I.

HALTUNG BEI LINIEN

§ 20.

Was wir bisher über die Haltung gesagt, gilt gleicherweise wie von der Haltung, die sich bei Linien, so auch von jener, die sich bei Flächen findet; und nur bei diesen zwei Klassen der Ausdehnung läßt sich (nach § 14) von einer Haltung sprechen. Um nun die größte Mannigfaltigkeit, welche diese Beschaffenheit in den verschiedenen Arten von Linien und Flächen darbeut, näher kennen zu lernen, ist's nöthig diese Arten der Ausdehnung gesondert in Betrachtung zu ziehen; und es ist begreiflich, daß wir das Einfachere, also die Linien, dem Zusammengesetzteren, d. i. den Flächen, vorausschicken müssen. Den Anfang müssen wir mit der einfachsten aller Linien, mit der geraden machen. Hier nun zeigt sich sogleich, daß die Haltung einer Geraden in allen ihren inneren Puncten*) die nämliche ist, ja daß sogar verschiedene Gerade, wenn sie einander nur gleichlaufend, in allen ihren inneren Puncten dieselbe Haltung haben. Denn ist m (Fig. 3) irgend ein innerer Punct der Geraden ab, und bezeichnet RS eine wo immer gegebene Richtung, die nur das Eigene hat, daß sie der ab gleichlauft, und daß wir sie als etwas Gegebenes betrachten dürfen: so wird es uns möglich seyn, die Haltung der ab im Puncte m nach einer aus bloßen Begriffen zusammengesetzten Regel aus der gegebenen Richtung RS zu bestimmen in einer Weise, die für jeden andern Punct der Linie, wenn er nur auch ein innerer ist, die nämliche bleibt. Diese Regel lautet, daß m für jede hinlänglich kleine Entfernung zwei Nachbarn habe, deren Einer in der aus m ausgehenden mit RS gleichlaufenden, der andere in der entgegengesetzten Richtung genommen wird. Denn weil durch diese Regel die Nachbarn selbst, die m — wenigstens für alle hinlänglich kleine Entfernungen — hat, völlig bestimmt werden: so ist nach § 17 kein Zweifel, daß diese Regel auch die Haltung der Linie in diesem Puncte völlig bestimmt. Weil ferner diese Art der Bestimmung für alle inneren Puncte der Linie dieselbe ist, indem für sie alle die nämliche durch Anschauung gegebene Richtung RS, und die nämliche Begriffsregel gilt, die wir

*) Innere Puncte einer Linie nenne ich solche, die für jede hinlänglich kleine Entfernung zwei oder mehr Nachbarn haben; dagegen ich solche Puncte, die für die kleinsten Entfernungen nur einen einzigen Nachbar haben, Grenzpuncte heiße.

nur einmal auf diesen, einmal auf jenen Punct anwenden: so ist die Haltung der Linie in allen diesen Puncten nicht eine nur ähnliche oder nur geometrischgleiche oder nur congruible, sondern die nämliche zu nennen (§ 19). Wenn endlich zwei Gerade *ab* und *cd* einander gleichlaufen; so leuchtet ein, daß eben dieselbe Richtung *RS* und eben dieselbe Begriffsregel, die zur Bestimmung der Nachbarn eines in *ab* gelegenen Punctes hinreicht, auch in *cd* zu gleichem Zwecke zulangt. Die Haltung der *ab* ist also auch die Haltung der *cd* in allen inneren Puncten.

§ 21.

Eine Gerade, die unbegrenzt ist, hat also in all ihren Puncten die nämliche Haltung; denn all ihre Puncte sind innere: allein auch umgekehrt, wenn eine Linie in all ihren Puncten die nämliche Haltung hat, so ist sie eine unbegrenzte Gerade. Denn soll die Haltung in allen Puncten die nämliche seyn, so muß es möglich seyn, aus denselben durch Anchauung gegebenen Stücken vermittelst derselben Begriffsregel die Nachbarn zu bestimmen, die jeder ihrer Puncte für jede hinlänglich kleine Entfernung besitzt. Dazu wird offenbar erfordert, daß wir die Richtungen, in welchen diese Nachbarn liegen, bestimmen können. Da aber jede Richtung, die einer andern nichtgleichlaufend ist, gewiß nur durch eine andere Regel als diese bestimmt wird: so muß unsere Linie die Eigenschaft haben, daß jeder ihrer Puncte für jede hinlänglich kleine Entfernung nur lauter solche Nachbarn besitzt, welche gewissen gegebenen Richtungen (die für alle Puncte die nämlichen sind) gleichlaufen. Es ist leicht darzuthun, daß diese Eigenschaft nur bei der Geraden, und zwar der unbegrenzten Geraden sich findet, wo jeder Punct zwei in entgegengesetzten Richtungen liegende Nachbarn besitzt. Ohne Schwierigkeit wird man auch noch die Wahrheit folgender Sätze einsehen. Jede Haltung, die von der Art ist, daß sie in allen inneren Puncten eines, sey es auch noch so kleinen Linienstücks unverändert statt finden kann, bestehet nur eben darin, daß jeder Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung zwei Nachbarn hat, die in entgegengesetzten Richtungen liegen. Wenn zwei Gerade einander nicht gleichlaufen, so ist die Haltung der einen in allen inneren Puncten verschieden von jener der andern; aber es sind doch beide Haltungen einander ähnlich, ja geometrischgleich, sogar congruibel zu nennen (§ 19). Im Grenzpuncte einer Geraden herrscht eine andere Haltung als in den inneren Puncten derselben; denn hier gibt es für jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn zwei, dort einen einzigen.

§ 22.

Aus dem, was schon § 9 von allen bestimmbaren Raumdingen angemerkt worden ist, ergibt sich fast unmittelbar, daß alle auf einer Größe beruhenden Beschaffenheiten solcher Raumdinge sich in dieser Größe — höchstens mit Ausnahme gewisser, in endlicher oder unendlicher Menge, jederzeit aber isolirt vorkommender Fälle — nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern. Aus dieser allgemeinen Wahrheit nun läßt sich mit ziemlicher Leichtigkeit hinsichtlich auf Linien Folgendes darthun:

1. Alle gemeinen Puncte einer Linie — d. h. nach § 8 alle diejenigen, die nach der Beschaffenheit, die wir jetzt eben von ihnen aussagen wollen, in einer solchen Menge vorhanden sind, daß ihr Inbegriff für sich allein schon eine Linie bildet — haben, wie m (Fig. 4 u. 5), für jede hinlänglich kleine Entfernung zwei Nachbarn r und s, liegend in Richtungen mr und ms, welche den zwei unveränderlichen und einander entgegengesetzten mP und $m\Sigma$ so nahe, als man will, rücken, wenn man nur die Entfernungen $mr = ms$ selbst so klein macht, als man will.*) Denken wir uns ein Paar in den unveränderlichen Richtungen mP und $m\Sigma$ liegende Geraden, die m zu ihrem gemeinschaftlichen Grenzpuncte haben: so wird sich, in Benützung des § 11 erklärten Begriffs des Anschmiegens, behaupten lassen, daß jene Geraden oder auch die aus ihrer Verbindung entstehende unbegrenzte $P\Sigma$ der gegebenen Linie unter allen möglichen andern Geraden um den Punct m herum am nächsten komme oder sich ihr anschmiege. Für jeden gemeinen Punct einer Linie gibt es sonach eine in diesem Puncte sich an die Linie schmiegende Gerade.

2. Bei allen Puncten der Linie, die eine Ausnahme von dem Gesagten machen, kann immer nur einer von folgenden drei Fällen statt haben:

a) Der Punct hat, etwa wie a oder b (Fig. 6) für jede hinlänglich kleine Entfernung nur einen einzigen Nachbar r, liegend in einer Richtung aR oder bR, welche der unveränderlichen aP oder bP so nahe, als man will, rückt, wenn man nur die Entfernung ar oder br so klein macht, als man will. Dieß heißt nach § 16: auch für einen Grenzpunct gibt es, jedoch nur eine einzige aus ihm ausgehende Gerade, welche sich an die Linie in diesem Puncte anschmiegt.

b) Der Punct hat, etwa wie c (Fig. 7), für jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn zwei, liegend in Richtungen cR und cS,

*) Der Fall, wenn r und s, wie Fig. 4 annimmt, in mP und $m\Sigma$ selbst liegen, ist unter diesem allgemeinen als ein besonderer begriffen.

welche zwei unveränderlichen und einen Winkel bildenden Richtungen cP, $c\Sigma$ so nahe, als man will, rücken, macht man nur die Entfernungen $cr = cs$ so klein, als man will. Dieß heißt mit anderen Worten: in einem Puncte, wie c, gibt es zwei aus demselben ausgehende einander nicht entgegengesetzte, sondern einen Winkel bildende Geraden, deren jede sich einem Theile der gegebenen Linie anschmiegt. Ich nenne jede Linie, die keine anderen außerordentlichen Puncte als höchstens von diesen zwei Arten hat, wenn also jeder Punct in seiner nächsten Umgebung nicht mehr als zwei Nachbarn hat, eine einfache Linie; und wenn sie einen oder zwei Grenzpuncte hat, ein einfaches Linienstück oder einen einfachen Zweig oder Bogen.

c) Der Punct hat endlich, wie d (Fig. 8), auch für die kleinsten Entfernungen der Nachbarn mehr als zwei. Hier liegt nun jeder dieser Nachbarn in einem eigenen Zweige, dem auch der Punct d angehört, und liegt darin so, daß die aus d gezogene Richtung einer unveränderlichen gleichfalls aus d ausgehenden so nahe, als man will, rückt, wenn man nur seine Entfernung so klein nimmt, als man will. Mit anderen Worten: es gibt der aus dem Puncte d ausgehenden Geraden, deren jede sich einem eigenen Zweige anschmiegt, höchstens so viele als dieser Zweige selbst.[79])

§ 23.

Sonach gilt — wenn wir das eben Gesagte zusammenfassen — von einem jeden (gewöhnlichen oder außerordentlichen) Puncte einer bestimmbaren Linie, daß es eine, zwei oder mehrere (allenfalls selbst unendlich viele) aus diesem Puncte ausgehende Richtungen gebe, von deren jeder gesagt werden kann, daß eine in ihnen liegende aus diesem Puncte ausgehende Gerade sich an einen der verschiedenen Zweige der Linie, die hier zusammenstoßen, anschmiegt. Ist das Anschmiegen einer solchen Geraden an ihren Zweig ein so inniges, daß es eine Entfernung gibt klein genug, um von ihr und allen kleineren sagen zu können, daß die Nachbarn in der Geraden und in dem Zweige zusammenfallen: dann erhellt unmittelbar aus § 17, daß wir durch Angabe dieser Geraden oder der Richtung, in der sie liegt, die ganze Haltung des Zweiges in dem besprochenen Puncte selbst bestimmen. Denn wir bestimmen ja in einem solchen Falle durch unsre Angabe die Nachbarn selbst, welche der Zweig in der nächsten Umgebung dieses Punctes hat. Allein auch in jedem anderen Falle bestimmen wir durch die Angabe jener Richtung oder Geraden die Haltung der Linie obgleich nicht vollständig, doch einigermaßen. Nicht vollständig; weil es noch mehrere, ja unendlich viele Linien $MA, MA', \ldots$ (Fig. 9) geben kann, welche, obwohl die Richtungen MR, MS das eben geforderte Verhältniß zu ihnen allen haben, dennoch in diesem Puncte eine verschiedene Haltung besitzen. Dieß wird erweislich der Fall seyn, wenn $MA, MA', \ldots$ Kreisbögen von ungleichen Halbmessern $CM, C'M, \ldots$ sind, die alle senkrecht auf den in derselben Ebene mit den Kreisbögen liegenden Richtungen MR, MS stehen. Denn daß diese Kreisbögen eine, wenn gleich ähnliche, doch verschiedene, namentlich sogar geometrischungleiche Haltung haben, gibt sich dadurch zu erkennen, daß schon durch bloße Vergleichung mit einem gegebenen Maße ein Unterschied in dem Verhältnisse ihrer Nachbarn zu M sich herausstellt. Daß aber jene Angabe die Haltung der Linie in dem gegebenen Puncte doch einigermaßen bestimmt, entscheidet sich daraus, weil doch nicht alle Linien, die den Punct M gemein haben, mit was immer für aus M gezogenen Geraden in dem geforderten Verhältnisse des Anschmiegens stehen. Wir betrachten also gewiß nicht mit Unrecht die Angabe einer Richtung aus einem Puncte, die so geartet ist, daß sich die in ihr liegende Gerade an dem aus eben diesem Puncte ausgehenden Zweig einer Linie anschmiegt, als die Angabe einer besondern Beschaffenheit der Linie selbst, oder näher noch ihrer in diesem Puncte obwaltenden Haltung. Ich erlaube mir deshalb diese Beschaffenheit die Richtung der Linie in diesem Puncte zu nennen; und verstehe sonach unter Richtung diejenige Beschaffenheit einer Linie in einem gegebenen Puncte, welche der nächste Grund davon ist, daß es gerade diese und nicht eine andere aus diesem Puncte ausgehende Richtung ist, in welcher eine Gerade gelegen seyn muß, um sich an den aus diesem Puncte ausgehenden Zweig der Linie anschmiegen zu können. Hiebei besorge ich nicht, daß man die Bedeutung, die ich dem Worte Richtung so ertheile, verwechseln werde mit jener andern, in der ich von jedem einzelnen Puncte sage, daß von ihm Richtungen ausgehen können. Denn schon der bloße Umstand, daß ich die Richtung im obigen Sinne nicht einem einzelnen Puncte, sondern einer Linie (in einem Puncte derselben) beilege, beugt jeder Verwechslung dieser Begriffe vor; wie denn der bisherige Sprachgebrauch dem Worte Richtung diese beiden Bedeutungen ohnehin schon zugetheilt hat.

§ 24.

Aus diesem Begriffe der Richtung einer Linie in einem Puncte ergeben sich sofort mehrere Folgerungen, die wir zusammenfassen wollen:

1. Da wir uns unter der Richtung einer Linie in einem Puncte so gar nichts Anderes denken, als etwas, das uns erklären soll, warum

es gerade diese und keine andere aus diesem Puncte ausgehende Richtung ist, in welcher eine sich an die Linie schmiegende Gerade liegen muß: so erhellet, daß wir, so lange diese Gerade, und somit auch die aus dem Puncte ausgehende Richtung, in der sie liegt, dieselbe verbleibt, auch die Richtung der Linie nicht als eine geänderte ansehen dürfen. Die aus dem Puncte ausgehende Richtung kann uns somit allemal zur Bestimmung der in diesem Puncte statt findenden Richtung der Linie dienen.

2. Jede Linie hat in jedem ihrer Puncte wenigstens eine Richtung, nämlich sofern wir jeden Punct als den Grenzpunct wenigstens eines einfachen Linienstückes betrachten können; sie kann aber auch in einem Puncte mehrere Richtungen haben, wenn sich derselbe als Grenzpunct mehrerer Zweige ansehen läßt.

3. Die Richtung einer Linie in irgend einem ihrer Puncte ist etwas, das sich durch keine bloßen Begriffe, sondern nur durch Beziehung auf eine gegebene Anschauung bestimmen läßt; denn es bedarf der Angabe einer aus einem einzelnen Puncte ausgehenden Richtung.

4. Doch ist hinzu keine Angabe einer Entfernung nothwendig. Daher sind alle Richtungen einander nicht nur ähnlich, sondern auch geometrisch gleich und congruibel.

5. Richtungen einer Linie, welche bestimmt werden durch Richtungen aus einem Puncte, die gleichlaufend oder entgegengesetzt sind, sind im ersten Falle einerlei, im zweiten entgegengesetzt.

6. In jedem gemeinen Puncte einer Linie bestehen zwei einander entgegengesetzte Richtungen derselben.

7. Die unbegrenzte Gerade hat in allen ihren Puncten die nämlichen zwei Richtungen, welche einander entgegengesetzt sind; die begrenzte aber in jedem ihrer zwei Grenzpuncte eine, die der an dem anderen entgegengesetzt ist.

§ 25.

Wenn man die eine oder die mehreren Richtungen einer Linie in einem gegebenen Puncte zu bestimmen verlangt; so wird dieß nach § 24 geschehen, wenn man die eine oder die mehreren aus diesem Puncte ausgehenden Richtungen angibt, die so geartet sind, daß die in ihnen liegenden Geraden sich an die einzelnen einfachen Zweige der Linie, die der gegebene Punct begrenzet, anschmiegen. Daß wir dieß nur vermögen, wenn uns der Punct m der Linie, etwa durch seine drei rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z, wie auch die Gleichungen, die wenigstens in der nächsten Umgebung dieses Punctes für die Linie gelten sollen, vorgelegt sind, verstehet sich von selbst. Aus diesen Gleichungen muß sich entnehmen lassen, ob der Punct für die kleinsten Entfernungen nur einen oder mehrere Nachbarn habe, und im letzteren Falle, welche derselben zu je einem Zweige gehören. Haben wir diese gefunden, so handelt es sich noch darum, zu jedem einzelnen Zweige die aus m ausgehende Gerade zu bestimmen, welche ihm näher als jede andere kömmt. Diese Gerade bestimmen wir wieder am bequemsten durch ihre drei Coordinaten

$$\xi, \eta, \zeta$$

auf denselben Axen mit den

$$x, y, z,$$

wenn wir zu dem Puncte m noch einen in dem Zweige gelegenen n hinzunehmen, dessen Coordinaten durch

$$x + \Delta x, \ y + \Delta y, \ z + \Delta z$$

vorgestellt werden mögen, wobei wir also wissen, daß wenigstens eine der drei Größen

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z$$

für jede auch noch so kleine Entfernung des n von m nicht $= 0$ werden kann. Sey dieß die Δx, so bildet die Projection der Richtung mn auf die Ebene der xy mit der Axe der x einen Winkel α, für den

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

und ihre Projection auf xz mit derselben Axe der x einen Winkel β, für den

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Gibt es nun einen Werth von Δx klein genug, daß für diesen und alle kleineren die Quotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \ \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

constant sind: so ist offenbar der in Rede stehende Zweig in der Nähe von m gerade, und seine Richtung in m ist mit der Richtung mn dieselbe und somit schon gefunden. Aber auch wenn dieses nicht ist, kann nur einer von folgenden zwei Fällen eintreten: entweder einer dieser Quotienten wächst bei Verminderung von Δx in das Unendliche, oder die Gleichungen für die Linie müssen von solcher Beschaffenheit seyn, daß sich durch das bekannte Verfahren des so genannten Differenzirens zwei Größen von der Form

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{dz}{dx}$$

aus ihnen ableiten lassen, denen die obigen zwei Quotienten in das Unendliche nahen. Im ersten Fall wird die Gerade, deren Lage wir suchen, mit der Axe der y oder der z gleichlaufen, jenachdem es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ oder } \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

ist, das ins Unendliche wächst. Im zweiten Falle müssen wir unsre Gerade so stellen, daß ihre Projectionen auf xy und xz mit der Axe der x die Winkel α und β bilden, welche die Gleichungen

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \operatorname{tang} \beta = \frac{\partial z}{\partial x}$$

angeben, soll die Gerade dem Zweige so nahe als möglich kommen. Die Gleichungen für diese Gerade werden somit seyn:

$$\eta = y + (\xi - x)\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \zeta = z + (\xi - x)\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{1}$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{2}$$

Da wir nun umgekehrt aus (2) auch wieder (1) gewinnen können, sobald wir nur die bei jeder Integration hinzuzusetzenden Constanten mit Rücksicht auf den Umstand, daß die gesuchte Gerade durch den Punct m hindurchgehen soll, bestimmen: so können wir sagen, die Gerade, welche die Richtung eines einfachen Linienzweiges in seinem Grenzpuncte bestimmt, werde gefunden, indem man in ihrer auf dieselben Axen bezogenen Gleichung, nebst den Coordinaten für jenen Grenzpunct selbst, auch noch die ersten Differentiale derselben denen, die für die Curve gelten, gleichsetzt, ihren Anfangspunct aber in diesen Punct selbst verlegt. Minder eigentlich pflegt man auch wohl zu sagen: Die Gerade werde bestimmt, indem man sie durch zwei Puncte des gegebenen Zweiges hindurchgehen läßt, deren erster der gegebene Grenzpunct, der andere aber ein veränderlicher ist, der jenem in das Unendliche nahet.[80])

§ 26.

Wenn uns ein Punct einer Linie, sodann die Richtungen, die sie in allen ihren übrigen Puncten hat, gegeben sind, etwa so, daß uns für ein gegebenes rechtwinkliges Coordinatensystem zu jeder Abscisse nicht zwar die beiden ihr zugehörigen Werthe der Coordinaten y, z, wohl aber die Richtung, welche die Linie in dem entsprechenden Puncte besitzt, gegeben ist: so ist uns die ganze Linie gegeben. Denn kennen wir die zu jedem Puncte, also auch zu jedem x gehörige Richtung der Linie, so kennen wir auch ihre Projectionen oder die Winkel, welche diese mit der Axe der x bilden, deren Tangenten

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

sind; also die Functionen von x, welche den Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = fx, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \varphi x$$

entsprechen; also auch die Functionen

$$y = \int fx \, \mathrm{d}x + C, \quad z = \int \varphi x \, \mathrm{d}x + C'$$

bis auf die beiden Constanten C und C'; und wenn uns auch noch ein Punct der Linie gegeben ist, so können wir die Constanten C und C' bestimmen.

§ 27.

Wenn eine Linie in keinem ihrer Stücke gerade ist: so gibt es kein auch noch so kleines Stück, an dessen sämmtlichen inneren Puncten dieselben zwei einander entgegengesetzten Richtungen wären; sondern es ändern sich diese vielmehr (wie man zu sagen pflegt) fortwährend.

Da aber die Richtungen an einer Linie durch Richtungen, die aus einem Puncte ausgehen, bestimmt werden: so müssen sich die Unterschiede, die zwischen den ersteren obwalten, aus den Unterschieden, die an den letzteren wahrnehmbar sind, beurtheilen lassen. Das Einfachste, was wir hier thun können, ist nun ohne Zweifel, ein einfaches Linienstück zu betrachten und von einem daran befindlichen Grenzpuncte m (Fig. 10) auszugehen; da die Linie in diesem nur eine einzige Richtung hat, welche durch eine aus ihm ausgehende Richtung mR bestimmt wird. Nehmen wir aber, um diese Richtung mit der eines anderen Puncts zu vergleichen, den Nachbar n (weil dieses offenbar wieder das Einfachste seyn wird) nahe genug an m, daß n und alle noch nähere Nachbarn gemeine Puncte sind: so hat doch gleichwohl die Linie in jedem dieser Puncte schon zwei einander entgegengesetzte Richtungen, welche durch die aus n ausgehenden zwei entgegengesetzten Richtungen nS, ns, bestimmt werden. Es frägt sich also, welche von diesen beiden wir mit der Richtung mR vergleichen sollen, um ihren Unterschied zu betrachten? Ich antworte: nicht diejenige, deren Gerade sich an das Stück nm anschmiegt, welche ns wäre, sondern die ihr entgegengesetzte nS. Denn diese nur ist es, die mit der Richtung mR

die nämliche wird, sobald die Linie gerad wird. Um also zu beurtheilen, wie durch den Umstand, daß die Linie nicht gerad ist, die Richtungen sich ändern, müssen wir jene Richtungen mit einander vergleichen, die im entgegengesetzten Falle die nämlichen wären. Wir haben also den Unterschied zwischen den Richtungen mR und nS zu bestimmen; und zwar auf eine Weise, die uns nur diesen Unterschied selbst zu erkennen gibt, ohne die übrige Lage dieser Richtungen, so wie der Puncte m und n selbst, mit einzumengen. Zu diesem Zwecke werden wir offenbar wieder das einfachste Mittel ergreifen, wenn wir unsere Zuflucht nehmen zu einem Systeme dreier auf einander senkrechter Richtungen OA, OB, OC, dergleichen eines uns durch Beziehung auf gewisse unmittelbare Anschauungen ohnehin schon gegeben seyn muß, um auch nur einen einzigen Punct der Linie bestimmen zu können; und wenn wir nun aus dem Puncte O die beiden Richtungen OR', OS' den mR, nS gleichlaufend ziehen; worauf denn jedesmal zwei der drei Ebenen AOB, AOC, BOC hinreichen werden, durch jene beiden Winkel, welche die Projectionen der OR' und OS' auf sie, nämlich die Richtungen Or', Os'; $O\varrho'$, $O\sigma'$ untereinender bilden, also durch die zwei Winkel $r'O\varrho'$, $s'O\sigma'$[81]) den Unterschied zwischen den Richtungen mR und nS in der verlangten Weise vollkommen zu bestimmen, in welchen Ebenen diese sich auch befinden mögen. Es ist begreiflich, daß die Beschaffenheit dieser Winkel bei einer gegebenen Größe der Entfernung mn, und die Art, wie sie sich bei der Verminderung dieser Entfernung in das Unendliche verhalten, bei verschiedenen Linien, ja in derselben Linie an verschiedenen Stellen derselben sehr verschieden seyn wird, obgleich sie immer nur von der nächsten Umgebung des Punctes m abhangen wird. Ich nenne somit diejenige Beschaffenheit eines einfachen Zweiges an seinem Grenzpuncte, welche der nächste Grund davon ist, daß zwischen der Richtung, welche die Linie in diesem Grenzpuncte hat, und jeder anderen Richtung, die sie in einem veränderlichen Nachbar des ersteren besitzt, ein solcher Unterschied statt hat, als er in Wirklichkeit befunden wird, wenn wir ihn auf die nur vorhin angedeutete Weise erforschen und die Entfernung des Nachbars in das Unendliche abnehmen lassen, die Krümmung dieses Zweiges in diesem Grenzpuncte.

§ 28.

Aus dieser Erklärung ergeben sich sofort mehrere Folgerungen, die wir nur kurz anführen wollen:

1. Schon aus dem Umstande, daß wir den Nachbar, an dem sich diejenige Richtung befindet, durch deren Vergleichung mit der an dem gegebenen Puncte befindlichen wir die Krümmung einer Linie an diesem

letzteren beurtheilen wollen, so nahe, als es beliebt, zu diesem anrücken dürfen, ergibt sich, daß diese Krümmung eine Beschaffenheit der Linie in jenem Puncte sey, die ungeändert verbleibt, wenn nur die nächste Umgebung des Punctes sich nicht ändert.

2. Leicht ist auch einzusehen, daß diese Krümmung der Linie in einem gegebenen Puncte eine Beschaffenheit sey, die sich auf ihre Haltung beziehet. Sie dienet, wie die Angabe der Richtung, zu einer theilweisen Bestimmung dieser Haltung; bestimmt sie aber keineswegs vollständig, da sie ja schon die Richtung selbst unbestimmt läßt, und nur den Unterschied, der zwischen ihr und den Richtungen in den nächsten nachbarlichen Puncten obwaltet, bestimmt.

3. Nicht so wie es in allen Puncten einer Linie Richtungen gibt, gibt es auch Krümmungen in allen. In der geraden Linie nämlich gibt es zum mindesten in allen inneren Puncten gar keinen Unterschied in Betreff der hier obwaltenden Richtungen. Eine Linie aber, welche in keinem Stücke gerad ist, hat allerdings in jedem ihrer Puncte, wenn wir denselben als Grenzpunct eines einfachen Zweiges betrachten, eine Krümmung. Daher eben. daß wir sie eine krumme Linie nennen.

4. Die Krümmung einer Linie in einem gegebenen Puncte ist etwas, das nicht durch bloße Begriffe bestimmt werden kann. Denn jenachdem die Länge des Bogenstückes *mn* (Fig. 10) oder auch nur die Entfernung *mn*, bei welcher eine gewisse Größe der Winkel $r'Os'$, $\varrho'O\sigma'$ statt findet, eine andere ist, ingleichen je nachdem die Richtungen mR und nS (falls sie nicht in derselben Ebene sind) ein congruibles oder incongruibles System bilden, müssen wir die Krümmung als eine andere betrachten. Also ist zur Bestimmung einer Krümmung für jeden Fall die Angabe einer Entfernung nothwendig; in solchen Fällen aber, wo sich die Linie nicht in derselben Ebene befindet, wird auch noch die Angabe einer Gegend, wohin diese Krümmung gerichtet ist, erfordert, um sie vollkommen zu bestimmen.

5. In einem Grenzpuncte eines einfachen Zweiges gibt es höchstens eine einzige Krümmung; in jedem anderen Puncte, darin zwei oder mehrere einfache Zweige zusammentreffen, kann es der Krümmungen so viel verschiedene geben als viele Zweige es gibt.

6. Sind die Haltungen einander ähnlich oder auch geometrischgleich oder gar congruibel oder entgegengesetzt, so sind es auch die Krümmungen, wenn dergleichen da sind; und congruible sind für einerlei zu halten, weil auf die Richtung nicht geachtet wird.

7. Wenn eine Linie in einem Puncte zwei einander nicht entgegengesetzte Richtungen hat, so pflegt man zu sagen, sie ändere hier ihre Richtung plötzlich. Diese Aenderung hat jedoch nichts mit der Krümmung der Linie zu schaffen; weder mit derjenigen, die sie vielleicht in diesem Puncte selbst hat, noch mit einer ihrer Krümmungen in einem nachbarlichen Puncte. Nicht in dem Puncte m selbst; denn die Krümmungen, die sie in diesem Puncte hat, sind Krümmungen, die sie in den beiden sich hier vereinigenden Zweigen hat, und hängen ab von der Richtung, die diese Zweige in ihrem Ausgangspuncte haben, so daß sie unverändert bleiben können, während der Winkel zwischen jenen zwei Richtungen jede beliebige Größe annimmt, oder auch Null wird, oder sich in ein Verhältniß des Gegensatzes auflöst. Noch weniger kann jener Winkel etwas verändern an den zwei Krümmungen in einem nachbarlichen Puncte; denn er kann wegfallen, ohne daß an der nächsten Umgebung dieses Punctes, mithin auch an seiner Haltung und an den Krümmungen, die es dort gibt, nur das Geringste geändert werde.

8. Richtung und Krümmung vereinigt bestimmen die nächste Umgebung des Punctes einer Linie, an der sie sich befinden, vollständig; die Krümmung allein aber bestimmt nur Gestalt und Größe, so daß es in zwei Linien, die eine gleiche Krümmung in zwei Puncten haben, zwei, sey es auch noch so kleine durch diese Puncte begrenzte Linienstücke geben muß, welche einander nicht nur ähnlich und geometrischgleich, sondern auch congruibel seyn müssen. Denn durch die Richtung mR des Punctes m (Fig. 10) sind die Projectionen Or', $O\varrho'$ der ihr gleichlaufenden OR bestimmt. Durch die gegebene Krümmung aber sind uns für jede Entfernung, die kleiner als eine gewisse ist, die Winkel $r'Os'$, $\varrho'O\sigma'$ sammt der Seite, nach der sie liegen sollen, somit auch die Projectionen $O\varrho'$, $O\sigma'$ und also OS, d. h. die ihr gleichlaufende nS bestimmt. Somit gibt es ein Bogenstück mn, von dem wir einen Punct m, und die Richtungen, die es in seinen sämmtlichen übrigen Puncten hat, kennen. Also ist dieses Bogenstück (§ 26) bestimmt. Hieraus ergibt sich nun auch, was von der Krümmung allein behauptet worden ist.

§ 29.

Die Kreislinie ist eine Linie, deren jeder Punct nicht nur ein innerer (§ 20) und ein gemeiner (§ 22), sondern auch so gelegen ist, daß die zwei Raumdinge, die wir uns denken, wenn wir dieselbe Kreislinie uns einmal so denken, daß wir uns diesen Punct und die eine der beiden Richtungen an ihm, das andernmal denselben Punct und die andere der beiden Richtungen als gleichnamige Stücke denken nicht nur unter einander, sondern auch mit allen den übrigen, welche auf gleiche Art aus andern Puncten entstehen, ganz gleiche, ja congruible Raumdinge sind. Daher müssen denn auch die Krümmungen, welche die Kreislinie in allen diesen Puncten nach beiden Seiten hat, einander alle ganz gleich, ja die nämlichen seyn. Auch die unbegrenzte cylindrische Schraubenlinie, welche die Seiten des Cylinders unter stets gleichem Winkel schneidet, ist eine Linie, von der das Nämliche ausgesagt werden kann.

§ 30.

Auch jeder begrenzte Kreisbogen hat, wie der unbegrenzte, in jedem seiner inneren Puncte zwei, in seinen beiden Grenzpuncten aber nur eine Krümmung, die übrigens alle einander ganz gleich, ja als die nämlichen anzusehen sind. Dasselbe gilt von jedem begrenzten Schraubenbogen.

§ 31.

Wenn ein Paar Kreislinien ungleiche Halbmesser haben, so sind die Krümmungen in jedem Puncte der einen den Krümmungen in jedem Puncte der andern wohl ähnlich, aber nicht geometrischgleich. Das Erste, weil die Linien selbst ähnlich sind; das Zweite, weil wir, so nahe an einander wir auch zwei Puncte in der einen und andern nehmen mögen, bei gleicher Entfernung doch einen Unterschied in den Winkeln, welche die zu diesen Puncten gehörigen Richtungen der Kreislinie mit einander bilden, antreffen; welches nicht seyn könnte, wären die Krümmungen geometrischgleich. Auch wenn ein Paar Schraubenlinien bei gleichen Schraubenwinkeln ungleiche Halbmesser haben, sind die Krümmungen, welche in jedem Puncte der einen statt finden, den Krümmungen in jedem Puncte der andern zwar ähnlich, aber nicht geometrischgleich. Allein selbst in dem Falle, wenn Winkel und Halbmesser dieselben sind, können die Schraubenlinien incongruibel (nämlich nach entgegengesetzten Gegenden, wie man sagt, oder widersinnig gewunden) seyn, und dann sind auch die Krümmungen in beiden incongruibel. Wenn endlich die Schraubenwinkel ungleich (unähnlich) sind, dann sind die Krümmungen, wie auch die Halbmesser seyn mögen, unähnlich. Letztlich ist auch die Krümmung in einer Kreislinie mit jener in einer Schraubenlinie immer verschieden und derselben unähnlich; denn bei der ersteren liegen die sämmtlichen Richtungen, die mit einander verglichen werden, in einerlei Ebene, bei dieser in verschiedenen.

§ 32.

Wenn eine Linie in allen ihren, sey es auch nur inneren Puncten, zwei einander vollkommen gleiche Krümmungen hat: so muß sie, liegt sie noch überdieß in derselben Ebene, eine Kreislinie oder ein Stück derselben, und wenn sie nicht in derselben Ebene liegt, eine unbegrenzte cylindrische Schraubenlinie oder ein Stück derselben seyn. Umgekehrt also hat eine Linie, deren kein Stück weder ein Kreis, noch Schraubenbogen ist, auch kein Stück, welches in allen seinen Puncten dieselbe Krümmung hätte.

§ 33.

Da wir, so oft wir von Krümmungen reden, von Gründen reden, an deren Folgen sich Größe wahrnehmen läßt; weil unter Krümmung ja nur der Grund verstanden werden soll, dessen Folge gewisse Winkel sind, die sich bekanntlich als Größen ansehen lassen: so wird es nöthig seyn, bevor wir weiter gehen, einige das Verhältniß zwischen dergleichen Folgen und Gründen betreffende Sätze, die man, so gut man sie auch schon bisher gekannt und angewandt hat, doch meines Wissens nirgend mit der gehörigen Deutlichkeit ausgesprochen hat, einschaltungsweise zu besprechen.

1. Obgleich die Worte Grund und Folge in ihrer eigenthümlichsten (in der Wissenschaftslehre Bd. II, § 198 näher erklärten) Bedeutung nur eine gewisse Gattung von Wahrheiten bezeichnen: so nennen wir doch gar oft auch andere Dinge, namentlich bloße Beschaffenheiten und zwar selbst solcher Dinge, die keine Wirklichkeit haben, u und w Gründe und Folgen, wenn aus dem Satze:

X hat die Beschaffenheit u,

objectiv (d. h. so wie die Folge aus ihrem Grunde) ableitbar ist der Satz:

X hat die Beschaffenheit w.

In diesem Sinne nehmen wir jene Worte auch, wenn wir die Krümmung einer Linie in einem bestimmten Puncte (eine bloße Beschaffenheit eines nicht existirenden Dinges) den Grund nennen, aus dem die Aenderung, welche die Richtungen in der nächsten Umgebung dieses Punctes erleiden, als Folge hervorgehen. Eben so heißt aber auch die Bewegkraft, welche auf einen Atom einwirkt, der Grund von der Veränderung, die dessen Geschwindigkeit erfährt, und diese somit ihre Folge; u. s. w.

2. Wir sagen, daß ein Grund u die Folge w für sich allein oder als

ihr alleiniger und vollständiger Grund hervorbringe: wenn aus dem Satze:

$$X \text{ hat die Beschaffenheit } u$$

der Satz:

$$X \text{ hat die Beschaffenheit } w$$

so abfolgt, daß zu der Wahrheit des letzteren gar keine andere (etwa im Sinn behaltene) Bedingung als nur die Wahrheit des ersteren Satzes allein erforderlich ist. Im widrigen Falle sagen wir, daß der Grund u die Folge w nur unter Hinzutritt gewisser anderweitiger Bedingungen oder Umstände erzeuge. Dieß ist z. B. der Fall mit einer Bewegkraft, welche die Aenderung, die sie in der Geschwindigkeit eines Atoms bewirkt, nur unter Hinzutritt eines gewissen Umstandes, nämlich nur dadurch, daß sie durch eine gewisse Zeit hindurch in denselben eingewirkt hatte, hervorbringt.

3. Wenn die Folge w, die der Grund u, sey es für sich allein, oder erst unter Hinzutritt besonderer Umstände hervorbringt, eine Größe hat, die nach Verschiedenheit von u eine verschiedene seyn kann, auch wenn die erwähnten Umstände alle die gleichen verbleiben: so müssen wir zur Erklärung dieser verschiedenen Größen von w bei gleichen Umständen auch dem Grunde u eine Größe beilegen, die mit der Größe von w (dem Begriffe nach) die nämliche, d. h. ihr ähnlich seyn muß, sich also höchstens in dem ihr zu Grunde gelegten Maße, das sich auf eine andere Anschauung beziehen kann, unterscheidet. Mit anderen Worten: die Größen u und U zweier Gründe, die unter gleichen Umständen die Folgen w und W erzeugen, haben mit den Größen der letztern ein und dasselbe Verhältniß, oder es bestehet die Gleichung:

$$w : W = u : U.$$

So verhält sich die Größe einer Bewegkraft wie die Größe der Geschwindigkeit, die sie demselben Körper in der gleichen Zeit mittheilt.

4. Wenn der Umstand t, unter welchem der Grund u die Folge w hervorruft, ebenfalls eine Größe und zwar gerade eine solche Größe besitzt, welche bei einerlei Grund im gleichen Verhältnisse mit der Größe der Folge wächst: so stehen die Größen der Folge w allgemein im zusammengesetzten Verhältnisse der Größen des Grundes u und jenes Umstandes t; oder es ist, wenn der Grund U unter Hinzutritt des Umstandes T die Folge W erzeugt:

$$w : W = u \,.\, t : U \,.\, T.$$

Denken wir uns nämlich noch eine dritte Folge W', die durch den Grund u unter Hinzutritt des Umstandes T erzeuget worden wäre:

so müßte, weil die beiden Folgen w und W' von einem gleichen Grunde u nur unter Hinzutritt der verschiedenen Umstände t und T zu Stande kommen, nach der Voraussetzung das Verhältniß

$$w : W' = t : T$$

bestehen. Weil aber W' und W ein paar Folgen sind, die unter gleichen Umständen durch Gründe von den Größen u und U erzeugt seyn sollen, so muß nach N. 3 auch das Verhältniß

$$W' : W = u : U$$

seyn; woraus denn von selbst sich ergibt, daß

$$w : W = ut : UT$$

seyn müsse. Ein Beispiel haben wir an den Geschwindigkeiten, welche von ungleichen Bewegkräften, die durch ungleiche Zeiten einwirken, in demselben Körper hervorgerufen werden; denn weil bei einerlei Kraft die Geschwindigkeit in demselben Verhältnisse wie die Zeit wächst: so stehen die Geschwindigkeiten, die von verschiedenen Kräften in verschiedenen Zeiten hervorgebracht werden, im zusammengesetzten Verhältnisse der Kräfte und der Zeiten.

5. In dem besonderen Falle also, wenn ein paar Folgen einander gleich sind, verhalten die Größen der Gründe, die solche Folgen hervorgebracht haben, sich verkehrt wie die Größen des Umstandes, der noch hinzutreten mußte, vorausgesetzt, daß bei demselben nur das N. 4 erwähnte Verhältniß statt findet. Ist nämlich $w = W$, so gibt die obige Gleichung offenbar

$$u : U = T : t.$$

§ 34.

Wenden wir diese allgemein geltenden Wahrheiten auf den Begriff der Krümmung an, welche wir uns als den nächsten Grund davon denken sollen, daß die in einem Puncte m einer Linie statt findende Richtung in einem anderen n sich so geändert hat, daß der Unterschied zwischen beiden gerade diese und keine andere Beschaffenheit erhält, wenn der Punct n dem m in das Unendliche nahet: so sind uns gegenwärtig zwei Arten von Linien, nämlich die Kreis- und die Schraubenlinie bekannt, bei denen die Krümmung, also der Grund u in jedem Puncte der nämlichen Linie derselbe verbleibet. Als die Folge w, die dieser sich immer gleich bleibende Grund u hervorbringt, sollen wir hier den Unterschied betrachten, der zwichen den Richtungen mR und nS statt findet, wenn die Entfernung mn in das Unendliche abnimmt. Setzen wir nun zuerst, die Linie mn (Fig. 11) sey eine Kreislinie: so bestehet der Unterschied zwischen den Richtungen mR und nS, d. h. die Folge w, die der Grund u hervorbringt, hier in nichts Anderem als in dem Winkel Rms, welchen die der nS gleichlaufende ms mit mR bildet, der bekanntlich dem am Mittelpuncte mcn gleichet. Diese Folge w aber bringt der Grund u nicht für sich allein, sondern nur unter Hinzutritt eines gewissen Umstandes hervor. Der Punct n muß ein anderer seyn als m, also muß eine gewisse Entfernung zwischen den Puncten m und n statt finden, oder ein gewisses Linienstück mn zwischen ihnen liegen. Wollten wir bloß die Entfernung mn in Betrachtung ziehen, so wäre dieß kein Umstand, der so beschaffen ist, wie das t im vorigen § vorausgesetzt wurde, welches bei einerlei u seine Größe in demselben Verhältnisse mit w ändert. Denn die Entfernung mn wächst auch in demselben Kreise (d. h. bei einerlei Krümmung) nicht in demselben Verhältnisse wie der Winkel Rms oder mcn. Wohl aber ist die Länge des Bogenstücks mn ein Umstand, dessen Größe in demselben Verhältnisse mit der Größe des Winkels Rms wächst; also ein Umstand, wie wir ihn zur Anwendung der Sätze N. 4 und 5 des vorigen § brauchen. Wir dürfen sonach die Behauptung aufstellen, daß sich die Krümmungen in verschiedenen Kreisen verhalten verkehrt wie die Bogenlängen, die gleichen Winkeln zugehören, oder was bekanntlich eben so viel ist, verkehrt wie die Halbmesser dieser Kreise.

§ 35.

Betrachten wir nun den zweiten noch übrigen Fall, wenn das Bogenstück mn (Fig. 12) einer cylindrischen Schraubenlinie gehört. Wenn wir durch einen beliebigen Punct a dieser Linie den erzeugenden Kreis apq des Cylinders legen, und die Richtungen mR und nS auf die Ebene apq, nämlich nach $p\varrho$ und $q\sigma$ projiciren: so ist der Winkel, unter dem diese sich schneiden, als der einzige Unterschied, welchen die Krümmung der Schraubenlinie unter Hinzutritt der Bogenlänge mn hervorbringt, zu betrachten. Denn der Unterschied zwischen den Projectionen der beiden Richtungen mR und nS auf eine Ebene, die auf den erzeugenden Kreis senkrecht steht, würde für jede Lage der Puncte m und $n = 0$ befunden werden, weil mR und nS einerlei Neigung zur Ebene des erzeugenden Kreises behalten. Der erwähnte Winkel ist aber bekanntlich dem Winkel pcq am Mittelpuncte des Bogens ps gleich, und wächst im gleichen Verhältnisse mit dem Bogen mn; der letztere ist somit wieder das t in den Sätzen N. 4 und 5 des § 33, wenn wir unter u die in der Schraubenlinie obwaltende Krümmung, und unter w den Winkel pcq verstehen. Wir dürfen daher abermal die Behauptung aufstellen, daß sich die Krümmungen in verschiedenen Schraubenlinien verhalten verkehrt wie die Bogenlängen mn, die einem gleichgroßen Winkel pcq zugehören. Es ist aber, wenn wir den Halbmesser der Schraubenlinie mit r, den Winkel, unter welchem sie die Seite des Cylinders schneidet (den Schraubenwinkel) mit φ bezeichnen:

$$mn = \frac{r}{\sin\varphi} \cdot pcq.$$

Somit verhalten sich die Krümmungen bei verschiedenen Schraubenlinien verkehrt wie

$$\frac{r}{\sin\varphi}$$

oder gerade wie die Sinusse ihrer Schraubenwinkel und verkehrt wie die Halbmesser der erzeugenden Kreise. Wenn der Winkel φ zu einem rechten wird, übergehet die Schraubenlinie in den erzeugenden Kreis, dessen Krümmung wir sonach als das Maximum ansehen dürfen, dem sich die Krümmung der Schraubenlinie, wenn bei demselben Halbmesser sich nur der Schraubenwinkel ändert, in das Unendliche nahet. Nehmen wir aber die Krümmung in einem Kreise, dessen Halbmesser $= 1$ ist, zum Maße anderer Krümmungen an: so wird die Größe der Krümmung in jeder Schraubenlinie, deren Halbmesser und Winkel r und φ sind, durch die absolute Zahl

$$\frac{\sin\varphi}{r}$$

ausgedrückt werden können.

§ 36.

In jeder bestimmbaren Linie, darin kein Stück gerade ist, sie liege übrigens ganz oder theilweise in einerlei Ebene, oder es liege kein Stück derselben, das noch selbst eine Linie ist, in einerlei Ebene, gibt es zu jedem ihrer Puncte und für jeden von diesem Puncte begrenzten einfachen Zweig der Linie — höchstens mit Ausnahme einiger Fälle, die nur bei einzelnen Puncten eintreten können, — eine durch diesen Punct gehende Kreislinie von solchem Halbmesser und in solcher Lage, daß sie (in einem ihrer zwei durch diesen Punct begrenzten Zweige) dem Zweige der Curve für die kleinsten Entfernungen näher als jede andere Kreislinie kömmt, d. h. daß sie unter allen Kreislinien die einzige sey, die sich dem Zweige der Curve in diesem Puncte anschmiegt. Wir wollen sie deshalb die sich anschmiegende oder osculirende Kreislinie nennen. Die Art, wie diese Kreislinie, ihr Halbmesser, sowohl als auch die Lage ihres Mittelpunctes und ihrer Ebene zu bestimmen sey, können wir hier als bekannt voraussetzen; und begnügen uns wegen des Folgenden nur zu erinnern, daß man, wenn die Natur der Curve durch drei auf einander senkrechte Coordinaten bestimmt ist. für den Halbmesser den Ausdruck

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{[(dx\,.\,d^2z - dz\,.\,d^2x)^2 + (dy\,.\,d^2z - dz\,.\,d^2y)^2 + (dy\,.\,d^2x - dx\,.\,d^2y)^2]}}$$

habe, d. h. daß er nur durch die ersten und zweiten Differentiale der Coordinaten bestimmt werde. (S. Klügels Wörterbuch, Art. Krümmungskreis.)

§ 37.

Offenbar ist es eine der Curve zukommende Beschaffenheit, näher noch eine Beschaffenheit ihrer in einem gegebenen Puncte und Zweige vorhandenen Haltung und Krümmung, die wir beschreiben, wenn wir die Kreislinie, welche den Zweig in diesem Puncte osculirt, beschreiben. Denn daß gerade diese und keine andere, einem andern Halbmesser angehörige, oder auch nur anders gelegene Kreislinie in diesem Verhältnisse zu der Linie in dem gegebenen Puncte und Zweige derselben stehet, läßt uns gewiß eine Eigenthümlichkeit ihrer in diesem Puncte obwaltenden Haltung erkennen, weil nicht bei jeder anderen Haltung derselbe Kreis dasselbe leisten würde. Achten wir aber nicht auf die Lage dieses Kreises, sondern nur auf seine Größe, d. h. auf seinen Halbmesser: so lassen wir die Richtung der Linie in dem besagten Puncte bei Seite, und merken nur auf etwas, welches die Aenderungen, die diese Richtung in der nächsten Umgebung des Punctes in dem bestimmten Zweige erfährt, also die Krümmung der Linie in diesem Puncte angehet. Dennoch bestimmen wir diese Krümmung durch jene Angabe nicht vollständig; denn wenn anders der vorliegende Zweig nicht selbst ein Kreisbogen ist: so findet auch für die kleinsten Entfernungen noch ein Unterschied statt zwischen den Richtungen, in welchen die Nachbarn des Zweiges, und zwischen jenen, in welchen die gleichentfernten Nachbarn im Kreise liegen; also auch ein Unterschied auch in der Art, wie beide Linien sich krümmen. Da es aber jedenfalls doch dabei bleibt, daß unsre Angabe die Krümmung der Linie in dem besagten Puncte einigermaßen bestimme: so werde ich mir erlauben künftig diejenige Beschaffenheit einer Linie in einem gegebenen Puncte und Zweige, welche wir uns als den nächsten Grund davon denken, daß es nur eine Kreislinie dieses Halbmessers ist, welche den Zweig in diesem Puncte zu osculiren vermag, ihre ebene Krümmung in diesem Puncte und Zweige zu nennen. Ich verstehe somit unter der ebenen Krümmung eine bloße Beschaffenheit der Krümmung überhaupt; und ich nenne sie eine ebene, um anzudeuten, daß sie bloß eine solche Beschaffenheit der an der Curve befindlichen Krümmung sey, die diese auch mit einer bloß ebenen Curve (dergleichen die Kreislinie ist) gemein haben kann.

§ 38.

Aus diesem Begriffe der ebenen Krümmung einer Linie oder vielmehr nur eines einfachen Zweiges in seinem Grenzpuncte ergeben sich sofort mehrere Folgerungen, die wir nur kurz andeuten wollen:

1. Weil wir uns unter der ebenen Krümmung eines Zweiges in seinem Grenzpuncte, so gar nichts mehreres vorstellen sollen, als nur, was eben hinreicht, uns zu erklären, warum es gerade eine Kreislinie dieses Halbmessers sey, die unter allen gedenkbaren andern an den gegebenen Zweig in jenem Grenzpuncte sich auf das Genaueste anschmiegt: so müssen wir, so lange dieser Halbmesser derselbe verbleibt, auch die ebene Krümmung des Zweiges in diesem Puncte als eine ungeänderte betrachten. Dieser Halbmesser also bestimmt die hier statt findende ebene Krümmung, und diese den Halbmesser vollständig.

2. Nicht in jedem Puncte einer Linie, nicht einmal in jedem, darin sich eine Krümmung überhaupt nachweisen läßt (§ 28, N. 5), gibt es auch eine ebene Krümmung. Denn allerdings kann es auch in einer Linie, darin kein Stück gerade ist, einzelne Puncte geben, für welche gar keine Kreislinie aufzufinden ist, die sich der Curve in dem durch diesen Punct begrenzten Zweige anschmiegt; weil sich zu jeder noch eine andere mit einem größeren, oder noch eine andere mit einem kleineren Halbmesser nachweisen läßt, die sich dem Zweige noch inniger als jene anschließt. Das Erste ist der Fall bei der bekannten Linie, für welche die Gleichung

$$y = \sin x$$

bestehet, in der zu $x = 0$ und in allen zu $x = \pm n\pi$ gehörigen Puncten. Das Zweite bei der gemeinen Radlinie in den Puncten, wo sie in ihre Grundlinie eintrifft. Man pflegt zu sagen, der Halbmesser des osculirenden Kreises, den man auch Krümmungshalbmesser schlechtweg nennt, statt daß er unserer Begriffsbestimmung nach höchstens der Halbmesser der ebenen Krümmung genannt werden dürfte, sey in dem ersten Falle unendlich groß, in dem zweiten unendlich klein, und nennt die Krümmung selbst in dem ersten Falle unendlich klein, im zweiten unendlich groß. Alles dieß ist nun meines Erachtens uneigentlich gesprochen, und kann zu irrigen Vorstellungen verleiten. Eine Gerade die wie ein Halbmesser zwei Grenzpuncte haben muß, kann niemals weder unendlich groß noch klein seyn; und eine Krümmung in der § 27 erklärten Bedeutung, die mit dem Sprachgebrauche wohl übereinstimmt, haben die beiden so eben angeführten Linien in allen ihren Puncten, weil kein auch noch so kleines Stück derselben gerad ist. Nur diejenige Beschaffenheit einer Krümmung, die ich im vorigen § die ebene Krümmung genannt, fehlt ihren Krümmungen in den erwähnten Puncten; d. h. es sind dieß keine Krümmungen, die sich mit denen in irgend einer Kreislinie befindlichen auf die a. a. O. näher beschriebene Weise vergleichen lassen.*)

3. In jedem Puncte also, der sich als Grenzpunct eines einfachen Zweiges ansehen läßt, gibt es höchstens nur eine ebene Krümmung; in jedem anderen, der zwei oder mehrere Zweige begrenzt, höchstens nur eben so viele; und es ist nicht zu übersehen, daß diese ebenen Krümmungen verschieden seyn, d. h. verschiedene Halbmesser haben können, sowohl wenn die Richtungen der zwei oder mehrerer Zweige, die in diesem Puncte zusammenstoßen, einerlei, als auch wenn sie einander entgegengesetzt sind, oder einen Winkel bilden.

4. Die ebene Krümmung einer Linie in irgend einem ihrer Puncte und einfachen Zweige ist etwas, das sich durch keine bloßen Begriffe, sondern nur durch Beziehung auf eine gewisse Anschauung bestimmen läßt. Doch bedarf es hinzu nicht etwa der Angabe einer aus einem Puncte ausgehenden Richtung, sondern nur einer Entfernung.

5. In Hinsicht auf bloße Begriffe bestehet zwischen allen ebenen Krümmungen kein Unterschied; denn alle werden nur durch den ge-

*) Gelegentlich erlaube ich mir nur noch zu erinnern, daß es eine irrige Vorstellung sey, der Fall, daß der Halbmesser der ebenen Krümmung in das Unendliche wachse, könne nur dort eintreten, dort aber müsse er auch jedesmal eintreten, wo sich ein so genannter Wendungspunct findet. Sind ac, cb (Fig. 13) ein Paar Kreisbögen in derselben Ebene, deren Mittelpuncte o, u in der Geraden ocu liegen: so hat die Linie acb in c unstreitig einen Wendungspunct, aber keineswegs einen Krümmungshalbmesser, der unendlich groß wäre, sondern zwei einander entgegengesetzte für die zwei Zweige ca und cb von den Größen co und cu. Hat aber eine Linie acm (Fig. 14) um ihren Wendungspunct c herum in der That einen in das Unendliche wachsenden Halbmesser der ebenen Krümmung, wie etwa, wenn die Gleichung für sie

$$y = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

wäre, und die Abscisse $ad = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist: so wird, wenn wir den Bogen $c\mu\varrho = cmr$ in derselben Ebene nur auf der entgegengesetzten Seite der im Puncte c statt findenden Richtung ct verzeichnen, die neue Linie $ac\mu\varrho$ so gut wie $acmr$ um c herum einen in das Unendliche wachsenden Krümmungshalbmesser haben, und doch wird kein Wendungspunct in c seyn.

gebenen Halbmesser eines Kreises bestimmt. Es sind also alle ebenen Krümmungen ähnlich.

6. Nicht eben so wie es entgegengesetzte Richtungen an Linien gibt (§ 24, N. 5), gibt es auch entgegengesetzte ebene Krümmungen. Der Unterschied, den man in dem § 36 angeführten Ausdrucke für den Krümmungshalbmesser in dessen bald positivem, bald negativem Vorzeichen findet, betrifft nicht die Krümmung, sondern die Lage des osculirenden Kreises.

7. In jedem gemeinen Puncte einer Linie, darin kein Stück gerad ist, stoßen zwei Zweige zusammen, welche dieselbe ebene Krümmung haben. Denn daß der eine Zweig eine ebene Krümmung hätte, welche durch einen anderen Halbmesser als die des anderen Zweiges gemessen würde; oder daß der eine oder auch beide Zweige gar keine ebene Krümmung hätten, oder daß sich an einem Puncte nur ein einziger oder mehr als zwei Zweige begrenzen sollten; das Alles sind Fälle, die nur in einzelnen Puncten vorkommen können.

§ 39.

Wie von der Richtung einer Linie in einem gegebenen Puncte und einfachen Zweige § 25 angemerkt wurde, sie sey eine solche Beschaffenheit, zu deren Beurtheilung wir nebst dem gegebenen Puncte noch einen seiner in diesem Zweige liegenden Nachbarn, und dieß zwar einen solchen, dessen Entfernung in das Unendliche abnehmen kann, ins Auge fassen müssen: so dürfen wir von der ebenen Krümmung einer Linie in einem gegebenen Puncte und einfachen Zweige derselben behaupten, sie sey eine Beschaffenheit, zu deren Beurtheilung wir nebst jenem Puncte noch zwei seiner in diesem Zweige liegenden Nachbarn betrachten und untersuchen müssen, welchem Gesetze die beiden Richtungen, in denen sie zu dem gegebenen Puncte liegen, gehorchen, wenn ihre Entfernungen von ihm in das Unendliche abnehmen. Dieses Gesetz aber bestehet (wie wir schon wissen) darin, daß es — höchstens mit Ausnahme gewisser isolirt vorkommender Fälle — einen durch den Grenzpunct des Zweiges gehenden Kreisbogen gibt, welchem die beiden Nachbarn bei gleichen Entfernungen näher als jedem anderen Kreisbogen rücken, wenn man diese Entfernungen selbst in das Unendliche abnehmen läßt. Und die Art, wie dieser Kreisbogen bestimmt wird, bestehet wieder darin, daß wir in seinen auf dieselben Axen, wie die gegebene Curve, bezogenen Gleichungen nebst den Coordinaten für jenen Grenzpunct selbst auch noch ihre ersten sowohl als auch die zweiten Differentiale denen, die für den Zweig gelten, gleich setzen. Minder eigentlich kann man dieß auch so ausdrücken: der Kreis wird bestimmt, indem wir ihn durch drei Puncte des gegebenen Zweiges hindurch gehen lassen, deren der eine der Grenzpunct selbst ist, die beiden anderen aber ihm ins Unendliche nahen.[83])

§ 40.

In jeder bestimmbaren Linie, deren kein Stück, das selbst noch eine Linie ist, in einerlei Ebene liegt, gibt es zu jedem ihrer Puncte für jeden von diesem Puncte begrenzten einfachen Zweig — höchstens mit Ausnahme gewisser Fälle, die nur vereinzelt vorkommen können — eine durch den erwähnten Punct gehende cylindrische Schraubenlinie von solchem Halbmesser und Schraubenwinkel, nach einer solchen Gegend gewunden und in solcher Lage befindlich, daß sie (in einem ihrer durch jenen Punct getrennten Zweige) dem gegebenen Zweige der Curve näher als eine jede andere cylindrische Schraubenlinie rücket, d. h. sich anschmiegt. Wir wollen sie die sich anschmiegende oder die osculirende Schraubenlinie nennen. Die Art, wie diese Schraubenlinie, der Halbmesser ihres erzeugenden Kreises, ihr Schraubenwinkel, die Gegend ihrer Windung, endlich auch ihre Lage zu bestimmen sey, können wir hierorts nicht auseinander setzen, wenn wir die Grenzen dieser Abhandlung nicht überschreiten wollen.[84])

§ 41.

Offenbar ist es eine der Curve zukommende Beschaffenheit, näher noch eine Beschaffenheit ihrer in einem gegebenen Puncte und in einem von demselben begrenzten Zweige stattfindenden Haltung, die wir beschreiben, wenn wir die Schraubenlinie, die sie in diesem Puncte osculirt, beschreiben. Denn daß gerade diese und keine andere Schraubenlinie in diesem Verhältnisse zu der gegebenen Curve in dem gegebenen Puncte derselben stehet, läßt uns gewiß eine Eigenthümlichkeit ihrer in diesem Puncte obwaltenden Haltung erkennen. Achten wir aber nicht auf die Lage dieser Schraubenlinie, sondern beschreiben wir nur die Größe des Halbmessers ihres erzeugenden Kreises, ihren Schraubenwinkel und die Gegend ihrer Windung: so lassen wir die Richtung, welche die Linie in dem besagten Puncte hat, ganz außer Acht, und geben nur etwas an, welches die Aenderungen, die diese Richtung in der nächsten Umgebung des Punctes in diesem Zweige erfährt, also die Krümmung der Linie angehet. Dennoch bestimmen wir diese Krümmung durch Beschreibung jener sie osculirenden Schraubenlinie noch nicht vollständig. Denn wenn anders der uns vorliegende Zweig nicht selbst ein Schraubenbogen ist: so waltet auch für die kleinsten Entfernungen noch ein Unterschied ob zwischen den Richtungen, in welchen die Nachbarn des Zweiges, und jenen, in welchen die gleichentfernten Nachbarn der Schraubenlinie liegen; also ein Unterschied auch in der Art, wie beide Linien sich krümmen. Da es aber jedenfalls dabei bleibt, daß unsre Angabe die Krümmung der Linie in dem erwähnten Puncte und Zweige einigermaßen bestimme: so erlaube ich mir künftig diejenige Beschaffenheit einer Linie in einem gegebenen Puncte, welche auf die nur eben besprochene Weise, d. h. durch Angabe einer in diesem Puncte sie osculirenden Schraubenlinie bestimmt wird, ihre körperliche (oder, wenn man so lieber will, räumliche) Krümmung in diesem Puncte zu nennen. Unter der räumlichen Krümmung verstehe ich somit ohngefähr eben so, wie § 39 unter der ebenen Krümmung, eine bloße Beschaffenheit der Krümmung überhaupt, und nenne sie eine räumliche um anzudeuten, daß sie eine solche Beschaffenheit der an der uns vorliegenden Curve befindlichen Krümmung sey, die diese nur mit einer nicht in der Ebene, sondern im körperlichen Raume gelegenen Curve (dergleichen die cylindrische Schraubenlinie ist) gemein haben kann.

§ 42.

Aus diesem Begriffe der räumlichen Krümmung einer Linie oder vielmehr nur eines einfachen Zweiges derselben in seinem Grenzpuncte ergeben sich sofort mehrere Folgerungen, die wir nur kurz andeuten:

1. Weil wir uns unter der räumlichen Krümmung eines Zweiges in seinem Grenzpuncte durchaus nichts Mehreres vorstellen sollen, als nur, was eben hinreicht uns zu erklären, warum es gerade eine Schraubenlinie von diesem Halbmesser und Schraubenwinkel und von dieser Gegend der Windung sey, die unter allen gedenkbaren andern an den gegebenen Zweig in jenem Grenzpuncte sich auf das Genaueste anschmiegt: so müssen wir, so lange dieser Halbmesser, dieser Schraubenwinkel und diese Gegend der Windung dieselben verbleiben, auch die räumliche Krümmung des Zweiges in diesem Puncte als eine ungeänderte betrachten. Der Halbmesser also, der Schraubenwinkel und die Gegend der Windung sind die drei Stücke, welche die räumliche Krümmung vollständig bestimmen, so wie hinwieder sie diese drei Stücke bestimmt.

2. Nicht in jedem Puncte einer Linie, nicht einmal in jedem, darin sich eine Krümmung überhaupt nachweisen läßt (§ 28, N. 5), gibt es auch eine räumliche Krümmung. Namentlich in keiner Linie,

die durchaus in einerlei Ebene liegt, ist eine räumliche Krümmung vorhanden; es wäre denn, daß wir sehr uneigentlicher Weise die bloße Kreislinie als eine besondere Art von Schraubenlinien ansehen wollten. Denn es ist einleuchtend, daß eine Schraubenlinie sich an eine solche ebene Linie in irgend einem Puncte derselben nur anschmiegen könnte, wenn ihr Schraubenwinkel zu einem rechten wird, wodurch sie zur Kreislinie wird. Aber auch in einer Linie, deren kein Stück, das selbst noch Linie ist, in einerlei Ebene liegt, können Puncte (doch nur vereinzelte) anzutreffen seyn, für die es keine sich an den Zweig, den sie begrenzen, anschmiegende Schraubenlinie gibt, nämlich aus dem Grunde nicht, weil es zu jeder eine andere gibt, die sich noch inniger anschließt, entweder indem wir den Halbmesser ihres erzeugenden Kreises, oder indem wir den Schraubenwinkel noch größer oder noch kleiner machen. So gibt es z. B. für die Curve, welche die Diagonale $a\beta$ (Fig. 15) eines (aus Pappe geformten) Rechteckes $ab\beta\alpha$ annimmt, wenn wir die Fläche desselben so biegen, daß die beiden Seiten $ab = \alpha\beta$ einmal die Gestalt der Sinuslinie $a'd'b'$, einandernmal die Gestalt der Radlinie $a''d''b''$ erhalten, in den Puncten a und b nie eine sich an sie schmiegende Schraubenlinie, im ersten Falle nicht, weil der Halbmesser nicht groß genug, im zweiten, weil er nicht klein genug genommen werden kann. Wenn wir dagegen in das Quadrat $mnpq$ den Kreis $acbd$ einschreiben, und dasselbe um die krumme Oberfläche eines gewöhnlichen Cylinders so legen, daß die Seite mn mit dem erzeugenden Kreise desselben zusammenfällt: so wird der Kreis $acbd$ eine Curve bilden, die in den Puncten a und b, c und d keine sich an sie schmiegende Schraubenlinie hat, weil ihr Schraubenwinkel in den Puncten a und $b = 0$, in den Puncten c und d aber $= 90°$ genommen werden müßte, wodurch sie im ersten Falle in eine bloße Gerade (die Seite des Cylinders), im zweiten Falle in den erzeugenden Kreis übergehen würde.

3. In jedem Puncte also, der sich als Grenzpunct eines einfachen Zweiges ansehen läßt, gibt es höchstens nur eine räumliche Krümmung; in jedem anderen, darin zwei oder mehrere Zweige zusammen laufen, höchstens nur eben so viele; und es ist nicht zu übersehen, daß diese räumlichen Krümmungen verschiedene seyn, d. h. verschiedene Halbmesser, Schraubenwinkel und Gegenden ihrer Windung besitzen können; selbst wenn die ebenen Krümmungen einerlei sind. Sind aber diese verschieden, so sind es nothwendig auch jene.

4. Die räumliche Krümmung einer Linie in irgend einem ihrer Puncte und einfachen Zweige ist etwas, das sich durch keine bloßen Begriffe, sondern nur durch Beziehung auf Anschauungen bestimmen läßt; und zwar bedarf es hinzu sowohl der Angabe einer Entfernung

(um den Halbmesser des erzeugenden Kreises zu bestimmen), als auch der Angabe der Gegend, nach der die Schraubenlinie sich windet.

5. In Hinsicht auf bloße Begriffe bestehet ein Unterschied zwischen räumlichen Krümmungen nur in ihren Schraubenwinkeln. Sind diese gleich (ähnlich), so sind die Krümmungen selbst ähnlich. Sind überdieß die Halbmesser gleich (geometrischgleich), so sind auch die Krümmungen geometrischgleich; können aber noch einander entgegengesetzt seyn und sind es, wenn die sie bestimmenden Schraubenlinien ihre Windungen nach entgegengesetzten Gegenden haben. Wenn auch dieses nicht ist, dann sind beide räumliche Krümmungen als congruibel, ja als dieselben zu betrachten.

6. In jedem gemeinen Puncte einer Linie, davon kein Stück, das selbst noch Linie ist, in einerlei Ebene liegt, stoßen zwei Zweige zusammen, welche dieselbe räumliche Krümmung haben. Denn daß der eine Zweig eine räumliche Krümmung hätte, die einen anderen Halbmesser oder einen anderen Schraubenwinkel oder eine andere Gegend ihrer Windung hätte als in dem anderen Zweige, oder daß der eine oder auch beide Zweige gar keine räumliche Krümmung hätten, oder daß sich an einem Puncte nur ein einziger Zweig oder mehr als zwei Zweige begrenzen sollten: das Alles sind Fälle, die nur in einzelnen Puncten vorkommen können. Da wir somit von einer jeden Linie, deren kein Stück, das selbst noch Linie ist, in einerlei Ebene liegt, behaupten können, daß sie in jedem ihrer Puncte — höchstens mit Ausnahme gewisser vereinzelt stehenden — eine doppelte Art von Krümmung, eine ebene nämlich und eine körperliche habe: so rechtfertigt sich hindurch die Benennung: Linie von doppelter Krümmung, die man dergleichen Linien von jeher gab, vollkommen.[85])

§ 43.

Wie von der Richtung einer Linie § 25 angemerkt wurde, sie sey eine solche Beschaffenheit, zu deren Beurtheilung wir nebst dem Puncte, in dem sie statt finden soll, noch einen seiner in dem von ihm begrenzten Zweige gelegenen Nachbarn ins Auge fassen müssen; und wie von der ebenen Krümmung § 39 gesagt wurde, diese sey eine solche Beschaffenheit, zu deren Beurtheilung wir nebst dem Puncte, in dem sie statt finden soll, noch zwei seiner in dem zugehörigen Zweige liegender Nachbarn berücksichtigen müssen: so behaupten wir jetzt von der räumlichen Krümmung, sie sey eine Beschaffenheit, die zu beurtheilen wir nebst dem Puncte, in dem sie statt finden soll, noch drei seiner in dem zugehörigen Zweige liegender Nachbarn beachten und untersuchen müssen, welchem Gesetze die drei Richtungen zu ihnen gehorchen, wenn ihre Entfernungen in das Unendliche abnehmen. Dieses Gesetz aber bestehet, wie wir schon wissen, darin, daß es — höchstens mit Ausnahme gewisser isolirt vorkommender Fälle — eine durch den besagten Punct gehende *Schraubenlinie* gibt, welcher die drei in dem Zweige liegenden Nachbarn bei gleichen Entfernungen näher als jeder anderen Schraubenlinie rücken, wenn wir diese Entfernungen in das Unendliche abnehmen lassen. Und die Art, wie diese Schraubenlinie bestimmt wird, bestehet wieder darin, daß wir in seinen auf dieselben Axen, wie die gegebene Curve, bezogene Gleichungen, nebst den Coordinaten für jenen Grenzpunct selbst auch noch ihre *ersten, zweiten und dritten Differentiale* jenen, die für den Zweig gelten, gleich setzen. Minder eigentlich kann man dieses Verfahren auch so beschreiben: die Schraubenlinie wird bestimmt, indem wir sie durch *vier Puncte des gegebenen Zweiges* hindurch gehen lassen, deren der eine der Grenzpunct selbst ist, die drei andere aber ihm ins Unendliche nahen.[86])

§ 44.

Außer der Geraden, der Kreis- und Schraubenlinie und einer solchen Linie, die aus Geraden oder Kreis- oder Schraubenbögen zusammengesetzt ist, hat jede andere Linie in jedem ihrer Puncte eine gewisse *Krümmung*, und nicht ein einziges auch noch so kleines Stück, welches in allen seinen Puncten *dieselbe* Krümmung behielte (§ 23).