II. Gedanken in Betreff einer künftig aufzustellenden Theorie der geraden Linie

In: Bernard Bolzano (author); Jan Vojtěch (author): Bernard Bolzano's Schriften. Band 5. Geometrische Arbeiten. (German). Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1948. pp. 37–48.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400221

II.

GEDANKEN IN BETREFF EINER KÜNFTIG AUFZUSTELLENDEN THEORIE DER GERADEN LINIE[29]) 44

§ 1.

Zum Ersten etwas von den Begriffen: Einerleyheit und Gleichheit. Es ist zwar in einer geometrischen Untersuchung mein Amt nicht, die schulgerechten Definitionen dieser beyden Worte aufzusuchen. Aber den bestimmten Sinn, den ich mit ihnen verbinde, muß ich (weil er sonst noch schwankend wäre) doch angeben. Ich verstehe also unter Einerleyheit (identitas) den Begriff, der aus der Vergleichung eines Dinges (lediglich) mit sich selbst entspringt. Der Einerleyheit setz' ich contradictorisch entgegen die Verschiedenheit. Die Verschiedenheit theile ich abermals in die zwey contradictorischen species: Gleichheit und Ungleichheit. Sonach setzt Gleichheit die Verschieden- |
heit voraus. Und es gelten die Redensarten: „jedes Ding ist mit sich 45
selbst einerley"; (nicht aber: sich selbst gleich). „Zwey verschiedne Dinge sind entweder gleich, oder ungleich." (nie einerley). — Sagt man doch: „Das Ding A ist mit dem B einerley", so hat dieß eigentlich den Sinn: Man hat A und B problematisch als zwey verschiedne Dinge angenommen, und durch Schlüsse gefunden, daß sie in der That nicht verschieden, sondern einerley Ding sind. — Eigenschaften an Dingen können einerley oder verschieden genannt werden. In wiefern man sie aber hypostasirt, und selbst als Dinge betrachtet, sind sie eo ipso verschieden, und können nun gleich oder ungleich heißen.

§ 2.

Hiernächst lassen sich die Lehrsätze aufstellen: Dinge, deren bestimmende Stücke einerley sind, sind selbst einerley Ding. Und umgekehrt (conversio simplex). — Dinge, deren bestimmende Stücke gleich sind, sind selbst gleiche Dinge. Und umgekehrt. — Gelegenheitlich lege ich auch folgende zwey Sätze zur Beurtheilung vor, die ich zum Behufe mathematischer Beweise anzunehmen oft geneigt war. Wenn unter den bestimmenden Stücken zweyer Dinge eins verschieden ist (die übrigen aber einerley): so muß auch in den bestimmten Stücken eine Verschiedenheit seyn. Wenn unter den bestimmenden Stücken zweyer Dinge
eines ungleich ist, (die übrigen aber gleich): so | muß auch in den bestimm- 46
ten Stücken eine Ungleichheit seyn.

§ 3.

Bevor der Geometer den Begriff der Gleichheit auf räumliche Dinge anwende, soll er erst die Möglichkeit gleicher räumlicher Dinge darthun. Vielleicht, daß sich hiezu der, I. Abth. § 19. aufgestellte Grundsatz brauchen ließe, der in seiner Allgemeinheit also lautet: Wir haben von keinem bestimmten räumlichen Dinge (auch nur einem Puncte) eine Vorstellung a priori. Daher müssen mehrere ganz gleiche räumliche Dinge möglich seyn, von denen allen gleiche Prädicate gelten. Wenn also zu dem Puncte a irgend ein räumliches Ding A möglich ist, so muß auch zu dem verschiedenen Puncte b ein gleiches räumliches Ding $B = A$ möglich seyn.

§ 4.

Da eine ächte Definition nur solche Merkmale des zu erklärenden Begriffs enthalten muß, die sein Wesen ausmachen, und ohne welche er gar nicht gedacht werden kann: so sind die von dem Scholastiker Occam sich herschreibenden Erklärungen von Körper, Fläche, Linie und Punct, nach welchen Körper diejenige Art von Ausdehnung ist, welche die Gränze keiner andern seyn kann, Fläche aber die Gränze eines Körpers ist, u. s. w. — als sehr unächt anzusehn; indem sie (wie auch Hr.
47 Langsdorf an- | merkt, s. Anfangsgründe der Mathematik, Vorr.) jedesmal die Vorstellung eines Körpers fordern, um sich auch nur einen Punct oder eine Linie zu gedenken; wo es doch offenbar ist, daß wir uns eine Fläche, eine Linie, oder einen Punct gar wohl denken können, und auch denken, ohne einen Körper, den sie begränzen. — Nicht so schlechterdings verwerflich wäre es meines Erachtens, wenn es jemand umkehrte, und solche Definitionen aufstellte, die zur Linie die Vorstellung von Puncten, zur Fläche die von Linien u. s. w. forderten.

§ 5.

Soviel ist, wie ich hoffe, ohne Widerspruch: daß der Begriff des Puncts — als eines bloßen Merkmals eines Raumes (σημειον), das selbst kein Theil des Raumes ist — in der Geometrie nicht entbehret werden könne. — Dieser Punct ist allerdings ein bloß imaginärer Gegenstand, wie ich Hrn. Langsdorf gerne zugestehe. Auch Linie und Fläche sind dieß, und zwar alle drey noch in einem andern Sinne, als der geometrische Körper. Diesem nämlich kann in der Anschauung etwas adäquates gegeben werden, (und zwar alles, was in der Anschauung gegeben wird, ist Körper) nicht aber jenen. Und eben deshalb dürfte vielleicht jede versuchte reine Anschauung von Linien und Flächen (etwa durch die Bewegung eines Punctes) un- |

möglich seyn. Die in dieser Abhandlung versuchten Definitionen von 48
der geraden Linie § 26, und der Ebene § 43 sind eben nach der Voraussetzung gemacht, daß beyde bloße Gedankendinge sind.[30])

§ 6.

Da Ein Punct für sich allein betrachtet nichts Unterscheidbares darbietet, indem wir von keinem eine bestimmte apriorische Vorstellung haben: so ist der einfachste Gegenstand der geometrischen Betrachtung ein System zweyer Puncte. Aus einem solchen Zugleichdenken zweyer Puncte entspringen gewisse Prädicate für dieselben (Begriffe), die bey der Betrachtung eines einzelnen Punctes nicht vorhanden waren. Alles was sich in der Beziehung dieser zwey Puncte aufeinander, und zwar in der Beziehung (Fig. 1) des *b* auf *a* bemerken läßt, zerlege ich in zwey Theilbegriffe: I. Dasjenige, was dem Puncte *b* in Beziehung auf *a* so zukömmt, daß es unabhängig ist von dem bestimmten Puncte *a* (qua praecise hoc est et non aliud); was folglich auch in der Beziehung auf einen andern Punct, z. B. α gleich vorhanden seyn kann: genannt die Entfernung des Punctes *b* von *a*. II. Dasjenige, was dem Puncte *b* in Beziehung auf *a* so zukömmt, daß es abhängig ist bloß von dem bestimmten Puncte *a;* wovon nun getrennt werde, was schon in dem Begriffe der Entfernung liegt, d. h. was dem Puncte *b* auch in Rücksicht auf | noch einen andern Punct zukommen kann: genannt 49
die Richtung, in welcher *b* zu *a* liegt.

§ 7.

Nun ist beyder Begriffe Möglichkeit zu zeigen. I. Der Entfernung. — Der bloße Begriff des Verschiedenseyns des Punctes *b* von *a* (des Auseinanderseyns) ist kein Theil des Begriffs der Beziehung des Punctes *b* auf *a* (des totius dividendi § 6); sondern wird dabey nothwendig schon vorausgesetzt. Soll *b* auf *a* bezogen werden; so muß die Vorstellung, daß *b* von *a* verschieden ist, schon vorausgehn. Um also die Realität des Gegriffs der Entfernung, als eines Theilbegriffs von dem erwähnten Ganzen darzuthun, muß man beweisen, daß er mehr enthalte, als etwa das bloße Verschiedenseyn des *b* von *a*. Dieß thue ich so: Sollte der Begriff der Entfernung nichts Andres enthalten, so müßte der andere Begriff der Richtung das totum divisum noch ganz begreifen, d. h. der ganze Begriff der Beziehung *b* auf *a* müßte nichts enthalten, als was lediglich von dem bestimmten Puncte *a* abhängt; mit andern Worten: das System *ab* könnte durch das völlig bestimmt werden, was dem Punct *b* bloß abhängig von *a* zukömmt, also keinem andern Systeme zukommen kann; also hätten wir eine besondre apriorische

Vorstellung von a, die wir von keinem andern Puncte hätten; welches gegen unsern Grundsatz ist. II. Der Begriff der Richtung kann nicht |
50 ganz leer seyn, weil sonst wieder der Begriff der Entfernung den eingetheilten Begriff ganz erschöpfen müßte. Aber ex definitione enthält dieser nur das, was dem Puncte b unabhängig von dem besondern Puncte a zukömmt, so daß er auch zukommen kann dem Systeme $b\alpha$. Das einzutheilende Ganze aber enthält so viel, als dem Systeme ab nur allein zukömmt.

§ 8.

Da also beyde Begriffe der Entfernung und der Richtung einen Inhalt haben, so enthält jeder weniger als das eingetheilte Ganze; daher weder die Entfernung allein, noch die Richtung allein den Punct b bestimmt. Oder: es gibt mehrere Puncte b, β, welche eine gleiche Entfernung von a haben, und eben so mehrere Puncte b, p, welche in einerley Richtung zu a liegen.

§ 9.

Die Annahme des Punctes a, und die Entfernung und Richtung des Punctes b bestimmen diesen (ex definitione). Und umgekehrt der Punct b bestimmt die Entfernung von a, und die Richtung zu a. — Zwey verschiedene Richtungen also aus demselben Puncte a können keinen einzigen Punct gemein haben, d. h. keinem gemeinschaftlich zukommen.

§ 10.

Lehrsatz. Zu einem gegebenen Puncte a (Fig. 2) und in einer gegebenen Richtung aR gibt es Einen und nur Einen Punct m, dessen Entfernung von a der gegebenen des Punctes y von x gleiche. |

51 Beweis. Daß es einen Punct zu a von der gegebenen Entfernung gebe, folgt daraus, weil es widrigenfalls einen Unterschied nicht aufeinander bezogener Puncte a, x gäbe. Daß es einen solchen Punct auch in der gegebenen Richtung zu a gebe, folgt daraus, weil wir sonst eine besondere Vorstellung von einer bestimmten Richtung aR haben müßten. — Daß es endlich nur Einen gebe, folgt aus § 9.

§ 11.

Ich suche bisher vergebens einen befriedigenden Beweis für den Lehrsatz zu erfinden: daß die Entfernung b von a gleich sey der Entfernung a von b. Indessen mag doch folgendes Raisonnement, ob es gleich mich selbst nicht befriedigt, beygefügt seyn, um vielleicht ein Besseres zu veranlassen. Wenn zwey Dinge A, B gleich sind, so muß

auch eine solche Verbindung derselben möglich seyn, daß die Beziehung
A auf B gleich sey der Beziehung B auf A. Denn der Grund der Un-
möglichkeit müßte in einer Ungleichheit der Dinge liegen. Da nun alle
Puncte gleiche Dinge sind, so muß eine solche Verbindung zweyer
Puncte möglich seyn, dabey die Beziehung b auf a gleich sey der Be-
ziehung a auf b. — Ist aber eine solche Verbindung nur möglich, so ist
sie auch wirklich; denn die Verbindung zweyer Puncte ist bey bestimm-
ter Entfernung nur eine Einzige. — Soll nun die Beziehung von b auf a
gleichen der von a auf b, so muß die Entfernung des b | von a gleich 52
seyn der des a von b; denn die Richtungen können nicht verglichen
werden.

§ 12.

Das System zweyer aus einem Puncte ausgehender Richtungen heißt ein Winkel. Warum der Begriff des Winkels eigentlich auf Richtungen und nicht auf Linien gehe, habe ich schon I. Abth. § 2 bedeutet.

§ 13.

Indeß hätt' ich auch noch eine andere Definition des Winkels in Vorschlag, die der Entwicklung der Begriffe von Richtung und Entfernung ganz analog ist. Man betrachte zwey Richtungen R, S aus demselben Puncte a (Fig. 3); und zertheile den ganzen Begriff der Beziehung der Richtung S auf R in folgende zwey Theilbegriffe: I. Das, was der Richtung S unabhängig von der bestimmten Richtung R (lediglich dieser) zukömmt — genannt der Winkel, den S mit R macht. II. Das, was der Richtung S nur in Bezug auf die Richtung R und keine andere zukömmt, so daß hievon dasjenige getrennt werde, was ihr auch in Bezug auf eine andere Richtung gleichermaßen zukommen kann — genannt die Ebene, in der S zu R liegt. — (In dieser Bedeutung käme das Wort Ebene nur derjenigen Hälfte einer gewöhnlichen Ebene durch R und S zu, die auf der Seite von R liegt, darin S ist.) — Gegenwärtig aber bleibe ich bey der Erklärung § 12. |

§ 14. 53

In jedem Falle kömmt zu erweisen, daß die Vorstellung, die entsteht, wenn man S auf R bezieht, gleiche der, wenn man R auf S bezieht, d. h. der Winkel $sar = ras$. (Ähnlich dem Satze § 11.) Auch hier habe ich noch keinen befriegenden Beweis.

§ 15.

Wenn der Winkel zwischen den Richtungen R, S (Fig. 4) von der Art ist, daß er die Richtung S durch die Richtung R bestimmt, d. h.

daß es bey einerley Richtung R keine von S verschiedene Richtung geben kann, die mit R ein gleiches System bilde: so heißt der Winkel zwischen S und R ein Winkel von zwey Rechten, oder (wie Hr. Schultz ihn nennt) ein gerader Winkel. Die Richtung S heißt der R entgegengesetzt. Zufolge § 14 also auch die Richtung R der S entgegengesetzt. — Auch folgt ex definitione: Wenn die Richtungen R, S (Fig. 3) einander nicht entgegengesetzt sind, so gibt es allemal noch von S verschiedene Richtungen, die mit R einen gleichen Winkel bilden.

§ 16.

Daß es aber zu einer jeden Richtung R nur eine einzige ihr entgegengesetzte Richtung S gebe, ist noch was Anderes, das nicht ex definitione folgt; denn es könnte vielleicht verschiedne Winkel geben, die jeder nur einer einzigen Richtung S zukommen. |

54 § 17.

Lehrsatz. Wenn in den Richtungen (Fig. 5) aC, $a\Gamma$ die Punkte c, γ in gleichen Entfernungen von a, dann in den Richtungen ca, γa abermals die Punkte m, μ in gleichen Entfernungen von c, γ genommen werden: so sind die Winkel $ca\mu = \gamma am$.

Beweis. Denn da die Winkel $Ca\Gamma = \Gamma aC$, so läßt sich leicht zeigen, daß die bestimmenden Stücke des Winkels $ca\mu$ gleich seyen den bestimmenden Stücken des Winkels γam.[31])

§ 18.

Wenn die Richtungen ab, ac aus a (Fig. 6), und die Entfernungen ab, ac der Puncte b, c in denselben gegeben sind: so sind auch die Puncte b, c selbst bestimmt (§ 8); folglich das System der drey Puncte a, b, c gegeben, welches ein Dreyeck heißt. Auch die Entfernung bc, und die Winkel bey b, c sind bestimmt. — Hier hat man also ein Dreyeck, das nur aus 3 Puncten und 3 Winkeln der Richtungen jeglicher zwey Puncte zu dem dritten — nicht aus drey Linien — besteht. Man sieht auch, wie mehrere Lehrsätze von den Dreyecken, die in der I. Abth. noch mit dem Begriffe der Linie vermengt sind, sich schon hier (mit geringen Veränderungen) vortragen lassen; ich behielt aber den im Grunde heterogenen Begriff dort bey, um durch solche Abstractionen nicht beschwerlich zu fallen. |

55 § 19.

Lehrsatz. Wenn die Richtung ac des Punctes c zu a durch ihren Winkel mit der Richtung ab des Punctes b zu a nicht bestimmt wird:

so wird auch die Richtung bc durch den Winkel, den sie mit der ba bildet, nicht bestimmt.

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es wenigstens noch Eine von ac verschiedene Richtung, welche einen gleichen Winkel mit der ab bildet; nimmt man nun in ihr den Punct γ in der Entfernung $a\gamma = ac$ an, so werden die Systeme $\gamma ab = cab$ (Dreyecke) gleich seyn, weil ihre bestimmenden Stücke gleich sind. Folglich die Winkel $abc = ab\gamma$ und die Entfernungen $bc = b\gamma$. Daher ist die Richtung bc mit der $b\gamma$ nicht einerley, denn sonst wären c, γ (§ 8) einerley Punct. Also gibt es verschiedene Richtungen bc, $b\gamma$, welche einen gleichen Winkel mit der ba bilden.

§ 20.

Zusatz. Dasselbe gilt vom Winkel acb. — Und dieß ist eigentlich der Lehrsatz: daß in jedem Dreyecke drey Winkel sind (I. Abth. § 9).

§ 21.

Wenn aber die Richtungen ac, ab (Fig. 7) entweder einerley, oder entgegengesetzt sind, so müssen auch die Richtungen bey b, c einerley, oder entgegengesetzt seyn. Denn wäre bey Einem keins von beyden, so könnte (§ 19, 20) auch bey a keines von beyden seyn. |

§ 22. 56

Leicht läßt sich auch der allgemeine Satz beweisen: Wenn in einem Systeme von was immer für einer Anzahl Puncte das Gesetz herrscht, daß jeder einzelne Punct mit noch einem zweyten zu einem gewissen dritten in einerley oder entgegengesetzter Richtung liegt: so gilt eben dieß von jeglichen zwey zu jeglichem dritten.

§ 23.

Lehrsatz. Wenn die zwey Richtungen (Fig. 8) oa, ob weder einerley, noch entgegengesetzt sind; so haben die zwey Richtungen ao, bo nur den einzigen Punct o gemein.

Beweis. Angenommen, sie hätten noch den Punct x gemein, so folgete (§ 21), daß oa, ob einerley oder entgegengesetzt mit ox, folglich auch untereinander einerley oder entgegengesetzt wären, contra hypothesim.

§ 24.

Ich bin bis jetzt noch nicht im Stande, die Möglichkeit des Begriffs der entgegengesetzten Richtung darzuthun. Überhaupt, was ich nebst dem Bisherigen (§ 11, 14, 21) noch ferner unbewiesen aufzustellen habe, läßt sich in folgenden Satz zusammenziehen: „In einem

Systeme von drey Puncten betrachtet man das Verhältniß der Richtungen, in denen jegliche zwey zu dem dritten liegen: wenn diese Richtungen bey Einem Punkte einerley oder entgegengesetzt sind: so sind sie an zwey Puncten einerley, an Einem entgegen-
57 gesetzt.“ | Auf diese Voraussetzungen, die sich alle ohne den Begriff der geraden Linie erweisen lassen müssen, insofern also auch absque petitione principii für meinen Zweck angenommen werden können, läßt sich eine Theorie der geraden Linie gründen, deren vornehmste Sätze nun folgen.

§ 25.

Erklärung. Man nenne (der Kürze wegen) den Punct m (Fig. 9) innerhalb oder zwischen a und b, wenn die Richtungen ma, mb entgegengesetzt sind.[32])

§ 26.

Erklärung. Ein Ding, welches alle jene, und nur jene Puncte enthält, die zwischen den zwey Puncten a und b liegen, heißt eine gerade Linie zwischen a und b.

§ 27.

Anmerkung. Die Möglichkeit dieses Dinges folgt aus dem in § 24 Angenommenen. — Aus dem Folgenden zeigt sich auch, daß dieses Ding eine unendliche Anzahl von Puncten enthält, daher etwas von einem bloßen Systeme der Puncte der Qualität nach Verschiednes seyn muß.[33])

§ 28.

Lehrsatz. Zwey gegebene Puncte bestimmen die gerade Linie, die zwischen denselben liegt.

Beweis. Denn die gerade Linie zwischen a und b soll alle Puncte
58 enthal- | ten, die zwischen a und b liegen, und sonst keine andere. Also gibt es nur ein einziges Ding, das die gerade Linie zwischen a und b heißt.

§ 29.

Lehrsatz. Wenn die Entfernungen $ab = \alpha\beta$ (Fig. 9), so sind auch die Geraden $ab = \alpha\beta$.

Beweis. Denn ihre bestimmenden Stücke (§ 28) sind gleich.

§ 30.

Lehrsatz. Zu jeglichen zwey gegebenen Puncten (Fig. 10) a, b gibt es Einen und nur Einen Mittelpunct, d. h. einen Punct, der aus beyden auf gleiche Art bestimmt wird.

Beweis. In den entgegengesetzten Richtungen $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$ nehme man die Puncte α, β in willkührlichen gleichen Entfernungen $\gamma\alpha = \gamma\beta$; so wird γ aus α so bestimmt, wie aus β. Nun sey, wo möglich, δ noch ein andrer Punct, der ebenfalls aus α eben so bestimmt werde, wie aus β. Folglich müssen die Entfernungen $\delta\alpha = \delta\beta$. Daher können die Richtungen $\delta\alpha$, $\delta\beta$ nicht einerley seyn; sonst wären α, β einerley Punct. Wären sie nun zwar verschieden, aber nicht entgegengesetzt, so wären auch die Richtungen $\alpha\beta$, $\alpha\delta$ verschieden, und nicht entgegengesetzt (§ 20); also würde die Richtung $\alpha\delta$ durch die $\alpha\beta$, folglich auch der Punct δ durch α, β nicht bestimmt. Demnach müssen $\delta\alpha$, $\delta\beta$ entgegengesetzt, folglich (§ 24) $\alpha\beta$, $\alpha\delta$ einerley seyn. Aber auch die Richtungen $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ sind einerley; also die Richtungen $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ einerley. Folglich (§ 24) die Richtungen ent- | weder bey γ oder bey δ entgegengesetzt. Ich nehme 59
das erstre an. (Gleicherweise wird im andern Fall geschlossen.) Man gedenke in der Richtung $\gamma\alpha$, die der $\gamma\delta$, oder $\gamma\beta$ entgegengesetzt ist, ε in der Entfernung $\gamma\varepsilon = \gamma\delta$, so folgt, weil auch $\gamma\alpha = \gamma\beta$, daß auch die Entfernungen $\alpha\varepsilon = \beta\delta$, indem sie auf gleiche Art bestimmt werden; und so wie $\beta\delta$, $\beta\alpha$ einerley Richtungen sind, müssen auch $\alpha\varepsilon$, $\alpha\beta$ einerley Richtungen seyn. Also (per demonstrationem) $\alpha\varepsilon$, $\alpha\delta$ einerley Richtungen, und auch die Entfernungen $\alpha\varepsilon = \beta\delta = \alpha\delta$, also ε, δ einerley Punct; welches widersprechend. Mithin ist der Punct γ nur der Einzige, der aus α, β auf gleiche Art bestimmt wird. – Haben nun α, β einen Mittelpunct, so müssen auch jegliche 2 andere Puncte a, b einen haben (I. Abth. § 19).

§ 31.

Lehrsatz. Wenn der Punct c (Fig. 11) innerhalb der Puncte a, b liegt; so sind die geraden Linien zwischen a, c und zwischen b, c Theile, deren Ganzes die gerade Linie zwischen a, b.

Beweis. Es ist zu beweisen, daß jeder Punct der Geraden ac, oder bc zugleich ein Punct der ab, und jeder Punct der ab ein Punct entweder der ac, oder bc ist. I. Es sey m ein Punct der ac, also (§ 26) die Richtungen ma, mc entgegengesetzt, die cm, ca aber einerley (§ 24). Und da ex hypothesi ca, cb entgegengesetzt, so sind es auch cm, cb. Mithin (§ 24) bc, bm einerley. Aber ebenfalls bc, ba einerley, also bm, ba einerley. Gleicherweise zeigt sich | am, ab einerley; also (§ 24) ma, mb entgegengesetzt, 60
folglich m ein Punct in der Geraden ab. II. Es sey o ein Punct in der Geraden ab, folglich die Richtungen ao, ab und bo, ba einerley. Aber ex hypothesi ca, cb entgegengesetzt, folglich ac, ab einerley. Mithin ac, ao einerley. Folglich (§ 24) die ca, co entweder einerley oder entgegengesetzt. Ist das erstere, so liegt also o in gerader Linie ac. Ist das letztere, so zeigt sich eben so leicht, daß o in der geraden Linie bo liegt.

§ 32.

Lehrsatz. Wenn die Puncte m, n (Fig. 12) beyde innerhalb der a, b liegen, so ist die Gerade mn ein Theil der Geraden ab.

Beweis. Auf ähnliche Art.

§ 33.

Lehrsatz. Wenn die Entfernungen (Fig. 13) $ab = bc = cd =$ etc., dann die Richtungen ba, bc; ferner cb, cd; u. s. w. entgegengesetzt sind: so kann die gerade Linie zwischen a und d betrachtet werden als eine Größe, welche, wenn $n + 1$ die Zahl der Puncte a bis d ist, die Zahl n ausdrückt, wenn ihr Maß die Gerade ab ist.

Beweis. Aus (§ 31) folgt, daß man die Gerade ac ansehen kann als ein Ganzes, dessen ergänzende Theile die ab, bc sind, und wieder die Gerade ad, als ein Ganzes, der Theile ac, cd; folglich auch als ein Ganzes, dessen ergänzende Theile ab, bc, cd sind. U. s. w. Diese Theile ab, bc, cd, etc. sind aber einander gleich, weil die Entfernungen $ab = bc = cd =$
61 $=$ etc. | (§ 29). Ihre Anzahl ist aber um eins geringer, als die Zahl der Puncte, wie leicht zu erweisen. Folglich u. s. w.

§ 34.

Lehrsatz. Jede gerade Linie ab (Fig. 14) kann in eine gegebene Anzahl gleicher Theile abgetheilt werden, welche zusammen die ganze ab wieder geben.

Beweis. Denn es kann bey Annahme irgend einer geraden Linie $\alpha\gamma$ eine $\alpha\beta$ gedacht werden, welche aus n Theilen $= \alpha\gamma$ besteht (§ 33). Mithin muß auch die ab einer solchen Theilung fähig seyn (I. Abth. § 19).

§ 35.

Lehrsatz. Das Maß und die Zahl (also die Größe) bestimmen die gerade Linie, der sie zukommen.

Beweis. Sollten zwey ungleiche Linien, welchen dieselbe Größe zukömmt, möglich seyn, so gedenke man sie aus demselben Puncte a (Fig. 15) in derselben Richtung; so müssen ihre zweyten Endpuncte b, β verschieden seyn (§ 20). Folglich sind die Richtungen ba, $b\beta$ entweder einerley, oder entgegengesetzt. Sey z. B. das letztere, so ist (§ 31) die gerade Linie $a\beta$ ein Ganzes, dessen ergänzende Theile die ab, $b\beta$ sind. Also ist ab allein kein ergänzender Theil der $a\beta$, folglich hat $a\beta$ keine Größe, die der ab gleich wäre.

§ 36.

Zusatz. Alle geraden Linien, die gleiche Größe haben, sind also einander gleich. |

§ 37. 62

Lehrsatz. Wenn die Richtungen *ca*, *cb* (Fig. 11) entgegengesetzt, und die Größen der Linien *ac*, *cb* bey einem gemeinsamen Maße durch die Zahlen m, n ausgedrückt sind: so ist die Größe der Geraden *ab* bey gleichem Maße durch die Zahl $m + n$ ausgedrückt.

Beweis. Denn nach (§ 31) ist die Linie *ab* ein Ganzes, dessen intergirende Theile *ac*, *cb;* u. s. w.

§ 38.

Lehrsatz. Wenn die Richtungen *ab*, *ac* (Fig. 11) einerley, und die Größen der Linien *ab*, *ac* (Fig. 10) bey einem gemeinsamen Maße durch die Zahlen $m + n$, m ausgedrückt sind: so ist die Größe der Geraden *bc* bey gleichem Maße durch die Zahl n ausgedrückt.

Beweis. Denn *ac*, *cb* sind die integranten Theile der Geraden *ab*, also $ac + cb = ab$, oder in Zahlen $m + cb = m + n$, daher $bc = n$.

§ 39.

Lehrsatz. Zu jeglichen drey Entfernungen (Fig. 16) *ab*, *cd* und $\alpha\beta$ gibt es noch eine vierte $\gamma\delta$ von der Beschaffenheit, daß alle Prädicate, welche aus der Vergleichung der beyden Entfernungen *ab*, *cd* entspringen, gleich seyen den Prädicaten, welche die Vergleichung der beyden $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ liefert.

Beweis. Widrigenfalls müßten wir eine besondere Vorstellung a priori von der bestimmten Entfernung *ab* haben, gemäß welcher etwas von ihr gälte, das von der $\alpha\beta$ nicht gilt. |

§ 40. 63

Zusatz. Daß die Vergleichung zwischen *ab*, *cd* so weit getrieben werden könne, daß die daraus resultirenden Merkmale die *cd* aus der *ab* bestimmen: läßt sich auch leicht darthun. Und bestimmt *ab* die *cd*, so bestimmt auch $\alpha\beta$ die $\gamma\delta$.

§ 41.

Lehrsatz. Dasselbe (§ 39) gilt auch von geraden Linien.

Beweis. Weil diese durch die Entfernungen bestimmt werden (§ 28, I. Abth. § 17).

§ 42.

Zusatz. Also gibt es zu jeglichen drey gegebenen Linien Eine und nur Eine (§ 40) vierte proportionale Linie.

§ 43.

S c h l u ß a n m e r k u n g. Diese wenigen Sätze sind wohl hinreichend die Art zu zeigen, wie ich eine vollständige Theorie der geraden Linie auf die vorausgeschickten Grundsätze zu erbauen dächte. Zum Schlusse dieses Aufsatzes will ich eine D e f i n i t i o n d e r E b e n e beysetzen, nach welcher ich eine neue Theorie der Ebene zum größern Theil bereits entworfen habe. „Die E b e n e d e s W i n k e l s *ras* (Fig. 3) ist dasjenige Ding, welches alle und nur jene Puncte enthält, die durch ihr Verhältniß (ihre Winkel und Entfernungen) zu den zwey Richtungen *R*, *S* bestimmt werden können."[34])