nebo na ni myslil, tj. to co zbývá, pokládáme-li tato fakta za lhostejná. Představa o sobě je vždy nějakou součástí věty o sobě, ale nesmí být takovou její součástí, aby byla sama o sobě již také tvrzením. Bolzanův příklad: „Cajus hat Klugheit" (Cajus je moudrý — přesněji, v duchu jisté Bolzanovy koncepce predikativního soudu — Cajus má moudrost). Tu jak slovo Cajus, tak také ostatní dvě vyjadřují něco, co může být součástí věty o sobě.

Zbývalo by dodat, že představa o sobě hraje v Bolzanově pojetí logiky zhruba tu roli, kterou má v jiných logických soustavách pojem. Bolzano dochází k pojmu jistou specializací představy o sobě, jak bude později poznamenáno.

Pojmy toho druhu jako věta o sobě, představa o sobě aj. jsou u Bolzana proto tak důležité, že byly jeho závažnou zbraní proti subjektivismu a psychologismu. A po této stránce také měly svou pokrokovou úlohu v Bolzanově filosofickém systému, který lze označit jako objektivně-idealistický. (Podrobněji o obou zmíněných pojmech viz W I, zejména § 19 a násl., § 48 a násl.)

Bolzanův termín Menge překládám důsledně termínem množina, termín Vielheit termínem množství.

§ 3. U Bolzana je pojem množiny, množství, řady a přirozených čísel budován na pojmu souhrnu (tímto termínem překládám Bolzanův Inbegriff). V Bolzanově logické soustavě vznikají uvedené pojmy specializací pojmu souhrnu, jak je obšírněji než v „Paradoxech" vysvětleno ve W I, §§ 82, 83, 84, 85, 86. O pojmu souhrnu říká Bolzano výslovně, že ho chce užívat v takovém významu, jak jej nacházíme v běžném jazykovém užití. Rozumí tím tedy „zcela totéž, co bychom mohli vyjádřit slovy: spojení nebo sloučení (těchto) věcí, spolubytí jejich, celek, v němž přicházejí jeho části ap.". Velmi zajímavé je, že ve W nechce Bolzano rozhodovat otázku, zda tu již jde o pojem (představu) jednoduchý nebo složený (v jeho smyslu). Avšak kloní se spíše k názoru, že jde o pojem jednoduchý (W § 82). Důležitý požadavek rozlišitelnosti předmětů, obsažených v souhrnu, vyslovený ke konci § 3, se odráží také v axiómatické výstavbě teorie množin. Tzv. axióm určenosti množiny, v některých soustavách uvedený, říká, že jestliže jest a prvkem množiny M a platí, že a je totožné s b, pak je také b prvkem množiny M.

V překladu opravuji E, uvedené v cit. vydání spisu na str. 3, ř. 8 zdola na C. Jde zřejmě o předměty označené A, B, C, ... a Bolzano požaduje nepravdivost vět: A je totožné s B, A je totožné s C, B je totožné s C atd.

Termín Teil, shrnující názvy předmětů souhrnu (později též množin) překládám termínem část. H. Hahn upozorňuje ve svém komentáři k tomuto paragrafu na to, že Bolzano užívá názvu Teil místo pozdějšího (Cantorova) termínu Element (prvek) množiny. Toto Hahnovo upozornění je jistě oprávněné. Domnívám se však, že by bylo třeba dodat k němu ještě tolik: Bolzanovy „Paradoxy“ tvoří nepochybnou jednotu. Po teoretické části následuje, jak čtenář sám pozná, aplikace na nauku o prostoru a času, na oblasti fyzikální i na otázky kosmogonické. Bolzano ponechává termín Teil také u částic hmoty, atomů atd., tedy tam, kde by bylo těžko užít termínu prvek. Termínu Teil užívá Bolzano v „Paradoxech“ důsledně, ať tedy jde o prvky souhrnů nebo množin v abstraktním smyslu nebo o souhrny a množiny reálně existujících předmětů.

§ 4. Hahn podotýká v poznámce k tomuto paragrafu, že Bolzanovo vymezení množiny se v podstatě kryje s novodobým pojetím až na to, že Bolzano nebere v úvahu množiny o jednom prvku a stejně tak i množinu prázdnou, jež jsou obě v matematice běžné. Lhostejnost způsobu složení částí množiny ilustruje Bolzano ve W příkladem hromady mincí, jejichž uspořádání je z hlediska sumy jejich hodnot lhostejné.

K Bolzanově stručné zmínce o „jednotce druhu A“ je třeba dodat: Bolzano došel k jednotkám druhu A tak, že uvažuje o ekvivalenci objektů, podřazených nějakému pojmu a jedině z hlediska tohoto pojmu. Říká: „Každý předmět, který má nějakou vlastnost (Beschaffenheit) *a* neboli je podřazen představě: něco, co má *a* (neboli A), je pro nás j e d n o t k o u d r u h u *A* v konkrétním významu slova jednotka, neboli konkrétní jednotka druhu *A*, či ještě kratšeji: jedno *A*.“ (Viz W I § 86, kde je též uvedeno, co rozumí Bolzano abstraktní jednotkou.)

Pokud jde o termín Beschaffenheit, přeložený v této souvislosti termínem v l a s t n o s t, má u Bolzana velmi široký význam, užívá ho nejen ve smyslu vlastnosti, nýbrž i velmi různých vztahů, ve smyslu struktury ap. (viz W I § 80, str. 387 aj.). Proto překládám termín Beschaffenheit na jiných místech tohoto díla a v jiných souvislostech i jinými českými termíny.

§ 5. Pokud jde o souhrny, které jsou součty, pokládá Hahn Bolzanovo vymezení v tomto paragrafu „za tak abstraktní a tak málo zřetelné, že je těžko stanovit jeho přesný smysl.“ V § 84 W I, na který též Hahn odkazuje, je výklad trochu podrobnější než v „Paradoxech“. Bolzanovi jde o to, že existují souhrny, jejichž části lze chápat opět jako souhrny jiných částí ale tak, že tyto části částí se mohou jevit být částmi původního souhrnu. Bolzano upozorňuje ve W I str. 400, že pro tyto součty je charakteristická nejen vlastnost l h o s t e j n é h o s p o j e n í částí, nýbrž i vlastnost : č á s t č á s t i j e o p ě t č á s t í p ů v o d n í h o s o u h r n u. Příklad, kterým svoji úvahu ilustruje, mu poskytuje úsek nějaké čáry (zřejmě názorné), který lze chápat jako souhrn menších úseků této čáry a ty chápat opět jako souhrny ještě menších úseků oné čáry.

Pokud jde o platnost asociativního zákona pro součty, je jisto, že bez jeho platnosti nelze o součtu mluvit. Avšak tento zákon sám nestačí vymezit pojem součtu, neboť platí i pro násobení čísel, platí v některých kalkulech logických (jako je např. třídový kalkul aj.)

§ 6. Bolzano učinil v § 87 W I vážný pokus o definici veličiny vůbec (zabýval se ostatně tímto problémem i jinde). Později byla učiněna řada úspěšnějších pokusů, vymezit tento pojem axiómaticky, tedy určitým počtem vzájemně bezesporných požadavků, kterým musí pojem veličiny vyhovovat. Učinil tak např. Couturat, Burali-Forti, Hölder a jiní. Bolzanův trichotomický požadavek, podle něhož platí pro veličinu buď $M = N$ nebo $M = N + v$ nebo $N = M + u$, vystupuje v axiómatických soustavách pro veličinu jako jeden z axiómů (i když třeba v jiné formulaci). Tak v systému Hölderově je prvním axiómem. Avšak charakterizovat veličinu jen tím požadavkem, který Bolzano uvádí, nestačí.

Ve své poznámce k tomuto paragrafu se Hahn zmiňuje o určitém zúžení oblasti veličin, které Bolzano svojí definicí přivodil. Říká výslovně: „ve skutečnosti se zdá, že Bolzanovi tanul na mysli příliš úzký pojem veličiny, neboť neuznal nulu za veličinu (viz § 14). Na druhé straně však hovoří výslovně o pozitivních veličinách (srv. § 18. pozn. pod čarou), uznává tedy zřejmě též nikoli pozitivní veličiny, takže je stěží srozumitelné, proč chce odpírat nule charakter veličiny."

Bolzano totiž nepovažuje 0 za veličinu (kdežto např. v soustavě Burali-Fortiho se 0 výslovně mezi veličiny zařazuje). To souvisí s okolností o které Hahn nehovoří, totiž s určitou filosoficko-logickou koncepcí Bolzanovou. Zmíníme se o této věci již na tomto místě, poněvadž se čtenář setká v Bolzanově textu ještě vícekrát s požadavkem „předmětnosti" nebo zase „bezpředmětnosti" představy (pojmu). V Bolzanově smyslu představy (viz pozn. k § 2) reprezentují (doslova „mají") předměty, dokonce i nekonečně mnoho předmětů. Existují však také představy, kterým neodpovídá nic, a ty právě Bolzano nazývá, na rozdíl od představ prvního druhu, bezpředmětnými. Bezpředmětnými jsou např. představa (pojem) označená slovem nic, dále představy vymezené spornými požadavky, jako je např. kulatý čtverec. Ale patří sem i představy, označené slovy zlatá hora apod., ač v jejich vymezení nelze spor (logický) objevit. Bolzanova diskuse obou těchto druhů pojmů není nijak idealistická. Bolzano rozumí veličinou vždy představu předmětnou (mající předmět), naproti tomu představa, odpovídající názvu nula, nemá předmět, je tedy bezpředmětná. Z tohoto důvodu vyjímá Bolzano 0 jak z veličin tak z čísel (srv. též § 67 W I). A proto také nepřijímá mezi množiny prázdnou množinu. To vede ovšem, z matematického hlediska vzato, k určitým obtížím, jak bude vidět.

§ 7. Hahn vytýká v poznámce k tomuto paragrafu Bolzanovu vymezení řady přílišnou šíři a uvádí příklad, v němž jistá množina by formálně Bolzanově vymezení vyhovovala, ač ji za řadu v obvyklém slova smyslu nelze pokládat. Hahn říká: „Srv. „Wissenschaftslehre" § 85. Také proti definici pojmu řady, zde podané, musí být vzneseny pochybnosti; je zřejmě mnohem širší, než Bolzano zamýšlel. Budiž např. daným souhrnem množina všech reálných čísel; ke každému reálnému číslu x si mysleme druhé, určené zákonem $x + 1$; Bolzanově definici řady je podle jejího slovního znění vyhověno, ačkoli Bolzano jistě nechtěl, aby se množina reálných čísel pokládala za řadu. Podle všeho zdání chtěl Bolzano svou definicí říci to, co bychom v dnešní terminologii vyjádřili takto:

množinu (jednoduše uspořádanou) nazveme řadou, jestliže ke každému jejímu prvku existuje přímo předcházející a přímo následující prvek (nejvýše se dvěma výjimkami: prvním a posledním prvkem). Avšak i takto pojat je tento pojem ještě mnohem širší, než Bolzano zamýšlel. Neboť pod tento pojem by spadala např. ještě množina všech celých komplexních čísel $m + ni$ (m a n jsou celá čísla), uspořádáme-li je podle tohoto zákona: $m' + n'i > m + ni$ když $m' > m$, a jestliže $m' = m$, pak když $n' > n$."

Je velmi zajímavé, že Bolzano se naopak obával, aby jeho vymezení nebylo příliš úzké. V každém případě je však třeba zdůraznit, že Bolzano tímto vymezením předešel daleko svoji dobu. Jeho pojetí řady přešlo, příslušně zpřesněné, do moderní logiky, jak svědčí již Russellova-Whiteheadova „Principia Mathematica." Ve W I § 85 diskutuje Bolzano velmi podrobně otázku o šíři vymezení řady a ještě dále problém „spojité" řady — tj. řady, jejíž členy by si byly libovolně blízké. Je nepochybné, že k těmto zkoumámím byl veden svými objevy matematickými. Také tento problém nezůstal bez významu i pro logiku. Důležité je (což v „Paradoxech" není uvedeno), že členy řady mají být dány jako části nějakého určitého souhrnu (viz W I str. 405).

§ 8. Tento paragraf je důležitý ze dvou důvodů. Je v něm proveden pokus o vymezení jednoho ze základních pojmů matematiky, totiž celého čísla a v souvislosti s ním je podáno objasnění konečnosti souhrnu nebo množiny. Hahn i v tomto paragrafu vytýká Bolzanovu vymezení nepřesnost, pramenící již v koncepci řady, avšak říká sám, že Bolzanova cesta vedla k přesnému vymezení obou pojmů. Stalo se tak skutečně v díle Dedekindově, Fregeově, Peanově a dalších. Bolzano potřebuje celé číslo k vymezení pojmu konečnosti a odtud k vymezení nekonečnosti, tedy k vymezení složitějšího pojmu, ve smyslu svého pojetí pojmů o větším nebo menším počtu součástí (viz též pozn. k § 2).

V souvislosti s tímto paragrafem „Paradoxů" by bylo třeba říci ještě tolik, zejména uvážíme-li souvislost s následujícím paragrafem: z hlediska důsledně vybudované teorie pojmů, jak je podána ve W I, nemohl Bolzano uvažovat o případné opačné cestě, totiž vymezit pojem nekonečna v matematice a jeho negací se dostat k vymezení konečna. Další vývoj matematického a logického výzkumu obou těchto pojmů ukázal, že i tato cesta je schůdná. Je to cesta, kterou šel Dedekind (viz Richard Dedekind, „Was sind und was sollen die Zahlen", 7. vyd. Vieweg a Sohn, Braunschweig 1939, § 5 str. 13). Dedekindova definice, kterou nazývá objasnění nebo vysvětlení (Erklärung) zní: „Systém S se nazývá nekonečným, je-li podobný vlastní části sebe samého; v opačném případě se nazývá S konečným systémem."

Systém v Dedekindově pojetí vzniká tak, že „rozličné věci (označené —O.Z.—) a, b, c . . . z nějakého podnětu pojímané ze společného hlediska jsou v duchu shrnuty a říkáme pak, že tvoří systém S; věci a, b, c . . . prvky systému, jsou v S obsaženy; naopak S je z těchto prvků tvořeno" (1. c. § 1,2., str. 1). Vysvětlení části S je podáno takto: systém A je částí systému S, když každý prvek z A je také prvkem S.

Systém A je vlastní částí S, je-li A částí S avšak různou od S (obojí 1. c. str. 2). K porozumění Dedekindově definici uvedeme ještě jeho vymezení pojmu podobnosti. K tomu uvádí Dedekind pojem zobrazení (přicházejícího již u Bolzana) které vymezuje takto: „zobrazením φ systému S se rozumí zákon, podle něhož ke každému určitému prvku s z S přísluší určitá věc, nazývající se obrazem s a označená $\varphi(s)$, říkáme též, že $\varphi(s)$ odpovídá prvku s, že $\varphi(s)$ vzniká či je vytvořeno z s zobrazením, že s předchází do $\varphi(s)$ zobrazením φ" (1. c. § 2, str. 5)

Podobné zobrazení je vymezeno takto: „zobrazení φ systému S je podobné (nebo zřetelné), když rozličným prvkům a, b systému S odpovídají vždy rozličné obrazy $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$." (1. c. § 3, str. 7) K celému problému vztahu konečných a nekonečných soustav (Dedekind) nebo množin (Bolzano) by bylo možno ještě dodat tolik: Bolzano i Dedekind mají to společné, že vyvozují jeden z obou polárních pojmů na základě druhého. U Bolzana se pojem nekonečna výslovně opírá o řadu, tedy o útvar lineární struktury. Další zkoumání v matematice i logice šla i tím směrem, vymezit pojem konečné množiny nezávisle na celých číslech a nezávisle na pojmu nekonečné množiny (Zermelo, Russell-Whitehead, Tarski aj.).

§ 10. Vzhledem k výslovnému Bolzanovu poukazu na různé významy termínu Beschaffenheit překládám v tomto paragrafu tento termín českým termínem skladba (viz též pozn. k § 4), tj. způsob složení.

§ 11. Přestože se toto Bolzanovo dílo zabývá problémy nekonečna také v oblastech (jak sám říká) fyziky a metafyziky, šlo mu zřejmě v první řadě o logickou výstavbu pojmu nekonečna, jež by mohla nahradit dřívější namnoze nejasné představy o nekonečnu. Hegel, o jehož „špatném nekonečnu" Bolzano mluví, užívá termínu nekonečno v zcela jiných souvislostech svého filosofického systému. V tomto smyslu je nutno chápat Bolzanovu polemiku s Hegelem. Hegelovo pojetí nekonečna by patrně v té abstrakci nebylo možno použít k rozlišení konečné a nekonečné množiny v tom smyslu, jak musí tohoto rozdílu šetřit každý matematik. Ostatně se Hegelovi nakonec konečno s nekonečnem identifikuje. Hegelovo „špatné nekonečno" (schlechtes Unendliche) je možno čtenáři velmi zhruba přiblížit představou veličiny, která neomezeně roste jakýmsi pouhým přidáváním.

Z filosofického hlediska jednoty konečného a nekonečného (která se ostatně projevuje ve specializované podobě jak v pojetí Bolzanově tak Dedekindově) zaujaly Hegelovy myšlenky o nekonečnu klasiky marxismu-leninismu, viz B. Engels „Dialektika přírody", český překlad, Svoboda, Praha 1950, str. 201 — 202, nebo V. I. Lenin, „Filosofické sešity", český překlad, SNPL Praha 1958, str. 85 — 86. Určení přímky poměrem ke dvěma bodům, jak se Bolzano brachylogicky vyjadřuje, míní patrně toto: zvolíme-li na přímce dva pevné body, bude každý další bod přímky určen jednoznačně poměrem vzdáleností, které má tento bod od zvolených dvou. Označíme-li tyto pevné body jako A, B pak je poloha kteréhokoli dalšího bodu X určena poměrem orientovaných úseček $\overline{AX} : \overline{BX}$.

Na konci tohoto paragrafu je Bolzanova zmínka o těch předmětech (našeho myšlení), kterým nepřísluší žádná skutečnost, což jsou v jeho pojetí také věty a pravdy o sobě. V pozn. k § 2 bylo již naznačeno, co rozumí Bolzano větou o sobě. V § 25 W I je Bolzanovo vysvětlení pravdy o sobě, podané těmito slovy: „rozumím tedy, abych to ještě jednou vyslovil, pravdou o sobě každou libovolnou větu, vypovídající o něčem tak, jak tomu je, přičemž ponechávám neurčené, zda si tuto větu někdo skutečně myslil a vyslovil nebo ne.“ Poněkud dále ještě objasňuje pravdu o sobě na predikativní větě: „... jestliže jen předmětu, o kterém jedná (ona pravda o sobě — O. Z. —) přísluší skutečně to, co ona mu připisuje.“

Bolzano naprosto nepopírá pravdu jako shodu myšleného se skutečným (ve smyslu objektivní reality), avšak uznává krom toho ještě existenci myšlených předmětů, kterým nepřísluší, jak říká, žádná skutečnost. A u těchto myšlených předmětů (jako jsou např. matematické, třeba $\sqrt{-1}$) jde také o zjišťování pravd. Proto nepřikládá obecně pravdám „existenci“, neboť (konec § 25 W I) „... ne všechny pravdy vypovídají o tom, co je skutečné (tj. co má bytí); zejména ne všechny ty, které jednají o předmětech, které samy nemají skutečnost, např. o jiných pravdách nebo jejich částech, představách o sobě.“

§12. V tomto paragrafu vychází Bolzano při kritice jiných pojetí nekonečna ze svého učení o skladbě pojmu. Vytýká jim, že nekonečno vymezují pouze součástmi pojmu nekonečna, nikoli všemi. Z celého paragrafu je snad nejdůležitější Bolzanova obhajoba nekonečna proti argumentům psychologickým, obecněji řečeno subjektivistickým. Aby bylo možno připsat nějakému souboru, obecně pak nějakému předmětu v nějakém ohledu nekonečnost, k tomu naprosto není třeba, abychom jej mohli vnímat jako nekonečný, představovat si jej jako nekonečný, tj. aby mohl být předmětem naší bezprostřední, dokonce i smyslové zkušenosti. Předmět v nějakém ohledu nekonečný je dán prostě svým logickým vymezením. Jiná otázka, kterou Bolzano v tomto paragrafu neřeší, je otázka po tom, co vůbec vedlo matematiky a filosofy aby se zabývali nekonečnem, a konečně jak se zavedení tohoto pojmu kde osvědčilo.

Na konci odst. 3 tohoto paragrafu je zajímavá poznámka o nekonečně veliké poznávací schopnosti, která by umožnila pochopit nekonečnou množinu pravd, totiž správných číslic nekonečného desetinného rozvoje $\sqrt{2}$. K této věci se ještě vrátíme později

§ 13. Začátek tohoto paragrafu odkrývá při vší stručnosti vyjádření závažný problém, který nabyl významu až po Bolzanově smrti. Jde o pojem modelu nějaké abstraktní teorie. Bolzano se ptá, zda jím vymezený pojem nekonečna lze vůbec na něco aplikovat, zda tedy existují nekonečné množiny předmětů, vyznačující se právě těmi vlastnostmi, které pojem nekonečna vyžaduje. Obecně vypadá problém takto: mějme nějaký systém předmětů, mezi nimiž jsou stanoveny nějaké vztahy. Tyto vztahy nechť jsou určeny tak, že o povaze oněch předmětů nic blíže nestanoví. Určují pouze strukturu onoho systému ale nic více než právě ji. Takový systém se nazývá abstraktním systémem. Jestliže o předmětech systému stanovíme něco bližšího, pak je konkretizujeme a získáváme model onoho abstraktního systému. Mysleme si např., že jedním ze stanovení o předmětech abstraktního systému by byla věta: jestliže $f(x, y)$ a $f(y, z)$, pak také $f(x, z)$. Budeme-li za předměty, které jsou zde obecně označeny znaky x, y, z, pokládat přirozená čísla a dvojmístný predikát f budeme chápat jako vztah „menší než", pak přejde naše věta ve větu: jestliže x je menší než y a také y menší než z, pak je x menší než z. Můžeme-li chápat hoření větu jako stanovení, které vyjadřuje tranzitivitu predikátu f, pak je ona tranzitivita vyslovena ve specializované formě pro přirozená čísla v druhé větě. Zkoumání modelů abstraktních systémů, které v dnešní době nabylo značného významu, bylo podníceno hlavně zkoumáním axiómatických soustav geometrie 19. a 20. století a jedním z nejvýznamnějších impulsů k němu podal objev neeuklidovské geometrie Lobačevského a Boylaiovy. Problém modelů je dnes velmi aktuální i z hlediska logiky, nejen matematiky, dokonce i v nedávno vzniklé vědecké disciplíně, kterou je kybernetika.

Logice dala např. pozoruhodné impulsy skutečnost, že logické operace některých kalkulů (jako je např. kalkul výrokový) lze modelovat na různých technických zařízeních, významných pro automatizaci.

Bolzanův důkaz existence nekonečné množiny vět je spolu s obdobným důkazem Dedekindovým v určitém smyslu ojedinělým a významným činem. Bolzanův důkaz je v podstatě uveden již ve W I § 32, kde je také šířeji proveden než v „Paradoxech". Stručně poznamenávám jen tolik, že v odst. 4. cit. paragrafu W dává Bolzano důkazu tento tvar: předpokládejme, že by bylo jen n pravdivých vět. Bolzano sestrojuje z těchto n vět větu novou, kterou nelze s žádnou z daných n vět identifikovat, a tak dokáže existenci další, $(n + 1)$ věty. Z poznámky k tomuto § W je patrno, že Bolzano si byl vědom originality svého důkazu. Nezávisle na Bolzanovi (protože v době sepsání spisu neznal ani Paradoxy, ani W) a v jistém smyslu obdobně dokazuje Richard Dedekind (l. c. str 14) existenci nekonečného systému takto: „Můj myšlenkový svět, tj. souhrn S všech věcí, jež mohou být předmětem mého myšlení, je nekonečný. Neboť značí-li s prvek S, pak je myšlenka s', že s může být předmětem mého myšlení, také prvkem S. Díváme-li se na ni jako na obraz $\varphi(s)$ prvku s (srov. poznámku k § 8 -O.Z.-), má zobrazení systému S tím určené tu vlastnost, že obraz S' je částí S; a to S' je vlastní částí S, neboť v S jsou prvky (např. mé vlastní já), které jsou od každé takové myšlenky s' odlišné, a tedy nemohou být v S'. Konečně je zřejmé, že jsou-li a a b rozličné prvky S, jsou i jejich obrazy a' a b' rozličné, takže zobrazení φ je zřetelné (podobné). A tedy je S nekonečné, což se mělo dokázat." Obdobu svého důkazu s postupem Bolzanovým Dedekind výslovně konstatuje v předmluvě k 2. vydání citovaného spisu.

Bolzanův důkaz využívá jen prostředků logických (započteme-li mezi logické principy i princip rekurence, o němž viz naši pozn. k § 26), Dedekindův se opírá o matematické pojmy systému, zobrazení a pojem části systému. Avšak oba důkazy se shodují v tom, že k nějakému již „hotovému" objektu sestrojí objekt nový, opírající se o první (nebo n prvních). I Bolzanova základní myšlenka, že z pravdivé věty A mohu sestrojit pravdivou větu A', totiž větu: A je pravdivá věta, a tak postupovat dále, je v Dedekindově důkazu skryta v tom, že myšlenka s' může dát vznik myšlence o myšlence [tedy dalšímu $(s')'$]. Přestože Dedekindovu důkazu nelze upřít postup, který je matematickému myšlení bližší, trpí zřejmě podle mého mínění zase tím, že je velmi těžko říci, co zařadit do „mého myšlenkového světa“ a zda tam patří „mé vlastní já“. Tuto obtíž Bolzanův důkaz nemá. Oběma je společné to, že pracují určitou evidencí, která umožňuje přecházet od objektu k novému objektu, od prvního odlišnému, stále, tj. bez konce. V soudobé matematice již nejsou podobné pokusy opakovány — dokázat přímo existenci nekonečného souhrnu předmětů — neboť se do důkazů vnášejí momenty, které je patrně obtížné formalizovat. V souvislosti s velkým problémem, který se tak pokusil řešit Bolzano i Dedekind, prokázat existenci nekonečných souborů, jež se v soudobých axiómatických soustavách teorie množin obvykle postuluje, učiníme ještě další poznámky.

Nejen Bolzano, jak je patrno i z motta, které umístil do záhlaví Paradoxů, ale jistě i mnozí další významní badatelé v oblasti nekonečných souborů, jako Weierstrass, Dedekind a Cantor, operovali typem nekonečna, pro který se historicky ustálil název aktuálního nekonečna. Avšak na konci minulého století a na začátku našeho století se objevily jisté antinomie, které začaly vážně ohrožovat budovu matematické disciplíny, totiž nauky o množinách, založené v podstatě Cantorem. Ukázalo se dvojí: za prvé je nutno zaujmout kritické stanovisko k aktuálnímu nekonečnu, a později, ve dvacátých létech našeho století, se kritika rozšířila ještě na otázky platnosti logického zákona vyloučené třetí možnosti. Pro ilustraci ukážeme nejprve, jak můžeme dospět k antinomii, připustíme-li aktuální nekonečno jako něco hotového, dovršeného, třeba ve smyslu platonské ideje.

Již v tzv. „naivním“ stadiu nauky o množinách dokázal Cantor větu, že k množině všech podmnožin dané množiny přísluší větší kardinální číslo než k množině výchozí. Tuto větu je možno odvodit i v axiómatizované teorii množin, v její jakékoli soudobé podobě. Představuje tedy výsledek trvale platný. Připustíme-li, ve smyslu aktuálního nekonečna, nekriticky předmět, který nazveme množinou všech množin M (a taková množina by pro zastánce aktuálního nekonečna měla existovat), vyvodíme snadno antinomii. Utvořme formálně množinu všech podmnožin M, kterou nazveme U. Tato množina je jednou z množin, které jsou prvky M (neboť M obsahuje všechny množiny vůbec). Proto podle známé věty jí přísluší kardinální číslo, které je menší nebo nejvýše rovno kardinálnímu číslu příslušnému k M. Avšak na druhé straně je podle citované Cantorovy věty kardinální číslo příslušné k U jistě větší, než kardinální číslo příslušné k M. Tak jsme došli ke sporu. Antinomie této povahy upozornily na nebezpečí, jež by se mohlo skrývat v nekritickém přijímání „aktuálního“ nekonečna.

Zdánlivě jiné povahy, ač ve skutečnosti v těsné souvislosti s uvažovanou otázkou aktuálního nekonečna, je kritický pohled na neomezenou platnost zákona o vyloučené třetí možnosti. Tohoto zákona užívala často klasická matematika, zejména při tzv. existenčních důkazech. Mysleme si, že máme dokázat větu, která by zajišťovala existenci alespoň jednoho matematického předmětu žádané vlastnosti. Předpokládejme přitom, že tento předmět má být prvkem nekonečné množiny, skládající se ještě z jiných předmětů. Klasické matematice stačil k důkazu existence tento postup: dejme tomu, že se nám podařilo vyvodit spor z tvrzení, že žádný předmět uvažované množiny žádanou vlastnost nemá. Pak platí podle zákona o vyloučené třetí možnosti (poněvadž právě je každá další možnost vyloučena) opak, a tedy musí existovat alespoň jeden předmět žádané vlastnosti. Nic bližšího ovšem o tomto předmětu nemůžeme říci, než právě jen to, že existuje. Mnozí soudobí matematikové se klóní k názoru, že určení matematických předmětů, jako je právě uvedené, je neoprávněné. Může být dokonce prázdným tvrzením, nejen proto, že neukazuje žádný postup, jak k existujícímu předmětu dospět.

Ukážeme si na příkladě, že tato okolnost může být vážnou překážkou určení matematického předmětu.

Označme si $\pi = 3{,}a_1a_2a_3\ldots$ rozvoj Ludolfova čísla a definujme reálné číslo

$$\alpha = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{b_i}}$$

tak, že platí-li pro nějaké i: $a_i = 7$, $a_{i+1} = 7, \ldots a_{i+6} = 7$, avšak $a_{i-1} \neq 7$ a také $a_{i+7} \neq 7$, bude b_j pro $j = i$, $i+1$, $i+2, \ldots i+6$ mít hodnotu $j+1$. V každém jiném případě je $b_i = i$. Číslo π je iracionální číslo (dokonce transcendentní). Jeho rozvoj za desetinnou čárkou je neperiodický. Není dosud známo, zda se někde v rozvoji vyskytuje sedm sedmiček posobě či ne. Tím spíše není známo, vyskytuje-li se v tomto rozvoji konfigurace sedmi sedmiček vícekrát. Proto naše reálné číslo α je sice formálně definováno, avšak o jeho velikosti můžeme říci jen málo. α by mohlo být rovno 1, kdyby se v rozvoji nikde oněch sedm sedmiček po sobě nevyskytlo. Avšak α bude jistě menší než 1 v opačném případě. Vzhledem k tomu, že známe rozvoj π na více než 700 míst, lze ovšem určit, pod které číslo α nemůže klesnout. Avšak víc nemůžeme zatím říci. Hlavní obtíž je v tom, že dosavadními prostředky nemůžeme podat vytvořující zákon, který řídí sled číslic desetinného rozvoje π. A z našeho příkladu vyplývá i ten důsledek, že sama poloha reálného čísla na číselné ose není určením nijak samozřejmým, jako byla jistě v Bolzanově době. Soudobá matematika se proto dívá i na problém rovnosti dvou reálných čísel kriticky. Nelze bez dalšího tvrdit: buď je $a = b$, nebo $a \neq b$. Je-li možno ukázat na číslo, např. c, že leží mezi a a b, pak píšeme $a \neq b$, a pak jistě platí také $a \neq b$. Není-li však možno na takové číslo c ukázat, nemůžeme jen tak tvrdit $a \neq b$, opíráme-li se jen o princip vyloučené třetí možnosti.

Klasická matematika má takové postupy, které jsou na jedné straně spojeny s aktuálním nekonečnem a na druhé straně využívají neomezené platnosti zákona o vyloučené třetí možnosti. Například Dedekindova teorie reálných čísel je opřena o to, že každé reálné číslo je chápáno jako „řez“ v množině lineárně uspořádané, která má aktuálně nekonečně mnoho prvků. V teorii množin známý axióm výběru je ryze „existenčním“ axiómem, který povahu „vybraného“ prvku vůbec blíže neurčuje, jakmile jde o nekonečné množiny. A pro konečné množiny zase ho není třeba. Obtíže, spojené s takovýmito problémy, nemohly být ovšem známy v Bolzanově době. Některé z nich nebyly známy ani v době, kdy Hans Hahn psal svůj komentář k Bolzanovým Paradoxům, z něhož jinde čerpáme. A nebyly tedy známy ani Bolzanovu pokračovateli, jako byl Dedekind nebo Cantor, ač Cantor objevil v pozdější době svých množinových zkoumání antinomii, o které jsme se zmínili. Viděl v ní právem vážné ohrožení teorie množin.

Pokusíme se v dalším charakterizovat co nejstručněji dva směry, kterými se dnes ubírá zkoumání nekonečna. Oba tyto směry se v podstatných věcech neliší.

První směr vyšel z určitého Hilbertova zkoumání tzv. kontinua, jehož vlastnosti, jako je uspořádání aj., nepřestaly být podnětem k řešení nejobtížnějších problémů matematiky. Toto Hilbertovo zkoumání využilo ve velké míře staršího prostředku matematiky, totiž tzv. rekurze. Již v antické matematice najdeme formulované takové postupy, jak přejít od nějakého matematického předmětu k jinému, jenž je vytvořen za předpokladu, že předchozí je již „hotov". Takové postupy nalezneme u Eukleida, nalezneme je také u Archiméda. Archimédes stanovil např. vztah mezi obvody dvou mnohoúhelníků, jak vepsaných, tak opsaných, které potřeboval pro aproximaci obvodu kruhu, a to tak, že ukázal, jak je možno přejít od n-úhelníka k 2n-úhelníku. Z takovýchto částečných zkušeností se zejména v našem století vyvinula nauka o rekurzívních funkcích. Nauka o rekurzívních funkcích je proto důležitá v soudobé matematice, poněvadž jí není možno vytýkat takové postupy, které by mohly vést k neoprávněným užitím ať již matematických předmětů (jako aktuální nekonečno), nebo zase postupů (jako je nekritické užití zásady vyloučené třetí možnosti).

Rekurzívně je možno např. definovat sčítání, a to těmito požadavky:

$$\varphi(0,a) = a$$
$$\varphi(n+1,a) = \varphi(n,a) + 1$$

Pak je možno určovat hodnoty součtu čísel n a a postupně, čili tyto hodnoty vyčíslit. Tato nejjednodušší rekurzívní funkce je zároveň základní funkcí pro aritmetiku. Význačný soudobý logik a matematik T. Skolem ukázal, že pomocí rekurzívních funkcí je možno vybudovat základní obor matematiky, totiž aritmetiku. Důležité je přitom to, že rekurzívní pojetí aritmetiky se neopírá o aktuálně nekonečné soubory. Vše se postupně vytváří, není žádný hotový soubor nekonečně mnoha předmětů. Rekurzívní funkce lze při zachování jistých pravidel kombinovat, superponovat, lze dosazovat do jiných rekurzívních funkcí atd., a tak vytvářet složité rekurzívní funkce, které dovolují definovat předměty potřebné v matematice. K takovým předmětům se došlo již v klasické matematice, avšak jejich existence je teprve tímto způsobem ospravedlněna konstruktivně. Vlastnost matematického předmětu, jeho konstruovatelnost, spočívá v tom, že jeho existence se zaručí udáním předpisu, jak je možné k němu dospět.

Rekurze se nemusí omezit jen na rekurzi v oblasti přirozených čísel. Již od Veblenových prací z počátku našeho století je známo, že nezcela přesné pojmy klasické teorie množin, jako je pojem transfinitního kardinálního čísla nebo transfinitního ordinálního čísla, je možno přesně budovat rekurzívně. V současné době je to zejména americký matematik a logik S. C. Kleene, který užil rekurzívních funkcí obecnější povahy k definici transfinitních ordinálních čísel a ukázal možnost, jak vytvořit hierarchicky jejich systém, který není vysazen námitkám. Jeho výsledky se týkají zejména první a druhé třídy těchto čísel a dovolují, jak se říká, „efektivně“ rozhodnout o každém takovém čísle, zda je 0, nebo následníkem nějakého ordinálního čísla, nebo limitou stoupající posloupnosti ordinálních čísel. Pozoruhodnou stránkou těchto zkoumání je to, že se znovu uvádí pozornost na obsahovou stránku matematických operací a výsledků, že se upouští od ryze formálních, obsahově nekontrolovaných postupů.

Kdežto předchozí způsob kritického zkoumání nekonečných souborů se opírá zejména o studium rekurzívních funkcí, kterým bylo zejména v USA věnováno mnoho pozornosti, docházejí zejména sovětští matematikové k obdobné kritice na základě pojetí algoritmu. Teorii algoritmu podal zejména význačný sovětský matematik A. A. Markov, ač nezávisle na něm se podobné pojetí vyskytlo u amerického matematika a logika E. L. Posta. Sovětská konstruktivistická škola vylučuje také, jak již bylo dříve uvedeno, nekritické přijímání hotových nekonečných souborů a právě tak nekritické užití principu vyloučené třetí možnosti. Ukazuje se, že namísto aktuálního nekonečna je možno přijímat bez dalších předpokladů jen tzv. potenciální nekonečno, jako nekonečnou množinu jednotlivě realizovatelných předmětů. I libovolný konečný počet takových předmětů je realizovatelný. Ale ne všechny najednou.

Algoritmická metoda, které využívá sovětský konstruktivistický směr v matematice, se opírá o vymezení algoritmu, který je předpisem formulovaným v nějakých větách a který dovoluje přecházet od jistých, dobře vymezených předmětů k novým. Tento předpis též obsahuje určení, kdy se algoritmický proces zastaví, skončí. Ukazuje se, že takovéto předpisy lze podat ve tvaru řádek, obsahujících skupiny písmen, kde od jedné skupiny se přechází k druhé, od levé k pravé. Pracuje se tedy jakýmisi písmenkovými konfiguracemi, kterým je možno dát velmi různé interpretace. Takovou konfigurací písmen může být např. konečná posloupnost prvků, označených $a_1a_2a_3\ldots a_n$. Můžeme ji třeba v oblasti přirozených čísel interpretovat tak, že a_i jsou znaky přirozených čísel a číslo označené a_{i+1} následuje v konfiguraci po čísle a_i, platí-li $a_i < a_{i+1}$. Máme-li již konfiguraci $a_1a_2a_3\ldots a_n$, můžeme k ní připojit konfiguraci obdobnou $b_1b_2b_3\ldots b_n$, například tak, že její členy v tomtéž pořádku prostě připojujeme za členy konfigurace $a_1a_2a_3\ldots a_n$, takže vznikne konfigurace $a_1a_2a_3\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m$. Tato konfigurace, vzniklá předepsaným skladem obou výchozích, může být interpretována jako posloupnost vzrůstajících přirozených čísel.

Konfigurace lze tedy skládat podle jistých algoritmických předpisů a lze je také obměňovat. Můžeme např. určité písmeno, jež přichází v nějaké konfiguraci, zaměnit za jiné písmeno všude tam, kde se původní písmeno vyskytuje, můžeme však takové písmeno nahradit i celou konfigurací, nebo konfigurací, jež sama vznikla skladem jiných konfigurací, atd. Jsou dále zavedeny třídy konfigurací a operace s nimi. Třídy konfigurací musí opět být tak určeny, aby bylo možno vždy rozhodnout, která konfigurace k ní patří, a to konstruktivním, realizovatelným postupem. Na třídy konfigurací se aplikují konstruktivní operace s jejich prvky i s celými třídami. Tyto operace spočívají v tom, že se z daného souboru konfigurací vyvodí jiná konfigurace, a to realizovatelným postupem. Takovýmto způsobem je možno položit základy matematických disciplín tak, aby nebyly vydány pochybnostem, ke kterým vedly těžko kontrolovatelné klasické postupy. Je možno ukázat, že postupy, které jsou spojeny s využitím rekurzívních funkcí, jsou ekvivalentní postupům využívajícím algoritmů. Důkaz provedl anglický matematik A. M. Turing, který využil myšlenky ideálního stroje, který realizuje výpočet hodnot rekurzívní funkce na základě algoritmu své činnosti. Jinak řečeno: algoritmické postupy je možno transformovat v postupy určené rekurzívními funkcemi a naopak.

V době nepříliš vzdálené byly učiněny pokusy založit matematiku na pojmu konečných množin. Takový pokus učinil francouzský matematik Denjoy. Základním pojmem jeho teorie je pojem uspořádání. Dokázal, že připojíme-li k tomuto základnímu pojmu ještě další základní pojmy, totiž počátečního a konečného prvku, lze založit teorii konečných množin, aniž by se bylo nutno uchýlit k principu rekurence (srov. naši poznámku k § 26). Tyto pojmy totiž stačí, aby se dospělo k definici kardinálního a ordinálního čísla množiny. Množina je tehdy konečná, když je uspořádatelná a všechna uspořádání jsou mezi sebou navzájem podobná (pomocí jednoznačného zobrazení). Nechceme-li překročit hranice konečna abychom se nedostali do možných kontradikcí, stačí se omezit na konečné množiny vybudované na uvedeném základě (viz Arnaud Denjoy, Comptes Rendus A. Sci. Paris, t. 224, 1947, str. 612 — 615). Ptejme se, jak bude tato koncepce odpovídat praxi. Lze odpovědět, že praxe vyžaduje vždy řešení přibližná, takže s konečným počtem kroků vystačíme, to ostatně platí i pro povahu výpočtů, prováděných matematicko-logickými stroji. Avšak na druhé straně je třeba zdůraznit, že matematické metody, které umožnilo zavedení nekonečna a které poskytují možnost spojitého přechodu k mezím ve velmi obecných podobách, sjednocují i ty metody, které vedou jen k přibližným výsledkům. Z hlediska metody by bylo patrně velmi nevýhodné opustit možnosti, které poskytují tato sjednocující hlediska, a nahradit je celou sérií předpisů, těžko přehledných, jak pracovat s finitními množinami v aplikacích.

Jiným významným pokusem o založení matematiky na finitním základě je pokus sovětského matematika a logika Jesenina-Volpina (viz „Analiz potencialnoj osuščestvitělnosti“, in: „Logičeskije issledovanija ANSSSR“, Institut filosofie, 1959, Moskva, str. 218 a násl.). Jesenin-Volpin vychází z toho, že obtíže základů matematiky jsou spojeny s pojmem nekonečna. Proto namísto aktuálního nekonečna zavádí pojem „nerealizovatelného čísla“, který je podle mého názoru těsně spjat s praktickou možností či nemožností uskutečnit sérii operací, třeba zcela elementárních, vedoucích k nesmírně velikému číslu, jako je třeba 10^{12}. Jesenin-Volpin se přímo ptá, co by se dalo říci o funkci, která dovoluje postupně vypočíst hodnoty příslušné k celočíselným hodnotám argumentu (tzv. rekurzívní funkce -O.Z.-), jestliže by její hodnota již pro argument 2 „spotřebovala více papíru, než ho vůbec je na naší planetě, a delšího času, než existuje sluneční soustava“? Takové a podobné motivy vedly Jesenina-Volpina k tomu, aby ve své teorii zavedl předmět, který je prakticky nedosažitelným číslem. (Jesenin-Volpin sice takové číslo blíže obsahově neobjasňuje, avšak lze se domnívat, že neinterpretujeme nesprávně tuto jeho myšlenku, považujeme-li „nedosažitelnost“ za vlastnost historicky podmíněnou asi v tomto smyslu: dnešní prostředky počítací techniky dovolují vypočíst např. neobyčejně vysoká prvočísla, která se třeba v době pražského působení matematika Kulika (1. polovina 19. století) jevila být, i z hlediska jeho duchaplné metody vyhledávání prvočísel, jako prakticky nedosažitelná. Avšak jisto je tolik, že v každé době budou nedosažitelná čísla v Jeseninově-Volpinově smyslu, ať bude tato hranice posunuta jakkoli vysoko) V modelu jeho abstraktního systému existují předměty a(0), a(1), a(2),... které lze chápat jako hodnoty monadické funkce pro celočíselné argumenty. Avšak existuje jisté z, které je nerealizovatelným číslem a kterému odpovídá předmět a(z). Pro objekty modelu, které jsou přesně stanoveny podrobně udanými předpisy, platí např. věty: a(0) je realizovatelné. Jestliže je a(n) realizovatelné, je také a(n + 1) realizovatelné. Objekt je realizovatelný pouze za těchto podmínek. Z toho plyne, že a(z) není realizovatelné, neboť zřejmě ani a(z — 1) není realizovatelné. Nerealizovatelný objekt v teorii Jesenina-Volpina odpovídá do jisté míry prvnímu transfinitnímu kardinálnímu číslu Cantorovu, totiž kardinálnímu číslu spočetné množiny, vůči němuž je ovšem Jeseninovo-Volpinovo „nerealizovatelné“ číslo jistě „menší“, díváme-li se na věc z hlediska klasické teorie množin (Cantorovy). Vzhledem k nemalé náročnosti práce Jesenina-Volpina upouštím od dalších informací o jeho teorii, která by vyžadovala zavedení ne právě jednoduchého formálního aparátu. Je velmi zajímavé, že jako námět teoretický se vynořil podobný problém již u fenomenologa Oscara Beckera, přesněji vzato již u jeho učitele Husserla. Becker, odvolávaje se na Husserla, uvádí: „Je podstatný rozdíl, zda 1. číslo je přímo, názorně podáno (to jsou jenom čísla nejmenší, 1, 2, 3 a snad 4); 2. zda může být číslo učiněno nějak názorným vhodnými pomocnými prostředky, např. vhodným shrnutím názorných prvků do nějakého tvaru (Gesamtgestalt); 3. nemůže být učiněno názorným nijak a je znázornitelné pouze aritmetickými symboly jako např. čtyři sextiliony, číslo $10^{10^{10}}$ a ještě větší čísla.“ Becker k tomu podotýká, že ani hranice mezi případem 1. a 2., ani hranice mezi případem 2. a 3. není ostrá, avšak určitě lze udat čísla (aritmetickými symboly), která nesporně patří pod případ 3. (Srov. O. Becker, „Mathematische Existenz“, otištěno v Husserl, Jahrbuch f. Philosophie VIII, str. 801 pozn. pod čarou).

Celá věc je dnes znovu zkoumána v souvislostech s operacemi, které se realizují v tzv. matematických strojích. Můžeme se nyní vrátit k pozn. k § 12, kde jsme upozornili na Bolzanovu úvahu o nekonečné množině pravd, totiž číslic určených rozvojem $\sqrt{2}$. Tuto odmocninu známe s dostatečnou přesností, kterou vyžaduje praxe, a jistě můžeme snadno realizovat první, druhou, třetí i čtvrtou číslici desetinného rozvoje této odmocniny. Ve smyslu úvah Jesenina-Volpina i Oscara Beckera se problém objeví tehdy, kdybychom uvažovali např. o bilionté cifře desetinného rozvoje. Poznání nekonečné množiny pravd je v tomto Bolzanově příkladu „nerealizovatelné“.

§ 14. Obhajoba nekonečna proti autorům, kteří je popírají, má v tomto paragrafu zásadní důležitost. Bolzano jde opět proti psychologizování — stručně řečeno: ne vše, co je myslitelné, je také představitelné. Avšak obhajoba nekonečna přinutila Bolzana, aby argumentoval namnoze nikoli v mezích svého objektivně idealistického systému, nýbrž zcela materialisticky. Především je zcela materialistický argument proti autorům (odst. 1.), kteří tvrdí, že k tomu, aby něco existovalo, je nutno, aby tu byl člověk, který si to existující myslí. Příklad existence předmětů na pólech a zdůraznění objektivních přírodních zákonitostí, jež se v nich projevují, to potvrzuje. Bolzano je chápe jako nezávislé na lidské existenci.V závěru tohoto paragrafu je kritika všech, kteří považují existenci objektu za závislou na subjektu, vedena tak, že jejich pojetí je přivedeno ad absurdum. Kritika takto vedená platí jak na millovské pojetí předmětu jako komplexu znaků tak i na novopozitivistické pojetí předmětu jako komplexu počitků. Zcela podobně je tomu v odst. 3., kde Bolzano hájí nepochybnou prioritu objektivní možnosti a z ní odvozenou možnost myšlenkovou. Později se ještě dotýká Bolzano otázky existence předmětu v souvislosti s principem sporu. Je patrno, že nemůže uznat existenci předmětu vymezeného kontradiktoricky, ale toto mu nestačí. Zde se ovšem projevuje podstatně vliv jeho objektivně idealistické koncepce — možný je takový předmět, který není ve sporu s „ryzími pojmovými pravdami.“

§ 16. Hahn upozorňuje správně v poznámce k tomuto paragrafu, že Bolzanovo pojetí čísla je užší než v pozdější a soudobé matematice. Bolzano pojímá číslo jen v tom smyslu, jak je vymezil v § 8 tohoto spisu, totiž jako číslo přirozené. Naproti tomu zahrnuje do pojmu veličin již zlomky tvaru $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou celá čísla, a tím spíše tam zahrnuje výrazy, označené znaky jako $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ ap. Tyto veličiny zahrnuje ovšem matematika také pod pojem čísla, racionálního lomeného, iracionálního atd. G. Cantor rozšířil pojem čísla ještě o čísla transfinitní (transfinitní kardinální čísla, vyjadřující mohutnost množiny a transfinitní pořádková čísla — charakterizující dobře uspořádané množiny), tam kde Bolzano mluví jen o nekonečných veličinách.

§ 17. Také v tomto paragrafu, jehož podkladem je Bolzanova teorie času a prostoru, najdeme správné Bolzanovo ohrazení proti názoru, jakoby něco nabývalo skutečnosti teprve myšlením. Bolzanovo pojetí času a prostoru vychází z jeho postulátu, že skutečnost (realitu) musíme připsat v hmotném dění jenom substancím a silám, jimiž se substance projevují. Substance pak mají dvojí „určení“: za prvé prostorové — jsou někde a za druhé časové: tam, kde jsou, jsou někdy, tj. v nějaké době či okamžiku (viz též pozn. k § 39.) Čas a prostor bez substancí (a jejich sil) nemá „skutečnost“ v Bolzanově smyslu (toto je leibnizovské) a tedy nemá ani „skutečnost“ žádná „část“ — tj. element prostoru nebo času, bod a okamžik. Bolzano si však patrně neuvědomuje, že postuluje nekonečnost množiny prostorových a časových elementů v intervalech, jejichž délka je konečná, což není nijak samozřejmé. Již velmi dávné filosofické názory připouštěly možnost, že jak čas tak i prostor mají diskontinuitní povahu, že existují minimální délky (v některých pojetích řeckých) a minimální doby (v jistém pojetí indickém). Tyto minimální intervaly na sebe navazují, avšak jsou přitom ještě délkami, resp. dobami. A protože přece jak čas tak prostor jsou odrazem reality, nebude na škodu, připomeneme-li si tu, že jak kvantová fyzika tak teorie informací vnesla do problému libovolně malých časových a prostorových distancí nové myšlenky. Jeden ze soudobých teoretiků říká: „Matematik může definovat nekonečné malé vzdálenosti, avšak je to abstrakce, odpovídající nemožným fyzikálním podmínkám. Uvažujme na příklad o dané laboratoři s určitým omezeným množstvím energie. Užije-li se veškeré energie k měření nějaké vzdálenosti (čím je vzdálenost menší, tím větší energie se musí vynaložit k jejímu změření, kterážto zákonitost byla odkryta teprve v nepříliš vzdálené době — běžná zkušenost v makroprostoru ji nemohla totiž vůbec zjistit -O.Z.-) pak je tato vzdálenost nejmenší, která je v té laboratoři pozorovatelná. Bylo často navrhováno, že mnohé obtíže kvantové teorie by mohly být odstraněny tím, že by se zavedlo něco jako minimální délka. Pevná minimální délka by byla těžko ospravedlnitelná na základě předchozích poznámek. Váháme rozšířit příklad laboratoře s omezeným množstvím použitelné energie tak, aby objímal celý vesmír, protože je obtížné přesně definovat jeho obsah i rozsah. Nicméně můžeme říci, že měření kratších a kratších vzdáleností poskytuje vždy stoupající obtíže a vzrůstající nákladnost pozorování může být novým nezbytným činitelem teorie.“ (Viz L. Brillouin „Science and Information Theory“, New York 1956, str. 236). Podobně je tomu u měření časových. Jde tu o zásadní nemožnost, stlačit jak prostorové tak časové intervaly pod libovolnou velikost a dojít tak k časovému „okamžiku“ a prostorovému „bodu“. Otázka realizace, která se nám tu objevuje v jiné podobě, se stává zřejmě jednou z vážných otázek soudobé vědy.

§ 18. Hahn věnuje tomuto paragrafu rozsáhlou poznámku, v níž zejména kritizuje Bolzanův postup výpočtu, jak je uveden v původní Bolzanově poznámce k textu § 18. Podotýká, že neodpovídá dnešním názorům. Hlavní Hahnova výtka spočívá v tom, že Bolzano „je přesvědčen jistě o tom, že na základě pojmu součtu, uvedeného v § 5, je oprávněn uvažovat bez dalšího o součtu o nekonečně mnoha sčítancích.“ Pokračuje pak těmito slovy: „Viděli jsme již, že tato definice pojmu součtu je příliš neurčitá k tomu, abychom s ní mohli něco počít. Máme tedy proti Bolzanově vedení důkazu tu námitku, že se součty, jež v něm přicházejí, není spojen vůbec přesný pojem a že tedy výpočty s nimi prováděné (jako je např. vytknutí společného činitele před závorku) není ničím odůvodněno.“ V tom je ovšem nutno zcela s Hahnem souhlasit. Hahn pak ukazuje, jak řešila pozdější analýza výpočet součtu nekonečně mnoha čísel pomocí pojmu limity. Je-li $a_1, a_2, a_3, \ldots$ posloupnost reálných čísel (na něž se omezíme), pak říkáme, že tato posloupnost má za limitu číslo a, jestliže při libovolně malém čísle ε vyhovují všechna čísla posloupnosti (až na případný konečný počet výjimek) nerovnině

$|a_n - a| < \varepsilon$ (prostá hodnota rozdílu $a_n - a$ je menší než ono libovolně malé ε) Má-li naše posloupnost limitu, nazývá se konvergentní, v opačném případě divergentní.

Na základě pojmu limity, který byl vypracován v souvislosti s prohlubujícím se poznáním reálných čísel, je možno snadno odvodit součet nekonečné řady. Jsou-li členy této řady $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, b_{n+1} \ldots$ pak utvoříme částečné součty $s_1 = b_1$, $s_2 = b_1 + b_2$, $s_3 = b_1 + b_2 + b_3, \ldots$, které lze opřít o definici součtu při konečném počtu sčítanců. Užijeme-li matematické indukce, můžeme definovat s_n pro každé n. Pak platí: má-li posloupnost $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, s_{n+1}, \ldots$ limitu s, pokládáme s za součet nekonečné řady $b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n + b_{n+1} + \ldots = s$. V Bolzanově textu přichází řada $a + ae + ae^2 + \ldots = \dfrac{a}{1 - e}$ pro $e < 1$; v tomto případě je $s = a + ae + \ldots + ae^n + \ldots$ a protože $e < 1$, platí $\lim\limits_{n \to \infty} e^n = 0$. Proto má s jako limitu $\dfrac{a}{1 - e}$. V Bolzanově textu je ještě jedna obtíž, kterou Hahn naznačuje jen několika slovy. Mezi (3) a (4) uvažuje Bolzano o řadě $e^n + e^{n+1} \ldots$ in inf. $= e^n$. $(1 + e + e^2 + \ldots$ in inf). a podotýká, že řadu v závorce nemůžeme identifikovat s řadou, označenou v textu jako S, neboť prý má o n členů méně. Zde se právě projevuje nejistota definice součtu o nekonečně mnoha sčítancích, neboť podle našich názorů je řada v uvedené závorce totožná s S, jak ostatně snadný počet potvrdí. Podobný nedostatek se vyskytuje i v některých pozdějších Bolzanových úvahách z Paradoxů, jak bude čtenáři patrno.

Avšak na druhé straně je nutno v zájmu historické spravedlnosti upozornit, jak daleko dospěl Bolzano i v tom směru, kterým se ubíraly úvahy o limitě v době po jeho smrti. O této věci se Hahn nezmiňuje a proto poukazujeme na Bolzanovu práci „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, das zwischen je zwei Werten, die ein entgegegesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege“, Praha 1817, Abh. d. königl. Böhm. Gesellshaft der Wissenschaften 3 Folge, 5. Bd., I. Abt., přístupnou v nejnovější době i v českém překladu v uvedené monografii A. Kolmana (viz str. 167 a násl.). Místo, na něž upozorňujeme, je § 6 a § 7 cit. práce, kde Bolzano zkoumá tutéž řadu o které hovoří v poznámce k § 18. Paradoxů. Zavádí pro hodnotu, které dosáhne součet prvních $n, n + 1, \ldots$ členů řady symboly $F_n(x), F_{n+1}(x), \ldots$, tedy činí totéž, co požaduje soudobá matematika (viz Hahnovy částečné součty s_n) a říká pak v § 7 citované práce obecně: „Má-li řada veličin $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x), \ldots F_n(x), \ldots F_{n+r}(x)$ takovou vlastnost, že rozdíl mezi jejím n-tým členem $F_n(x)$ a každým dalším $F_{n+r}(x)$, ať je od něho jakkoli vzdálen, je menší než každá daná veličina, jestliže jsme zvolili dostatečně velké n, existuje vždy stálá veličina, jíž se členy této řady stále více blíží a jíž se mohou přiblížit tak, jak si přejeme, prodloužíme-li řadu dosti daleko.“ Dá se ukázat, že tato Bolzanem poprvé vyslovená podmínka konvergence je rovnocenná s podmínkou, uvedenou Hahnem. A tak zbývá učinit jen ten krok, totiž dojít k reálným číslům, což se stalo později a k čemu je i v díle Bolzanově pozoruhodný náběh (viz citovanou monografii Kolmanovu str. 52—53).

§ 19. Termín Teil předkládám v tomto paragrafu termínem díl, neboť Bolzanovi jde zřejmě o vztah množiny a podmnožiny. Bolzano, jak již bylo řečeno, užívá termínu Teil pro prvky množiny (souhrnu), avšak v tomto paragrafu také pro ten pojem, který označujeme jako podmnožinu dané množiny, uvažujeme-li o jejich srovnání. Toto terminologické pomísení dvou značně různých pojmů je u Bolzana dost neobvyklé.

§ 20. Tento paragraf obsahuje jeden z velkých Bolzanových objevů, totiž důkaz, že vlastní podmnožina nekonečné množiny může být jí samé ekvivalentní. Je známo, že již Galilei se zabýval otázkou, zda je přirozených čísel „více" než čtverců přirozených čísel, a odpověděl na tuto otázku správně tím, že přiřadil každému přirozenému číslu jeho čtverec. Bolzano se zabývá i touto otázkou v § 33 „Paradoxů". Bolzano však řeší uvedenou otázku mnohem obecněji. Rozvíjí sice celý problém na dvou příkladech, avšak potom jej formuluje tak obecně, že jej můžeme právem považovat za prvního, kdo se tímto problémem obecně zabýval. Základem jeho úvahy je pojem jednojednoznačného přiřazení prvků jedné množiny prvkům druhé množiny, nebo také, jak říkáme, jednojednoznačného zobrazení jedné množiny do druhé. Přiřazení je provedeno tak, že každému prvku množiny M je přiřazen jeden jediný prvek množiny N, a také naopak, každému prvku množiny N je přiřazen jeden jediný prvek množiny M. (srov. též pozn. k § 8).

G. Cantor, vycházeje z toho, že všechny konečné množiny o tomtéž počtu prvků lze na sebe jednoznačně zobrazit, a že tato vlastnost je charakteristická pro počet jejich prvků (konečné kardinální číslo), zobecnil pojem čísla i na množiny o nekonečném počtu prvků tak, že všem nekonečným množinám, jež lze na sebe jednojednoznačně zobrazit, připsal totéž transfinitní kardinální číslo. Množiny o tomtéž kardinálním čísle jsou ekvivalentní, a tedy kardinální číslo (ať již konečné nebo transfinitní) je taková společná vlastnost množin, kterou mají množiny navzájem ekvivalentní. Množina, která není dané množině ekvivalentní, nemůže mít ani její kardinální číslo.

Hlavním výsledkem tohoto paragrafu je Bolzanovo zjištění, že nekonečná množina M může být ekvivalentní své vlastní podmnožině N, tj. takové množině jejíž všechny prvky jsou v M, avšak přitom existují prvky M, které nejsou v N. Taková vlastnost je patrně pro nekonečné množiny charakteristická (není totiž dokázáno, že by mohly být množiny, které by tuto vlastnost neměly a přece by byly podle nějakého spolehlivého kriteria nekonečné) a tedy mohla být vzata za základ pro definici nekonečné množiny. To právě učinil Dedekind (viz poznámku k § 8). V odstavci 1. uvažuje Bolzano o množině veličin mezi 0 a 5, resp. mezi 0 a 12. Interval, v němž jsou obsaženy veličiny označené x resp. y je omezen zdola 0 a shora 5 resp. 12. Tu se však Bolzano nepozastavuje nad tím, že jedna z hranic intervalu je určena „bezpředmětným" pojmem, kdežto druhá „veličinou" v jeho smyslu. (Viz též poznámku k § 6.).

§ 21. Hahn správně podotýká již ve své poznámce k § 19 Paradoxů, že v Bolzanově nauce o nekonečnu je slabým bodem ta okolnost, že autor nikde nestanovil co rozumí rovností (Gleichheit, gleich sein) dvou množin. Bolzano sice říká v § 21 a § 24 „Paradoxů", že dvě množiny je třeba pokládat za rovné, mají-li stejná základní určení; zřejmě jsou míněna stejná pojmová určení. Avšak ani ve W ani v „Paradoxech" není tento nanejvýš důležitý pojem výslovně objasněn. V této okolnosti je nutno vidět důležitý rozdíl, který je mezi pojetím Bolzanovým a Cantorovým. Cantor zavádí všude důsledně ekvivalenci množin (viz předchozí poznámku) a mluví o rovnosti kardinálních čísel. Bolzano považuje často za nerovné i takové množiny, jejichž ekvivalence je zřejmá i bez důkazu. Tuto „nerovnost", kterou můžeme z některých míst jeho textu vyčíst, vyjadřuje také obratem, že dvě množiny (které lze sice navzájem jednoznačně přiřadit) nemusí mít totéž „množství" (Vielheit) svých „částí" čili prvků, a nejsou si tedy v Bolzanově smyslu „rovny" (Viz též pozn. k § 18). Přitom je však velmi zajímavé, že Bolzano si byl dobře vědom symetričnosti vztahu ekvivalence, tedy jednoho ze znaků, které ekvivalenci charakterizují; je to patrno ze slov, uvedených na začátku § 21, kde mluví o vztahu množin, jež jsou na sebe jednoznačně zobrazeny, jako o vztahu „obapolně stejném". Ekvivalence množinová je totiž zřejmě reflexivní (každou množinu je možno jednojednoznačně zobrazit na ni samu), symetrická (je-li M jednojednoznačně zobrazeno na N, je tomu také naopak) a tranzitivní (je-li M jednojednoznačně zobrazitelné na N a N jednojednoznačně zobrazitelné na O, je také M jednojednoznačně zobrazitelné na O). Na těchto vlastnostech právě založil Cantor teorii transfinitních kardinálních čísel.

§ 22. Ve své poznámce k tomuto paragrafu upozorňuje Hahn, že Bolzanovu postupu, jímž se má dojít k zjištění počtu prvků konečné množiny, chybí ještě důkaz, že výsledek (počet prvků) je nezávislý na pořadí v jakém prvky číslujeme. Obtížnější otázky s tím spojené byly již před delší dobou vyřešeny v teorii konečných množin.

§ 24. Ve věci „stejného základního určení" (gleiche Bestimmungsgründe) viz poznámku k § 21.

§ 25. V tomto paragrafu, jako ostatně ještě místy i později, je vědecká práce Bolzanova nešťastně poplatná jeho víře, když připisuje bohu vlastnosti, které jsou v určitých ohledech nekonečné, a proto je diskuse o nich zcela zbytečná. Mnohem zajímavější je celková tendence tohoto paragrafu, totiž snaha nalézt předměty, jejichž některé stránky by nutně vyžadovaly úvah o nekonečných množinách (srov. začátek poznámky k § 13 o modelu). Zejména je zajímavá Bolzanova poznámka o nekonečné množině stavů, jichž nabývá každá „konečná" bytost v nějakém časovém intervalu. Bolzano byl k tomuto pojetí jistě inspirován fyzikou, spíše snad mechanikou samou, v níž je možno stav systému charakterizovat veličinami (tzv. stavovými veličinami) v každém okamžiku. Přírodovědečtí pracovníci a také novopozitivističtí filosofové byli nakloněni již před více léty tomu, chápat i živou bytost jako sled stavů jež do sebe přecházejí (nebo jež na sebe navazují). Je dnes jistě zbytečné poukazovat na omezenost takového pohledu na organismus i na jeho zásadní nedostatečnost. Avšak ze zcela nového hlediska se tento problém objevuje u zařízení, kterými modeluje kybernetika chování živých systémů. Stavy systému tu však bývají předpokládány většinou v konečném počtu (nebo je lze na konečný počet převést). Bolzanova poznámka obsahuje tedy postulát nekonečné množiny stavů, protože jejich nekonečnost nemohl prokázat.

§ 26. Tento paragraf má svoji důležitost z hlediska Bolzanových snah o logické určení nějakého předmětu. § 45 W, na který se autor odvolává, obsahuje velmi rozsáhlou diskusi o tzv. principech logiky, jak přicházely v tradiční logice. Především je příznačné pro Bolzanův pohled na logiku, že jim nechce (a to právem) přiznat název „nejvyšších" nebo „nejobecnějších" zákonů myšlení. To ostatně potvrdil sám další vývoj logiky, k němuž Bolzanovo dílo tolik přispělo, Z obsahu našeho § 26. je patrno především to, že Bolzano nevidí žádný principiální rozdíl mezi určitelností předmětu, vykazujícího po některé stránce nekonečnou množinu, a předmětu, jenž má po nějaké stránce jen konečnou množinu. Za druhé není nijaký principiální rozdíl mezi logickou určitelností předmětu, kterému odpovídá skutečnost a předmětu, který je v jeho smyslu „bezpředmětný". Také je vidět, že Bolzano byl přesvědčen o tom, že určení nekonečného souhrnu předmětů je možné konečným počtem požadavků, které tento předmět vymezují. V tom právě se liší od těch názorů které nechtěly uznat předmět po nějaké stránce nekonečný, protože jeho určení ve smyslu principu sporu by si vyžadovalo nekonečné množiny určujících požadavků. O Bolzanově stanovisku není pochybností jak svědčí příklad uvedený na konci tohoto § 26. Bolzanův přístup k věci odpovídá zcela klasickým názorům matematiky, avšak nelze říci, že by i dnes byla problematika určení předmětu po nějaké stránce nekonečného vyčerpána. Jde tu právě o problém určenosti předmětu ve smyslu zásady o vyloučené třetí možnosti, se kterou patrně Bolzano v tomto paragrafu výslovně počítá. Výzkum tradičních principů logiky, kterým již bylo věnováno mnoho myšlenkové práce počínajíc Aristotelem, je značně obtížný a samy takové principy je nutno chápat jako fixace historicky dosažených výzkumů logických forem a jejich funkce, jak se k nim dospělo ve vývoji společensko-historické praxe lidstva. Mezi tyto principy počítá např. dnes matematika a logika i princip rekurence: je-li výrok V_n platný pro $n = 1$, a platí-li: když V_n pak i V_{n+1}, platí V_n pro všechna n. Tento princip není mezi principy tradiční logiky. Avšak pokud jde o zmíněný princip vyloučené třetí možnosti, který říká, že ze dvou výroků P a P', z nichž druhý je negací prvního, je jeden nepravdivý, je-li druhý pravdivý, ukazují se vážné důvody, aby jeho neomezená platnost byla popřena. Je to právě v těch případech, kdy nějak intervenuje nekonečno. Tato okolnost souvisí s výzkumy novějšího období matematiky, jejichž povahu jsme naznačili v poznámce k § 13.

§ 27. K pojmům, na které se Bolzano odvolává v tomto paragrafu, totiž: názor, pojem, odvoditelnost věty z jiných vět a objektivní vyvození pravdy z jiných pravd doplňuji tolik: (1) názory (Anschaungen) jsou ve smyslu § 72 W I takové představy (viz poznámku k § 2), které reprezentují jeden jediný předmět, tj. v jejichž rozsahu je právě jen jediný předmět. Bolzano dovozuje v citovaném paragrafu W, že jsme oprávněni takové představy předpokládat — např. toto modré. (2) Pojmy jsou u Bolzana takové představy, které nejsou názory a neobsahují žádný názor jako svou součást. Bolzanův příklad: představa něčeho (viz § 73, W I). (3) Pojem odvoditelnosti věty z jiných vět se opírá o Bolzanovo pojetí věty s proměnnými představami, které je blízké dnešnímu pojetí n-místného predikátu. Bolzano chápe větu jako strukturu, do níž jsou zasazeny určité konkrétní představy (v jeho smyslu) a ty činí větu pravdivou nebo nepravdivou. Máme-li např. větu: Praha leží na Vltavě, má tato věta v jeho pojetí strukturu: x leží na y a konkrétní představy Praha resp. Vltava činí tuto větu pravdivou větou. Podobně by mohly učinit i jiné představy onu větu pravdivou, např. představy kniha resp. stůl. Kdybychom za x položili představu Brno, dostaneme větu, která má docela dobrý smysl, je však nepravdivá, ponecháme-li Vltavu jako druhou představu. Bolzano si byl dobře vědom toho, že mohou vložením určitých představ vzniknout věty, jež nemají smysl, tj. takové, že jim nemůžeme připsat ani hodnotu pravdivosti ani nepravdivosti. Po tomto stručném objasnění uvedeme, co znamená, že nějaká věta (věty) je odvoditelná z jiných. K tomu je současně třeba vysvětlit, co jsou slučitelné věty (verträgliche Sätze): „Tvrdíme-li, že určité věty $A, B, C, D, \ldots M, N, O, \ldots$ jsou ve vztahu slučitelnosti a to vzhledem k představám $i, j, \ldots$: pak netvrdíme podle podaného výkladu nic více než to, že existují určité představy, které na místě oněch $i, j, \ldots$ promění všechny ony věty v pravdivé. Zůstalo zcela nerozhodnuto, zda ještě vedle těchto představ, jež učiní věty $A, B, C, D, \ldots M, N, O, \ldots$ vesměs pravdivými, existují ještě nějaké jiné, které by učinily pravdivými ten či onen jejich díl, nikoli však všechny, a když tomu tak je, které z daných vět se dají učinit pravdivými častěji než druhé; dá se však pochopit, že tyto otázky jsou důležité. Mysleme si nejprve na případ, že mezi slučitelnými větami $A, B, C, D, \ldots M, N, O, \ldots$ je takový vztah, že všechny představy, které na místě proměnných $i, j, \ldots$ činí pravdivými věty určitého dílu oněch vět, totiž všechny $A, B, C, D, \ldots$, mají také tu vlastnost, že činí pravdivými i věty určitého jiného dílu oněch vět, totiž $M, N, O, \ldots$ Zvláštní vztah, který si tak myslíme mezi větami $A, B, C, D, \ldots$ na jedné straně a $M, N, O, \ldots$ na druhé straně bude velmi pozoruhodný již z toho důvodu, že nás činí schopnými ihned poznat pravdivost $M, N, O, \ldots$, jakmile jednou víme, že tento vztah platí a že jsme poznali věty $A, B, C, D, \ldots$ jako věty pravdivé. Dáváme tedy vztahu, který je mezi větami $A, B, C, D, \ldots$ na jedné straně a $M, N, O, \ldots$ na druhé straně název odvoditelnosti; a říkám, že věty $M, N, O, \ldots$ jsou odvoditelné z vět $A, B, C, D, \ldots$ vzhledem k proměnlivým částem $i, j, \ldots$ když každý souhrn představ, který na místě $i, j, \ldots$ činí všechny $A, B, C, D, \ldots$ pravdivé, činí též řečené $M, N, O, \ldots$ pravdivé“. (W II § 155). Namísto obratu „být odvodnitelný“ říká Bolzano též, že věty $M, N, O, \ldots$ za uvedených podmínek plynou z vět $A, B, C, D, \ldots$ nebo že z nich mohou být vyvozeny, či ještě jinak, že na ně můžeme uzavírat. Výsledky, které dostal Bolzano logickým rozborem nejobecnějších vztahů mezi soubory vět, jako je právě citovaný výsledek o vztahu odvoditelnosti, patří mezi největší Bolzanovy objevy vůbec a jsou vysoce oceňovány až v naší době.

Mnohem nesnadnější je osvětlit Bolzanův pojem (4) objektivního vyvození nějaké pravdy z jiných pravd. Bolzano se tímto problémem zabývá zejména v § 198 W II a je přesvědčen, že existují pravdy, jež mají společný název důvodu (Grund) a jiné zase, které jsou jejich důsledkem (Folge), takže mezi nimi platí důsledkový vztah (Abfolge). Přes všechnu Bolzanovu snahu se zdá, že se mu nepodařilo plně tento vztah vyjasnit, protože se odvolává na fakt, který lze popsat asi takto: poznáme-li, že v určitém souhrnu jsou nějaké pravdy, můžeme jiné pravdy (či jinou pravdu) s bezpečností nazírat, opíráme-li se o pravdy onoho souhrnu. Jednotlivé pravdy souhrnu jsou pak částečnými důvody oněch vyvozených pravd. Jde-li pak o takový vztah, který platí mezi pravdami o sobě (obdoba vět o sobě -O.Z.-), mluví Bolzano o objektivním vyvození pravdy z jiných pravd. K bližšímu objasnění věci volí Bolzano dva příklady (viz citovaný § W), které však podle mého názoru nijak k vyjasnění věci nepřispívají. Tato část jeho logických zkoumání se zatím nestala nezbytnou částí moderní formální logiky. V § 199 W II pak uvádí obdobnou formulaci vyvození pravdy (pravd) z jiných pravd, jaká je citovaném vymezení vztahu odvoditelnosti vět z jiných vět.

K odstavci 3, tohoto paragrafu je možno poznamenat dvojí: předně je tu myšlenkový pochod důkazu narušen nevědeckým předpokladem „božího působení“ a za druhé je důsledkem Bolzanova objektivně-idealistického názoru, že vidí kriterium neexistence relativně nekonečně velkých časových nebo prostorových intervalů v tom, že by bylo nemožné odvodit kauzálně další stav světa. Moderní matematická fyzika, zabývající se makroobjekty v oblasti naší planety také nepočítá s nekonečně velkými intervaly a silami; pracuje s geometrií, jejíž systém axiómů má též axióm zvaný Archimedův (správněji by mělo být Eudoxův). Ten zní: jsou-li a a b dvě úsečky a platí-li $a < b$, pak existuje vždy (konečné) n tak, že $na > b$. Teorie relativity ovšem ukázala, že pro sčítání rychlostí platí jiná poučka než v klasické fyzice, kde se sčítání opíralo o Euklidovu geometrii. Nejnázorněji se to dá ukázat na známém faktu, že $c + c = c$, kde c značí rychlost světla. V teorii relativity neplatí archimedovský axióm a geometrie, která tento axióm nemá, může pracovat nekonečně malými a nekonečně velkými intervaly.

§ 28. „Počítání s nekonečnem“, jak se Bolzano vyjadřuje, jehož oprávněnost v celém spise dovozoval, uskutečnila až Cantorova nauka o nekonečných množinách a to odkrytím zákonů pro transfinitní kardinální a ordinální čísla.

§ 29. Hahn připojil k tomuto paragrafu kritickou poznámku, jejíž obsah je: Bolzano pokládá veličiny, jež označuje $\overset{o}{N}$, $\overset{n}{N}$ a $\overset{o}{S}$ za různé. Avšak ve smyslu Cantorovy teorie jsou to všechno množiny téhož kardinálního čísla (totiž prvního Cantorova transfinitního kardinálního čísla), neboť všechny tyto množiny jsou spočetně nekonečné. Doplňuji, že z toho také plyne, že nelze uvažovat (jak Bolzano činí) ani o nějakém finitním poměru dvou množin, jejichž kardinální číslo je stejné. I kdybychom dali určitý smysl Bolzanovým výše uvedeným množinám, platilo by zřejmě $\alpha \,.\, \overset{0}{N} = \overset{0}{N}$ a též $\beta \,.\, \overset{0}{N} = \overset{0}{N}$, takže uvedené množiny by neměly poměr $\alpha : \beta$ jak Bolzano udává. Stejně tak, jak říká Hahn, nelze dát dobrý smysl rovnici

$$\text{Mult}\,(8 - 7) = \text{Mult}\,(13-12)$$

jestliže Bolzano neurčil, co se má rozumět rovností dvou množin (viz poznámku k § 21).

§ 30. Také zavedení „nekonečně malých veličin" jako převrácených hodnot nekonečně velkých veličin kritizuje Hahn slovy, že „visí úplně ve vzduchu", neboť nevíme co je dělení nekonečných veličin, jež Bolzano nikde nedefinoval. Zato zaujala Hahna letmá poznámka Bolzanova z pravděpodobností úvahy a podotýká, že „naznačené zavedení nekonečně malých počtem pravděpodobnosti by se snad mohlo ukázat plodným." Můžeme snad doplnit jeho postřeh. Na Bolzanově myšlence je zvlášť zajímavé to, že se dotýká obtížného problému rozdílu mezi libovolně vysokým stupněm pravděpodobnosti nějakého jevu a jeho jistotou (či zase libovolně nízkým stupněm pravděpodobnosti jevů a jeho nemožností). Pravděpodobnost je vždy jen relativní, tj. vůči nějaké skupině objektivně daných podmínek a právě tato okolnost způsobuje těžko překlenutelný rozdíl mezi pravděpodobností a jistotou. Místo Bolzanova příkladu vezmeme jiný, trochu jednodušší: mějme zjistit pravděpodobnost, že nějaké neznámé číslo je 59. Omezíme-li se na prvních 100 čísel, je tato pravděpodobnost 10^{-2}. Kdybychom věděli jen to, že ono číslo je menší než 10^6, bude hledaná pravděpodobnost 10^{-6}. Je patrno, že s rostoucí „nejistotou" polohy čísla klesá pod libovolnou mez příslušná pravděpodobnost, tj. stává se prakticky zanedbatelnou. Není však nikdy nulou, tj. nevyjadřuje jistotu, že číslo 59 se nevyskytne.

§ 32. Bolzanovy úvahy tohoto praragrafu se liší, jak podotýká Hahn, od našeho soudobého pojetí v tom, že Bolzano kritizuje postupy, nesprávně užité ke zdánlivému důkazu hodnoty součtu řady $a - a + a - a + a - \dots$ in inf., z hlediska svého pojetí bezpředmětných výrazů, tedy z hlediska, o němž jsme již v těchto poznámkách mluvili. Z hlediska, které se vypracovalo teprve po Bolzanově době, je třeba lišit řady, jejichž částečné součty (viz poznámku k § 18) $s_1, s_2, s_3, \dots$ se blíží neomezeně určité pevné hodnotě, a řady, které tuto vlastnost nemají. První se nazývají konvergentní, druhé divergentní. Bolzanovo tvrzení v tomto paragrafu, že „řada . . . musí být právě vzhledem k pojmu součtu . . .taková, že nedozná žádné změny své hodnoty — ať provedeme jakoukoli změnu v pořadí jejích členů" není v této obecnosti správné; Bolzano také vyšel z této vlastnosti jen při konečném počtu sčítanců. Pozdější zkoumání řad podmíněně konvergentních ukázala, že taková řada může nabýt přestavením pořadí členů různých hodnot (v určitých případech dokonce libovolné předepsané hodnoty). Ještě by bylo třeba zmínit se o věci, o níž Hahn nehovoří. Bolzano zkoumá na začátku paragrafu řadu $+ a - a + a - a + \dots$ a jeho argumentem proti postupu autora M. R. S. je také tvrzení, že řada v závorce $(+ a - a + a - a + \dots)$ „nemá zřejmě týž počet členů jako ta, která byla poprvé položena $= x$." Toto tvrzení je nesprávné, neboť řada v závorce je totožná s původní řadou, jak se dá snadno ukázat tím, že každý člen původní řady můžeme přiřadit příslušnému členu druhé řady, který je mu roven. Obdobná závada se vyskytuje ještě v pozdějším textu.

K Bolzanovu slovnímu obratu o řadě $+ a - a + a - a \ldots$ in inf., vzniklé dělením a veličinou $1 + 1$, je třeba jen poznamenat, že pro každé $x < 1$ dává $\frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + \ldots$ Tato řada konverguje pokud $x < 1$, pro $x = 1$ řada diverguje a tu se napravo objeví řada, kterou Bolzano zkoumá.

§ 33. Úvahy tohoto paragrafu trpí základní nejasností, o které bylo mluveno v poznámkách k § 21 a § 29.

§ 34. V tomto paragrafu se projevuje určitá obtíž, kterou má Bolzano se zavedením nuly do rovnic pro veličiny. Víme již, že Bolzano považuje 0 za znak pro jeden z „bezpředmětných" objektů, avšak na druhé straně je mu z matematické praxe jasné, že počítání s nulou je nějak nutno stanovit. Rovnice I, II, III a IV představují jak základní věty tak odvozené poučky, podle toho, kterou axiómatickou soustavu aritmetiky vezmeme za základ. Dělení nulou však není přípustné nikdy, tedy ani u rovnic, které jsou ve smyslu Bolzanově „pouhou identitou" jako jím uvedená rovnice $\frac{A}{0} = \frac{A}{0}$, jak opět uvádí Hahn.

Matematik Martin Ohm, narozený 1792, později profesor na berlínské universitě, není ovšem totožný s proslulým fyzikem. Bolzano si vážil jeho díla, které vycházelo v 9 svazcích v létech 1822 — 1852 a měl je ve své soukromé knihovně.

§35, §36. K těmto paragrafům podotýká Hahn, že Bolzanovy názory se zcela kryjí s názory soudobými. V závěru tohoto paragrafu je však možno odkrýt malou nekorektnost, totiž tam, kde mluví o tom, že se „dělení činitelem $(x - a)$, ekvivalentním nule, provádí ve formě, která tuto nulovou hodnotu (Nullwert) zakrývá." Avšak u Bolzana má hodnotu jen veličina, kterou nula není, a tak je možno tento obrat vysvětlit jen tím, že Bolzano byl ujištěn rovnicemi § 34. o tom, že nulu dodatečně jako veličinu přece zavedl.

§ 37. Také Bolzanovy vývody tohoto paragrafu charakterizuje Hahn jako vývody, odpovídající zcela soudobým názorům. Pozastavuje se pouze u obou Bolzanových poznámek pod čarou. K první říká: „Jen je třeba podotknout, že poznámka pod čarou na str. 65 (citovaného německého vydání -O. Z.-), totiž že každá funkce (míněna je ovšem: každá spojitá funkce) má derivaci, nehledí-li se na výjimečné body, se ukázala být mylnou, a tím spíše tvrzení, že každá funkce se dá podle formule na str. 68 (opět citovaného vydání -O. Z.-) . . .rozvinout". K druhé poznámce je třeba připojit, že ji patrně vložil do vydání dr. Příhonský. Psychologicky je těžko vysvětlit první Bolzanovu poznámku. Proti Bolzanovu tvrzení z první poznámky, které se objevuje jak u Bolzanových předchůdců, tak ještě u jeho vrstevníků, se obyčejně uvádí klasický Weierstrassův příklad funkce

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} . b^n . \cos(\pi a^n x),$$ která je spojitá a nemá v žádném bodě reálné osy derivaci.

A přece Bolzano sám sestrojil funkci, která je spojitá, není monotonní v žádném intervalu a nemá derivaci v žádném bodě množiny všude husté (to je množina bodová, která má alespoň jeden bod v jakémkoli částečném intervalu úsečky, na které je definována). Náš vynikající matematik prof. Karel Petr zhodnotil již ve svém „Počtu diferenciálním", Praha 1923, Jednota československých matematiků a fyziků, v odstavci 114., pozn. pod čarou, neobyčejný výkon Bolzanův těmito slovy: „Že již Bolzano — kolem roku 1830 — měl přesné představy o tom, že mohou být funkce spojité v (a, b) a nemající v žádném bodě derivaci, a, že dokonce takovou funkci ve tvaru dosti názorném sestrojil, bylo zjištěno teprve v době nejnovější p. M. Jaškem, profesorem v Plzni, který se podjal úkolu probádati rukopisy pozůstalé po Bolzanovi. Z jeho úspěšné a záslužné práce ... vyplývá zcela jasně, že Bolzano daleko předstihoval svoji dobu v konstrukcích a přesném pojetí pojmů nyní fundamentálních pro mathematickou analysu." V citovaném odstavci sestrojuje prof. Petr na str. 163 — 167 spojitou funkci, nemající derivaci v žádném bodě intervalu (a, b), která se podle jeho slov „pouze v podstatných věcech shoduje s příkladem, nacházejícím se v pozůstalosti Bolzanově." Bolzanova funkce se stala po Jaškově objevu předmětem zkoumání jak našich tak i zahraničních matematiků. Čtenář Paradoxů najde partii z „Functionenlehre" Bolzanovy, kde je jeho funkce popsána, v českém překladě v citované knize A. Kolmana na str. 201 a násl. Před uvedeným místem je o ní hovořeno v textu na str. 68 — 69. Bolzanova „Functionenlehre" vyšla v souborném vydání Spisů Bernarda Bolzana (Král. česká společnost nauk) roku 1930 v Praze, opatřená poznámkami prof. Karla Rychlíka. Je tedy určitou hádankou, proč Bolzano, opřen o svůj vlastní skvělý výsledek, vyvracející větu, kterou sám v poznámce k „Paradoxům" uvádí, změnil svůj názor? Není vyloučeno, že se tak stalo pod vlivem kritiky, kterou na rukopis „Functionenlehre" uplatnil Bolzanův žák A. Slivka ze Slivic, který po prostudování „Functionenlehre" napsal Bolzanovi, že považuje za dokazatelnou větu, že každá spojitá funkce má derivaci všude, s výjimkou izolovaných bodů (srov. článek akademika V. Jarníka „Bernard Bolzano a základy matematické analysy," in: Zdeňku Nejedlému Československá akademie věd, Praha NČSAV, 1953 str. 450 a násl.). Slivkova formulace odpovídá obsahem první Bolzanově poznámce pod čarou. Bolzanův výsledek nemohl Hahn v době vydání „Paradoxů" znát, jinak by byl jeho komentář k tomuto paragrafu musil jistě respektovat tento velký objev.

Velmi pozoruhodný je samotný závěr tohoto paragrafu, v němž je možno podle mého názoru spatřovat vědomé užití teze extenzionality, známé z moderní formální logiky. Tato teze, vyslovená obecně Wittgensteinem, říká, že pravdivostní funkce výroků $p, q, r, \ldots$ je výrok, obsahující tyto výroky a to tak, že jeho pravdivost nebo nepravdivost závisí jenom na pravdivosti či nepravdivosti $p, q, r, \ldots$ Bolzano by podle svých slov byl pokládal rovnici za takovou výrokovou funkci, která má hodnotu „pravdivosti", jsou-li obě strany rovnice co do své pravdivosti ekvivalentní.

Uvádí-li Bolzano v tomto paragrafu, že není třeba uchylovat se k "archimedovskému principu" při řešení úkolů jako je rektifikace, komplanace a kubatura (výpočet délky čáry v nějakých mezích, výpočet obsahu plochy v nějakých mezích a výpočet obsahu tělesa v nějakých mezích) pak tím není míněn Archimedův (Eudoxův) axióm, o němž jsme mluvili v poznámce k § 27. Bolzano uvádí ve svém spise „Die drei Probleme der Rectifikation, der Komplanation und der Cubierung, ohne Betrachtung des unendlich kleinen, ohne die Annahme des Archimedes und ohne iregendeine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestalung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt", Leipzig, Kummer 1817, v odstavci IV tyto domnělé postuláty Archimedovy:

I. Každá zakřivená čára je delší než přímá, jež leží mezi těmitéž koncovými body.
II. Ze dvou křivých čar, vydutých na jednu stranu, je delší ta, která druhou objímá.
III. Má-li zakřivená plocha a rovná plocha totéž ohraničení, je první z nich větší než druhá.
IV. Ze dvou křivých ploch, vydutých na jednu stranu, je větší ta, která druhou objímá.

Bolzano se stavěl kriticky k těmto „postulátům" zřejmě proto, poněvadž operují termíny, které nejsou dost objasněny, jako je „objímání", délka čáry, velikost plochy — které je nutno patrně brát v běžném názorném smyslu. A to Bolzanovi nikdy nestačilo. Tiskovou chybu cit. vydání na str. 68 ř. 5 shora, totiž $\triangle x$, opravuji na $\triangle x^2$.

§ 38. Hahn správně podotýká, že Bolzanova definice kontinua byla Cantorem kritizována jako příliš široká: že podle jeho definice by mohly být i prostorově zcela oddělené předměty (např. dvě koule bez společného bodu) kontinuem. Cantor sám říká o Bolzanově vymezení kontinua toto: „Bolzanova definice kontinua („Paradoxy nekonečna", § 38) není zajisté správná; vyjadřuje jednostranně jen jednu vlastnost kontinua, kterou však splňují i množiny, jež vznikají z G_n (n-rozměrné spojité množiny -O. Z.-) tak, že si od G_n odmyslíme jakoukoli izolovanou množinu bodů; tuto vlastnost splňují také množiny složené z několika izolovaných kontinuí; je zřejmé, že v těchto případech nejde o žádné kontinuum, ač podle Bolzana by tomu tak mělo být." („Math. Annalen," 21, 1883, „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten"). Autor těchto poznámek se domnívá, že to, co Bolzano vymezuje slovy: „kontinuum existuje tam, avšak také jen tam, kde existuje souhrn jednoduchých předmětů (bodů v čase nebo prostoru nebo též jednoduchých substancí), které jsou tak položeny, že každý jednotlivý z nich má v tomto souhrnu souseda a to v každé vzdálenosti, která jen je dostatečně malá" není nic jiného, než neúplná definice husté množiny, tj. množiny, která je schopna uspořádání a neobsahuje žádné přímo sousedící prvky (ve smyslu zvolené nebo možné pořádající relace). Bolzanovu požadavku by krom příkladů, které uvádějí Cantor a Hahn, vyhovovala jistě i množina všech racionálních čísel intervalu (0, 1). Kontinuem může čtenář rozumět v naší souvislosti bodovou množinu všech bodů intervalu (0,1) nebo jakoukoli jinou množinu bodů, která je jejím jednoznačným spojitým zobrazením. Při této příležitosti poznamenávám, že problém kontinua byl v novější a nejnovější době zkoumán také v souvislosti s analysou pojmu křivky vůbec. Ukazuje se, že odpověď na otázku: co je křivka? není nijak jednoduchá.

K Bolzanovu vymezení izolovaného bodu podotýká Hahn, že je „též mnohem širší než dnešní obecně uznané, podle něhož bod nějaké bodové množiny se nazývá izolovaným, existuje-li jeho okolí, v němž neleží již žádný druhý bod množiny.“

Dále vytýká Hahn Bolzanovým výrazům $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \ldots$, že příslušné pojmy nejsou nikde definovány, takže nevíme co jimi máme rozumět.

Bolzanův termín Ausdehnung překládám termínem rozloha.

§ 39. Bolzanova nauka o času a prostoru jako o bližších a nutných určeních (Bestimmungen), jimiž se stanoví vlastnosti substancí, které jim příslušejí v určitém okamžiku a zcela určitém místě, nepopírá ovšem objektivní povahu času a prostoru. Nepopírá ji ovšem ve smyslu objektivně-idealistickém. Nemůžeme však ji přijmout proto, poněvadž reálný čas a reálný prostor je v této Bolzanově nauce redukován na jakési logicky nutné (proměnlivé) znaky, příslušející jednoduchým substancím. Tuto stránku věci vystihují časové a prostorové údaje jistě, jak to známe z fyzikálních disciplín, kde každý proces má nějak zavedený čas a odehrává se v nějaké geometrii. Avšak to vše je možné ne proto, že je to myšlenkově, tj. formálně logicky nutné, nýbrž proto, že čas a prostor jsou formami, v nichž se krom jiného hmotné dění projevuje.

§ 40. Bolzanova narážka na autory, uvažující o prostoru který by neměl tři dimenze, nýbrž třeba jen dvě nebo zase více dimenzí než tři, se dá chápat i ve smyslu kritické filosofie kantovské, a to tak, že apriorní názorová forma by mohla být u jinak organizované bytosti dvojrozměrná, nebo čtyřrozměrná ap., ale může se chápat i ve smyslu předkritických Kantových názorů na prostor, které byly patrně ovlivněny Leibnizem. Ve spise z roku 1747 „Gedanken von der wahren Schätzung der Kräfte“ má Kant v § 10. tato slova: „... proto soudím, že substance existujícího světa, jehož my jsme součástí, mají podstatné síly toho rázu, že ze sebe šíří ve vzájemném spojení účinky v nepřímém poměru čtverce vzdáleností; za druhé, že celek, který z toho vzniká, má vlastnost trojité dimenze na základě tohoto zákona; za třetí, že tento zákon je libovolný, a že bůh by byl mohl místo něj volit nějaký jiný, například v nepřímém poměru třetí mocniny; a že konečně za čtvrté z jiného zákona by vyplývala rozloha jiných vlastností a dimenzí.“ Pokud jde o Herbarta, stačí poznamenat, že nejde o teorii objektivního času a prostoru, nýbrž subjektivně psychologickou teorii, kde např. prostor je chápán jako útvar, sestrojený pomocí asociačních řad, ve smyslu známého asociačního zákona, přirovnávaného co do důležitosti staršími psychology k Newtonovu gravitačnímu zákonu.

K Bolzanově poznámce pod čarou v tomto paragrafu říká Hahn, že definice tří druhů prostorových rozloh je „i když nemůže být pokládána za definitivní — natolik pozoruhodná, že ukazuje, jak daleko pokročil Bolzano ve tvoření svých exaktních pojmů.“ Studium obecných a zvláštních vlastností útvarů, které byly odedávna známy jako křivky, plochy a tělesa z názoru, se rozvinulo v topologii a teorii dimenze zvláště v 20. století a příslušná zkoumání patří k obtížným partiím matematiky.

Bolzano se v tomto paragrafu dotýká ještě jiného obtížného problému, totiž určení „velikosti prostorového předmětu“ nebo „prostorové rozlohy“. Hahn poznamenává, že tento problém byl od té doby opětovně zkoumán různými matematiky jako problém obsahu bodové množiny. Aby čtenář nabyl představy, jaké je východisko úvah, kterými se zabývá obecná teorie obsahu, uvedu fakta, odpozorovaná z názoru, kterým je možno dát podobu axiómů teorie obsahu a míry.

Pozorovaná fakta je možno takto popsat:

1. Obsahem rozumíme číslo nikoli negativní, které je útvaru jednoznačně přiřazeno.
2. Mají-li dva útvary obsah, má obsah také útvar, sestávající ze všech bodů obou útvarů. Je-li jeden z útvarů zcela obsažen ve druhém, má i ten útvar obsah, který vznikne po vynětí prvního útvaru z druhého.

3. Rozložíme-li útvar, mající obsah, na spočetně nekonečně mnoho útvarů majících obsah tak, aby žádná dvojice těchto nových útvarů neměla nic společného, pak je možno postupným skládáním těchto částí získat opět útvary mající obsah, které svojí číselnou hodnotu konvergují k obsahu celého útvaru, děje-li se skládání tak, aby každá část byla vzata jen jednou.

4. Máme-li čtyři útvary mající obsah, a liší-li se obsah prvního dostatečně málo od obsahu druhého a obsah třetího dostatečně málo od obsahu čtvrtého, a nemají-li první a třetí, jakož i druhý a čtvrtý žádný společný bod, má útvar, vzniklý spojením prvního a třetího obsah, který se libovolně málo liší od obsahu útvaru, vzniklého spojením druhého a čtvrtého.

5. Mají-li dva útvary různý obsah a je-li obsah prvního větší než druhého a jsou-li u dvou jiných útvarů, z nichž první nemá žádný společný bod s prvním útvarem prvního páru, jejich obsahy dostatečně málo odlišné, pak je obsah součtu obou prvních členů párů větší než obsah součtu druhých dvou členů obou párů.“ (Srov. E. Tornier, „Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie“, Leipzig-Berlin 1936, § 2).

§ 41. Termín begrenzte Gerade by jistě měl být přeložen termínem úsečka. Ponechal jsem však pro tento termín český název ohraničené (omezené) přímky vzhledem k textovým souvislostem. V textu, z něhož byl překlad pořízen, je v bodě 2. (str. 82 ř. 15 shora) zřejmá tisková chyba: místo *ac* má být *ab*.

Hahn upozorňuje na to, že Bolzano v tomto paragrafu zavedl důležité rozlišení intervalů na uzavřené; otevřené a polouzavřené, které má význam pro mnohá jemnější zkoumání v teorii funkcí. (Interval uzavřený je dán celou bodovou množinou mezi body *a* a *b* včetně těchto bodů, otevřený interval tyto koncové body neobsahuje a polouzavřený interval obsahuje jeden z nich a druhý nikoli.) Dále upozorňuje Hahn na to, že Bolzanovy vývody odst. 4 — 7 postrádají pevného základu, neboť zase není určeno, kdy jsou si dvě množiny rovny. K tomu by bylo možno ještě podotknout tolik, že úvahy tohoto paragrafu představují pokračování a rozvinutí Bolzanovy koncepce obsahu útvaru (rozlohy) a lze v nich najít zárodky úvah, uvedených v předchozí poznámce.

§ 42. Bolzanovi se tu zřejmě směšují dva pojmy, které se liší. Bolzanem citovaná Fischerova věta je správná z hlediska ekvivalence množin. Máme-li dva kruhové oblouky na dvou koncentrických kružnicích, vymezené stejným středovým úhlem, pak je množina bodů na jednom z nich ekvivalentní bodové množině na druhém z nich a to právě na základě přiřazení, které je možno názorně provést poloměry větší z obou kružnic. Takové přiřazení je jednojednoznačné a je zcela obdobné tomu přiřazení, které Bolzano sám provádí v § 20. Oběma množinám na kruhových obloucích přísluší tedy totéž kardinální číslo a stejně tak to platí o jiných útvarech, o nichž mluví Bolzano v dalším textu (které si nemusí být podobné). Avšak tyto kruhové oblouky nemají stejný obsah ve smyslu teorie, která byla zmíněna v poznámce k § 40. Tato druhá okolnost způsobuje, pokud mohu vyrozumět z Bolzanova textu i na jiných místech, že Bolzano nechce přisoudit takovým dvěma množinám tutéž „Vielheit" (množství) a neuznává je tedy za rovné.

§ 43. K tomuto paragrafu podotýká Hahn, že to, „co říká Bolzano o tg $\left(\frac{\pi}{2} \pm n\pi\right)$ je zcela případné. Pro úhly tvaru $\frac{\pi}{2} \pm n\pi$ nejsou totiž ani tangens ani sekans definovány, jsou „bezpředmětné" (Hahn tu užívá úmyslně Bolzanova termínu -O.Z.-). Naproti tomu bychom z hlediska nynější analysy nepřipustili, že sinus a tangens úhlů 0 nebo $\pm n\pi$ mají nějaké výjimečné postavení". Toto poslední souvisí opět s Bolzanovým chápáním nuly jako „bezpředmětného" pojmu, kterému neodpovídá, jak jsme viděli, žádná „veličina".

§ 44. Opravuji v cit. vydání, str. 86. ř. 11 zdola, zřejmou tiskovou chybu $\frac{3}{4}\pi\infty^3$ na $\frac{4}{3}\pi\infty^3$.

§ 46. Hahn připojuje pro snadnější porozumění Bolzanově textu tuto poznámku: „Rovnice $\pi \,.\, pn^2 = \pi \,.\, pr^2 - \pi \,.\, pm^2$ se získá užitím Pythagorovy poučky na pravoúhlý trojúhelník *apm*, v němž $ap = pn$ a $am = pr$. Rovnice

$$mr = \frac{1}{2}\,\frac{dx^2}{a} + \frac{1}{2\,.\,4}\,\frac{dx^4}{a^3} + \dots$$

se získá takto: platí $mr = pr - pm$. Tu je pr poloměr kruhu a a pro pm dostaneme z pravoúhlého trojúhelníka apm, položíme-li $ap = dx$:

$$pm = \sqrt{a^2 - dx^2}.$$

Tedy je:

$$mr = a - \sqrt{a^2 - dx^2} = a\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{a}\right)^2}\right).$$

Rozvineme-li odmocninu podle binomické poučky, dostaneme žádanou rovnici.“ Rozvoj podle binomické poučky, o němž Hahn mluví, se týká obecně rozvoje výrazu $(1 + x)^m$ kde $|x| < 1$ a m je nějaké reálné číslo. Rozvoj má tento tvar:

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots + \binom{m}{k} x^k + \dots$$

v našem případě tedy

$$\left(1 - \left(\frac{dx}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{dx}{a}\right)^2 + \binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{dx}{a}\right)^4 - \binom{\frac{1}{2}}{3}\left(\frac{dx}{a}\right)^6 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{a}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dx}{a}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{dx}{a}\right)^6 - \dots$$

a tento výraz vložíme do pravé strany rovnice pro mr.

Hahn ještě připojuje poučnou poznámku o Galileově „paradoxu“: „Rovnice

$$\pi\,.\,pn^2 - \pi\,.\,pr^2 - \pi\,.\,pm^2$$

vyjadřuje, že kruh o poloměru $ap = pn$ má stejný plošný obsah jako mezikruží mezi kruhy o poloměrech pr a pm. Necháme-li konvergovat ap k 0, stáhne se kruh o poloměru ap do bodu a, mezikruží do obvodu kruhu s poloměrem pr. Tento limitní přechod nás učí jen to, že obě tyto bodové množiny (jedna tvořená bodem a, druhá obvodem kruhu) mají stejný obsah. Avšak to není ani nesprávné ani paradoxní, nýbrž je to triviální, neboť obě mají stejný plošný obsah 0. Zdánlivý paradox vyvstane jen na základě nesprávného pojetí, jako by obsah bodové množiny byl mírou pro množství bodů, jež jsou v ní obsaženy.“

§ 47. V závěru úvahy o cykloidě má Bolzano tento obrat: „Vzhledem k $\omega a < oa$ leží však kruhový oblouk $a\varrho$ uvnitř kruhového oblouku ar . . .“ a tu jde zřejmě o stručné vyjádření vztahu, patrného z názoru, protože nikde není vymezeno, co znamená, že oblouk leží uvnitř jiného oblouku. Formulace připomíná jeden z obratů užitých v uvedených domnělých postulátech archimédovských.

K Bolzanovu důkazu připojuje Hahn poznámku usnadňující porozumění:

„Obecná cykloida je křivka, kterou opisuje bod kruhu, valícího se bez smyku po přímce („základně“). Z této definice plyne ihned... udaná konstrukce bodu *m* cykloidy, neboť dráha *ao*, proběhnutá po přímce, musí být rovna odvinutému oblouku *om* vytvářejícího kruhu. Tvrzení, že mírou úhlu *moa* je poloviční oblouk *om* dokážeme takto: zaveďme označení *q* pro střed vytvářejícího kruhu, jemuž patří oblouk *om*. Trojúhelník *oqm* je rovnoramenný. Tedy poloviční úhel doplňuje úhel *moq* na úhel pravý. A tedy je úhel *moa* rovný polovičnímu úhlu *oqm*. To však je tvrzeno.“

§ 48. Uvádím část Hahnovy poznámky k tomuto paragrafu: „ Důkaz (poznámka pod čarou), že přímka je nejkratší spojnicí dvou bodů, nemůže být uznán za závazný, neboť předpokládá existenci takového nejkratšího spojení, která není nijak samozřejmá, nýbrž by musila být teprve dokázána. Dále se zakládá Bolzanův důkaz na pojmu podobnosti, neboť podobnost spočívá na axiómu o rovnoběžkách, naše věta je však na tomto axiómu nezávislá, a proto platí i v neeuklidovské geometrii, v níž nauka o podobnosti neplatí. Jistě nejlépe založíme tento důkaz na větě, že v každém trojúhelníku je součet dvou stran větší než třetí strana, což se dá bez obtíží dokázat bez axiómu o rovnoběžkách.“

K pojmu podobnosti, jehož Bolzano užil, je třeba dodat, že pro jeho zkoumání základů geometrie byl jedním ze základních pojmů, na nichž se pokusil důsledně vybudovat elementární geometrii již v poměrně mladém věku. Roku 1804 vyšla v Praze jeho práce „Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie (darunter eine Theorie der Parallelen)“, Praha, Barth, od té doby vydaná ještě dvakrát, v níž se pokusil redukovat geometrické pojmy na skupinu určitých nejjednodušších pojmů. Pojem podobnosti má svou významnou úlohu již u Leibnize, jehož myšlenky jsou často s Bolzanovými paralelní. Ovšem Bolzano vymezil pojem podobnosti pro geometrii tak široce, že je těžko na něm (s přibráním dalších) zakládat geometrii. Jeho vymezení zní: „Dva prostorové předměty jsou si podobny, když všechny znaky, které vyplývají ze vzájemného porovnání částí jednoho předmětu jsou u obou předmětů stejné, nebo jestliže při jakémkoli možném vzájemném srovnání částí každého předmětu není možno zjistit různé znaky.“ Abstrahujeme-li vůbec od otázky finitnosti takového postupu, vidíme obtíž zejména v tom, že je těžko ustanovit, co jsou v konkrétních případech „části“ předmětu, jejichž vzájemným srovnáním se mají žádané znaky jako kritéria podobnosti získat. (Srov. i citovanou knihu Kolmanovu a souvislý výklad, který tento spis má o těchto Bolzanových snahách zvláště na str. 40 — 43.) Dále říká Hahn ve své poznámce toto: „Tvrzení, že těleso, jehož dvojice bodů mají vzdálenost $\leqq E$, leží zcela v kouli o průměru E spočívá na přehlédnutí, jak ukazuje např. rovnostranný trojúhelník o straně E. Má být poloměr a ne průměr.

Logaritmická spirála je čára, jejíž rovnice v polárních souřadnicích zní $\log r = a \cdot \varphi$. Jako přirozená spirála je označována zejména tato: $\log r = \varphi$, kde log označuje přirozený logaritmus. Pro délku „větve ubíhající od poloměru $r = 1$ ke středu“ dostaneme podle formule integrálního počtu

$$\int_0^1 \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\, dr = \int_0^1 \sqrt{2}\, dr = \sqrt{2}.$$

Křivka $yx^2 = a^3$ se nazývá hyperbola vyššího řádu, neboť její rovnice je podobná rovnici $yx = c$ (rovnostranné) hyperboly. Pro plošný obsah té části plochy, „která od $x = a$ přísluší všem vyšším hodnotám x“, vychází podle známé formule integrálního počtu

$$\int_a^\infty y dx = \int_a^\infty \frac{a^3}{x^2}\, dx = a^2$$

Rovnice (předposlední tohoto paragrafu -O.Z.-) dává podle téže formule:

$$\int_{a-\sqrt{2}}^{a} y dx = \int_{a-\sqrt{2}}^{a} \frac{a^3}{x^2}\, dx = a^3\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a - \sqrt{2}}\right) = \frac{a^3}{a - \sqrt{2}} - a^2.\text{“}$$

§ 49. Hahn píše ve své poznámce k tomuto paragrafu, že „vývody tohoto paragrafu trpí závadou již opětovně vyslovenou, že totiž nejsou podloženy žádnou přesnou definicí pojmů „rovný“ a „větší“ pro nekonečná množství (Vielheiten -O.Z.-). Ve smyslu nauky o množinách má jistě množina všech bodů úsečky větší mohutnost než bodová množina konstruovaná v 1. (ačkoli Bolzanova argumentace to naprosto nestačí zdůvodnit). Naproti tomu má množina všech bodů úsečky tutéž mohutnost, ať k ní připojíme její koncové body nebo ne. Má dále tutéž mohutnost jako množina všech bodů (oboustranně nekonečné) přímky, ba dokonce jako množina všech bodů roviny nebo celého prostoru“. Tyto výsledky, o nichž mluví Hahn, jsou již klasickými výsledky Cantorovými.

Proto postrádají pevného významu také výrazy pro množiny, které Bolzano uvádí v dalších odstavcích tohoto paragrafu, jako např. výraz pro množinu bodů v kvádru (odst. 7).

§ 50. V tomto paragrafu, který přináší tak hodnotné myšlenky, jež bychom musili i dnes plně uznat, trpí argumentace někdy tím, že Bolzano se odvolává na „rozumové pravdy“ jako na něco mimozkušenostního. V těchto poznámkách jsme již měli příležitost dotknout se tohoto Bolzanova způsobu argumentace (viz pozn. k § 14). Tak si musíme zvláště cenit na Bolzanových názorech toho, že substance v jeho slova smyslu jsou proměnlivé, a to neustále. Z odst. 3. je vidět, že nepovažuje onu změnu za pouhé přemístění neproměnných částic, kterým by vlastně vznikaly jen zdánlivě nové útvary (příslušným novým spojením neproměnných částic), nýbrž že přisuzuje také elementárním substancím změny vnitřní, tedy podstatné. Tím se pozoruhodně odlišuje od pojetí mechanického materialismu, které zastával mnoho let po něm i tak velký fyzik, jako byl Clark Maxwell. Bolzano také proti pojetí mechanického materialismu přímo vystupuje v § 51. Další Bolzanův rys, o němž jsme již zde také hovořili, totiž jeho antipsychologismus, se tu opět zdravě projevuje, zejména v obhajobě objektivní existence předmětů, které mohou existovat, aniž by byly vnímány.

§ 51. Bolzano, jak patrno, nechce omezit „síly", které se projevují vzájemnými účinky substancí, na sílu setrvačnou. Poněkud nejasná formulace druhé věty tohoto paragrafu souvisí s teologickými vlivy, které někdy Bolzanovy koncepce neblaze ovlivňují. Tvořivou sílu, kterou Bolzano staví stranou, přisuzuje jenom bohu. Druhá část tohoto paragrafu je dosud poučná náznakem metody postupné aproximace skutečnosti, kterou si zpočátku zjednodušíme a stále zpřesňujeme, aniž by ovšem již první zjednodušení mělo rysy odporující skutečnosti.

§ 53. Actio in distans je jednou z nesprávných Bolzanových myšlenek, které fyzika nemůže přijmout. Ve smyslu speciální Einsteinovy teorie relativity nastoupil „na místo okamžitého účinku do dálky, resp. účinku na dálku s nekonečnou rychlostí šíření účinek na dálku s rychlostí světelnou. To souvisí s principiální úlohou, kterou má v této teorii rychlost *c* (světla -O.Z.-)". (Albert Einstein, „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie", 12. vyd., Sammlung Vieweg 1921, str. 33.) Avšak ani v obecné teorii relativity neplatí actio in distans.

Závěr tohoto paragrafu obsahuje argumentaci, která prozrazuje Bolzanův idealismus. Z toho, že velikost vzájemného působení by byla neurčitelná (rozumová pravda), by měla vyplývat nemožnost koexistence dvou substancí v témž místě. Upozorňuji na tento typ argumentace, protože u Bolzana není ojedinělý.

§ 54. Závěr tohoto paragrafu vyslovuje myšlenku jednoduchosti koncepce, pro kterou by měl být Bolzanův názor lepší. Toto je způsob argumentace (i když u Bolzana nepřichází skoro vůbec), který se velice ujal v novopozitivismu, i když má různé formy. Nejde o adekvátní obraz objektivní reality, nýbrž o nejjednodušší někdy také „nejekonomičtější" obraz světa. Subjektivismus, který se tím vnáší do poznání, není již dnes třeba vyvracet.

§ 56. Přes všechnu snahu se nemůže Bolzanovi, jak čtenář jistě cítí, zdařit uspokojivé řešení vztahu samostatné duchovní a hmotné substance. Víme, že to také jeho cestou není možné, protože samostatná duchovní substance neexistuje. Bolzanova vědecká snaha se alespoň projevuje v myšlence o důležitosti studia tohoto vztahu „zprostředkujícími substancemi", totiž organismem.

§ 57. Bolzanova polemika proti „konstruktérům" vesmíru z pouhých sil bez substancí neztrácí dosud svůj význam a je dokonce velmi aktuální všude tam, kde filosofové nebo filosofující přírodovědci obcházeli existenci hmoty tím, že uvažovali jen o jejích projevech, jako jsou síly, energie apod. Historickým příkladem tu může být Ostwaldův energetismus, ale i mnohé falešné výklady teorie relativity či atomové fyziky.

§ 58. V tomto paragrafu jde Bolzano — věren své myšlence aktuálního nekonečna — přímo proti scholastickému principu, který bychom dnes mohli označit jako princip maxima. Jeho kořeny jdou až k Aristotelovi a Platonovi. Tomášem Aquinským byl vysloven takto: „in quibuscunque est invenire magis et minus, est invenire maximum, cum non sit procedere in infinitum" — ve všem, kde nalezneme více nebo méně, musíme nalézt maximum, abychom nepokračovali do nekonečna. Tento princip ve spojení se scholasticky pojatým principem kauzality dovolil scholastikům podat jeden (nesprávný ovšem) důkaz boží existence. Bolzano musil tento důkaz i onen thomistický „axióm" jistě znát ze svých teologických studií. Zde se tohoto axiómu výslovně zříká. Pozoruhodná je v tomto paragrafu myšlenka stupňů vývoje, jejíž vyslovení bylo v jeho době a v jeho prostředí velmi vzácné.

§ 63. Stupeň vnímavosti, přisuzovaný Bolzanem jednotlivým substancím podle jejich umístění v hierarchii stupňů síly, je jistě pozoruhodnou myšlenkou, která nabývá velmi závažného vědeckého obsahu v marxistické teorii odrazu. Bolzanovy koncepce substancí s těmi vlastnostmi, o nichž v těchto paragrafech hovoří, jsou patrně vybudovány z podnětů Leibnizovy Monadologie, i když se s Leibnizovými monadami nekryjí. Bolzano odmítá prázdná místa ve světovém prostoru, místa bez jakékoli hmoty, a celkem v duchu představ, které měli zejména francouzští fyzikové počátku 19. století, zavádí (jako Fresnel nebo jako Fourier) éter, vyplňující prostor mezi substancemi (ovšem i tento éter je u Bolzana atomizován). V tomto paragrafu je také naznačen pokus o vyvození gravitačního zákona z obecných úvah o vlastnostech substancí. Všeobecně by bylo možno poznamenat nejen k tomuto paragrafu nýbrž i k předchozím, počínajíc § 50. až do konce spisu, že jednotlivé vědy nemohly ještě v době práce na tomto spise (a tím spíše předtím) přinést autorovi tolik odkrytých přírodních zákonů, které jsou podloženy seriózním studiem objektivní reality, aby se nemusil tolik utíkat ke spekulaci. Syntézy, které se opíraly o značné množství spekulací, byly proto své doby jednou z funkcí filosofií 18. století (dokonce i dřívějších století, srov. Descartes) a přešly zčásti i do 19. století. Bolzano se proto také pokusil o jednotnou syntézu všeho vesmírového dění a záleželo mu ovšem na tom, aby z jednoduchých předpokladů o substancích a jejich vlastnostech vyplynul i zákon tak závažný, jako je gravitační zákon Newtonův. Není snad třeba podotýkat, že takové vyvození je při značně nejasných a značně libovolných vlastnostech substancí a éteru pouze zdánlivé. Nicméně ani takové pokusy, z nichž nejznámější je pokus Le Sageův (1724 až 1803) podaný ve spise Lucrèce Newtonien (1782) na základě představ o vzájemných srážkách atomů, nebyly bez užitku pro vývoj myšlení, které si v nich formulovalo problém, zmocnit se již vědečtěji celého vesmíru jako systému.

Bolzana v tomto paragrafu zřejmě zajímal i problém, jak vysvětlit, že „. . . látky . . . jsou si přece ve své váze veskrze rovny, tj. že jejich váhy se mají k sobě jako jejich masy". Bolzanův výklad určení váhy tělesa éterem byl jistě v jeho době plauzibilní, o to tolik nejde. Spíše je zajímavé, že na konci života Bolzana tento hluboký problém vůbec zaujal. Jak známo, řešila tento problém rovnosti tíhové a setrvačné hmoty, který se za Bolzanovou otázkou skrývá, až teorie relativity.

§ 66. Problém hranic hmotného tělesa vyřešil Bolzano spekulativně vskutku pozoruhodně. Je možno říci, že teprve mnohem později, do značné míry až v našem století, ukázala fyzika, jak složitý proces se odehrává na plochách, ohraničujících v hrubém názoru nějaký hmotný předmět, a jak je na těchto plochách těleso neustále v interakci se svým okolím. Jde tu např. o povrchy kapalin ale i tuhých látek.

§ 69: v cit. vydání str. 128, ř. 3 zdola, opravuji „jener" na „jeder".

§ 70. K tomuto paragrafu připojuje Hahn tuto poznámku: „Způsob, jak Bolzano pojednává o prvním z uvedených paradoxů, není jistě zcela uspokojivý. Můžeme jej spíše pokládat za jeden z četných dnes nám známých příkladů nedovoleného limitního přechodu. Naproti tomu je Bolzanovo vysvětlení druhého paradoxu zcela případné. Dobu pádu po tětivě dostaneme touto úvahou: zrychlení na nakloněné rovině odchýlené od horizontály o úhel α je $g \,.\, \sin \alpha$, tedy souvislost mezi drahou s a dobou pádu t je

$$s = \frac{g \,.\, \sin\alpha \,.\, t^2}{2} \,.$$

Avšak dráha s je tětivou kruhu o poloměru r, příslušnou ke středovému úhlu 2α, takže

$$s = 2r \,.\, \sin \alpha$$

Z toho plyne: $t = 2 . \sqrt{\dfrac{r}{g}}$

nikoli jak píše Bolzano $\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{r}{g}}$."