Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie

I. Versuch die ersten Lehrsätze von Dreiecken und Parallellinien mir Voraussetzung der Lehre von der geraden Linie zu beweisen §1 - §67

In: Bernard Bolzano (author): Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. (German). Prag: Karl Barth, 1804. pp. 1--43.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400152

I.

Versuch die ersten Lehrsätze von Dreiecken und Parallellinien mit Voraussetzung der Lehre von der geraden Linie zu beweisen.

§. 1.

Erkl. **Winkel** ist dasjenige Prädicat zweyer gerader Linien ca, cb (Fig. 1) die einen ihrer äußersten Punkte c gemein haben: welches Prädicat jedem andern Systeme der zwey Linien $c\alpha$, $c\beta$ die bey demselben Anfangspunkte c **Theile** jener sind, gemeinschaftlich zukömmt. — c heißt des Winkels **Scheitel**, und die Linien ca, cb insofern von ihrer Länge dergestalt abgesehen wird, daß man auch die Linien $c\alpha$, $c\beta$ für sie nehmen kann, seine **Schenkeln**.

§. 2.

Anm. Die Umschreibung, die diese Definition verlängert, verursacht der Sprachgebrauch welcher den W. acb **gleich** $\alpha c\beta$ nennt, dem zufolge der **Winkel** eigentlich eine Eigenschaft zweyer **Richtungen** (wie ich das Wort in der

II. Abtheilung erkläre) nicht aber zweyer Linien ist. Andere sagen: "der Winkel ist von der Größe der Schenkel unabhängig;" welches jedoch nur mit der Einschränkung verstanden werden müßte, daß man die Größe eines Schenkels nie negativ nimmt. — Daß übrigens der von mir gewählte Ausdruck vollständig sey, erhellet von selbst bey mäßigem Nachdenken. Um z. B. zu beweisen, daß der Winkel acb = $\alpha c\beta$ (fig. 2) sey, schließt man unmittelbar ex def. acb = $ac\beta$, $ac\beta = \alpha c\beta$, also acb = $\alpha c\beta$.

§. 3.

Lehrs. Jeder Winkel bestimmt seinen Nebenwinkel.

Bew. Aus der Erkl. (1) ergibt sich, ein Winkel sey bestimmt, wenn es seine Schenkeln sind. Nun bestimmen die Schenkeln des gegebenen Winkels zugleich die seines Nebenwinkels. Denn diese sind: der Eine ein Schenkel des gegebenen Winkels selbst, der Andre eine Verlängerung vom andern Schenkel des gegebenen Winkels über seinen Scheitel. Aus der Lehre von der geraden Linie weiß man nun, daß diese Verlängerung (abgesehn von ihrer Länge, im obigen Sinne (1)) gegeben sey.

§. 4.

Zus. Sind also zwey Winkeln gleich, so sind auch ihre Nebenwinkeln gleich. Denn

Din-

Dinge, die auf gleiche Art bestimmt werden, sind gleich.

§. 5.

Lehrs. Scheitelwinkel sind gleich, $ac\beta = bc\alpha$ (fig. 3).

Bew. Ihre bestimmenden Stücke sind gleich. Der W. $ac\beta$ ist ein Nebenw. des acb, der W. $bc\alpha$ in eben der Ordnung ein Nebenw. des bca. Ist also $acb = bca$, so ist auch $ac\beta = bc\alpha$ (3, 4).

§. 6.

Anm. Der ordentliche Weg die Gleichheit zweyer Dinge darzuthun, ist kein andrer: als daß man ex datis die Gleichheit ihrer bestimmenden Stücke schließe. (§. 4.) Diesen Weg beobachtet der Euklidische Beweis des gegenwärtigen Satzes nicht. Er hat aber in meinen Augen noch nebst dem zwey Mängel. Erstlich menget er schon hier die fremdartige Betrachtung einer Ebne mit ein; denn er addirt Winkeln, welches immer nur unter der (obwohl verschwiegenen) Bedingung vorgenommen wird, daß sich die Winkeln in derselben Ebene befinden. Zweytens setzt er voraus, daß Winkel Größen seyen, in welcher Voraussetzung er sie addirt und subtrahirt, und dem bloß arithmetischen Grundsatze: „Gleiches von Gleichem abgezogen, gibt gleiche Reste„ unterwirft. — Größe heißt ein Ding, insofern es angesehen wird als bestehend aus einer Anzahl (Vielheit) von Dingen, die

 der

der Einheit (oder dem Maße) gleich sind. Sollte ich mir also einen Winkel als eine Größe denken, so müßte ich mir ihn, dem zufolge, vorstellen als zusammengesetzt aus mehreren einzelnen gleichen Winkeln in Einer Ebene; welches — man mög' es ausdrücklich oder nicht ausdrücklich sagen — eigentlich nichts als die Vorstellung des innerhalb der Schenkeln begriffenen Flächenraums ist; so daß also Hr. Schultz Recht hätte, wenn er diesen unendlichen Flächenraum als eine wesentliche Eigenschaft des Winkels betrachtet. Der Verfasser der Bemerkungen über die Theorien der Parallelen des H. Hofpr. Schultz u. s. w. (Libau, 1796.) der diese Voraussetzung des H. Schultz weitläufig widerlegt, thut doch nichts Bessers, weil er die Winkeln noch immer als Größen betrachtet, und nur noch den Begriff der Bewegung mit einmengt, indem er (S. 55.) den Winkel als den Begriff des Verhältnisses der gleichförmigen Bewegung einer geraden Linie um Einen ihrer Punkte zu einer ganzen Umdrehung definirt. Dadurch entdeckt er uns aber deutlich den wahren Ursprung aller Vorstellungen der Winkel als Größen, welcher meiner Meynung nach kein anderer als der empirische Begriff der Bewegung war. — Es ist nun offenbar, daß ich mir zwey Linien mit einem gemeinsamen Endpunkte, also einen Winkel (§. 1) denken kann, ohne auf eine Fläche, oder auf andre dazwischen gezogene Linien (Theilwinkeln) oder auf eine Bewegung, durch welche

die

die Eine dieser Linien aus der Lage der andern in die ihrige gekommen, gedenken zu müssen. Folglich ist der Winkel seinem Wesen nach keine Größe. Dieß sah schon der gründliche Tacquet wohl ein (Elem. Geom. l. 3. Prop. 16. Schol.) Nur wundert mich, daß er die gewöhnliche entgegengesetzte Vorstellungsart bloß für eine abgekürzte, obgleich unschickliche doch unschädliche Redensart erklärte, die man also immerhin beybehalten dürfte. Ist der Winkel eine bloße Qualität, so kann man zuförderst bloß von Gleichheit oder Ungleichheit (oder wie T. will: Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit) der Winkel reden; aber nicht von Größer- oder Kleinerseyn; als welches zwey besondre Arten des Ungleichseyns bedeutet, die eigentlich nur von Größen gelten, oder über deren Sinn man doch wenigstens erst übereingekommen seyn muß. — Ich werde also die Winkeln nirgends als Grössen behandeln, und verwerfe alle Beweise im Euklid als unbrauchbar, wo sie so betrachtet werden. Demohngeachtet wird dieß in dem ganzen algebraischen Theile der Geometrie keine Änderung nach sich ziehn, weil man hie (bekanntlich) Kreisbögen und nicht Winkeln vor sich hat.

§. 7.

Erkl. Werden in den Schenkeln ca, cb eines Winkels (fig. 4) zwey Punkte a, b außer dem Scheitel c, und durch sie eine gerade Linie ab angenommen, so heißt das System der geraden Linien ca, cb, ab ein Dreieck.

§. 8.

Anm. Also ist von keinem Flächenraum die Rede.

§. 9.

Zus. In jedem Dreieck kommen drey Winkeln vor. Jeder derselben wird von zwey Seiten eingeschlossen. (d. h. hat sie zu Schenkeln), und steht der dritten gegenüber (d. h. hat sie zu keinem Schenkel). Jeder Seite liegen zwey Winkeln an (d. h. sie gibt einen Schenkel von zweyen ab). — Dieß sind zwar eigentliche Lehrsätze; aber so leicht zu erweisen, daß ich damit den Raum spare.

§. 10.

Lehrs. In zwey gleichen Dreiecken sind I. die Seiten gleich, die zwey gleichen Seiten entgegenstehn, oder einem gleichen Winkel gegenüberstehn, oder denen zwey gleiche Winkeln anliegen; II. die Winkeln gleich, die zwey gleichen Winkeln entgegenstehn, oder von zwey gleichen Seiten eingeschlossen werden, oder einer gleichen Seite gegenüber stehen.

Bew. Diese Seiten (I) und Winkeln (II) werden durch die erwähnten Angaben in ihren Dreiecken bestimmt; denn es gibt zufolge (9) nur Eine S., nur Einen W., dem diese Angaben zukommen. Da nun die Dreiecke selbst, und diese Angaben in ihnen gleich sind, so sind die bestimmenden Stücke dieser S. und W. gleich.

§. 11.

Anm. Ich nenne Dreiecke nur schlechtweg gleich, die man sonst gleich nnd ähnlich nennt. Das Wort gleich sagt dem Sprachgebrauche gemäß mehr als das Wort ähnlich, so daß, wenn man zwey Dinge gleich nennt, sie darum auch schon ähnlich seyn müssen. Aber Eine Eigenschaft dieser Dinge, (welche sie nicht bestimmt), z. B. die Größe zweyer Flächenräume kann gleich seyn, ohne daß die Dinge, die Flächenräume, darum selbst gleich sind. Diese Eine Eigenschaft sollte man auch nicht mit dem Nahmen des Dinges selbst belegen; also nicht sagen: „zwey Dreiecke sind gleich" wenn man eigentlich nur sagen will: daß die Größen ihrer Flächenraume gleich sind. Enthält man sich dieser ziemlich unmathematischen Metonymie, so wird auch der sprachwidrige Beysatz ähnlich zu dem Worte gleich überflüßig bleiben. Wenn aber Einige das Wort gleich nicht anders gebraucht wissen wollten, als nur von der Eigenschaft der Größe: so bitte ich sie um ein andres Wort, welches man zur Bezeichnung dieses Begriffes allgemein brauchen könne? — Einerley ist dieß Wort nicht; denn so heißt nur ein und dasselbe Ding, insofern es mit sich selbst verglichen wird.

§. 12.

Lehrs. Zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bestimmen das Dreieck, dem sie zugehören.

Bew.

Bew. Aus der Erkl. (1) folgt unmittelbar, daß der Winkel und die bestimmte Länge der Stücke ca, cb seiner Schenkel zusammen alle Prädicate des Systems der zwey Linien ca, cb enthalte. Denn der Winkel allein enthält dasjenige, was von der bestimmten Länge der Linien ca, cb unabhängig ist; kömmt also diese auch noch hinzu, so ist alles an diesem Systeme bestimmt. Nun versteht man unter Seiten (eines Dreiecks) — zum Gegensatz von Schenkeln — bestimmte Linien. Also ist alles an dem Syst. der 2 L. ca, cb bestimmt; folglich auch die Punkte a, b; also auch die ger. L. ab, die durch sie gezogen wird (§. 7); folglich auch die Winkeln, die sie mit den beyden andern Seiten bildet.

§. 13.

Anm. Aus diesem Satze wird man nun zwey correspondirende Lehrsätze, den Einen von der Gleichheit, den Andern von der Ähnlichkeit der Dreiecke folgern.

§. 14.

Lehrs. Zwey Dreiecke, in denen zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich sind, sind selbst gleich.

Bew. Denn ihre bestimmenden Stücke sind gleich. (§. 12.)

§. 15.

Zus. Hieraus ergeben sich durch bloße Verneinung des Nachsatzes (conc. hyp. in modo toll.)

etwel-

etwelche Sätze. Z. B. Wenn 2 S. gleich, die dritte aber ungleich, so muß auch der eingeschl. W. ungleich seyn. u. s. w.

§. 16.

Erkl. Zwey räumliche Dinge heißen ähnlich, wenn alle Merkmale, die aus der Vergleichung der Theile eines jeden unter sich hervorgehen, in beyden gleich sind; oder wenn sich durch jede mögliche Vergleichung der Theile eines jeden unter sich, kein ungleiches Merkmal wahrnehmen läßt

§. 17.

Lehrs. Dinge, deren bestimmende Stücke ähnlich sind, sind selbst ähnlich.

Bew. Sollten sie unähnlich seyn, so müßte sich aus der Vergleichung der Theile eines einzelnen unter sich ein ungleiches (d. h. in dem andern nicht so vorhandnes) Merkmal wahrnehmen lassen. Diese Ungleichheit forderte einen Erkenntnißgrund in den Dingen selbst, also in ihren bestimmenden Stücken (denn aus diesen muß alles zu ersehen seyn, was in den Dingen selbst liegt). Also müßte in den bestimmenden Stücken eine aus ihrer Vergleichung unter sich erkennbare Verschiedenheit vorhanden seyn; folglich wären sie nicht ähnlich (§. 16).

§. 18.

Anm. Dieser Satz liegt den Lehrsätzen von der Ähnlichkeit eben so zum Grunde, wie der

Satz:

Satz: „Dinge, deren bestimmende Stücke gleich sind, sind selbst gleich" (§. 4) den Lehrsätzen von der Gleichheit (§. 6).

§. 19.

Grundsatz. Es ist uns keine besondere Vorstellung von irgend einer bestimmten Entfernung (oder absoluten Länge einer Linie) d. h. von einer bestimmten Art des Auseinanderseyns zweyer Punkte a priori gegeben.

§. 20.

Lehrs. Alle gerade Linien sind ähnlich.

Bew. Gerade Linien werden durch ihre beyden Endpunkte bestimmt. Nun haben wir (§. 19) keine besondre Vorstellung von irgend einem bestimmten Auseinanderseyn zweyer Punkte. Also ist jegliches Auseinanderseyn zweyer Punkte dem andern ähnlich. Also auch alle gr. Linien selbst (§. 17).

§. 21.

Lehrs. Zwey Dreyecke, in denen zwey Seiten um einen gleichen eingeschlossenen Winkel proportionirt sind, sind selbst ähnlich.

Bew. Die bestimmenden Stücke dieser Dreiecke sind ähnlich. Diese sind (§. 12) ein Winkel mit den Seiten, die ihn einschließen, oder (weil das Verhältniß einer Linie zu einer andern, jene aus dieser bestimmt) ein Winkel, eine Seite und das Verhältniß der andern zu der ersten. Nun ist der Winkel und das Ver-

hält-

hältniß in beyden Dreyecken gleich, (folglich auch ähnlich), die Eine Seite aber ähnlich; folglich sind die bestimmenden Stücke ähnlich.

§. 22.

Lehrs. Ähnliche Winkeln sind gleich.

Bew. Das Wort Winkel bezeichnet (1) den Bestimmungsgrund alles an dem Systeme zweyer Richtungen am, an (fig. 5.) Bemerkbaren. Dieses ist: die Entfernung mn, welche jegliche zwey Punkte m, n, die man in beyden Richtungen durch willkührliche Entfernungen am, an bestimmt, von einander haben; die Entfernung pr, welche jeglicher Punkt p in der Einen-Richtung am, von einem Punkte r in der mn hat, u. s. w. — Sind also in zwey vorgegebenen Winkeln alle diese bemerkbaren Stücke gleich; so heißt dieß nichts anders, als die Winkeln selbst sind gleich. — Nun seyen a, und α (fig. 6) ähnliche Winkeln; so muß wenn $am : an : = \alpha\mu : \alpha\nu$, sich auch (§. 16) $am : mn = \alpha\mu : \mu\nu$ finden, sonst würde die Vergleichung der Theile des Winkels α unter sich nicht eben die Vorstellung hervorbringen, wie die der Theile des W. a. — Man gedenke nun αo (in der Richtung $\alpha\mu$) = am und αu (in der Richtung $\alpha\nu$) = an; folglich $\alpha\mu : \alpha\nu = \alpha o : \alpha u$. Mithin (wenn man ou zieht) (§. 21) $\Delta o\alpha u \backsim \Delta\mu\alpha\nu$; woraus (16) $ou = \frac{\mu\nu \cdot \alpha o}{\alpha\mu} = \frac{mn \cdot \alpha o}{am} = mn.$

Auf gleiche Art wird gezeigt, daß auch, wenn

$o\pi = mp$, $o\varrho = mr$ genommen werden, $\pi\varrho = pr$ wird. u. s. w. So daß also bey den Winkeln a, α die oben erwähnte Bedingung der Gleichheit aller Merkmale eintritt; demnach sind diese Winkeln gleich.

§. 23.

Zus. In ähnlichen Dreyecken sind also die Winkeln, die proportionirten Seiten entgegenstehn gleich. (§. 16. 10. 22.)

§. 24.

Anm. Diese Lehre von der Ähnlichkeit, als auch ihre folgende Anwendung ist für mich ein Resultat meines selbsteignen Nachdenkens; obgleich schon Wolf dieselbe Lehre in seiner Philosophia prima seu Ontologia, Sect. III. Cap. I. de Ident. et simil., wie auch in den Elementis Math. univ. ausführlich vorträgt; und sie mithin der gelehrten Welt vorlängst bekannt ist. Ich selbst habe das erstere Werk erst unlängst, das andere zwar schon vor vielen Jahren, nicht um die Elemente daraus zu erlernen, sondern nur in der Absicht etwa ein unbekanntes Problem darinn zu finden, cursorisch durchgelesen, wobey ich denn die Arithm. und Geom. so unvorsichtig überschlug, daß ich diese wichtige Änderung, die gleich nach den Definitionen, und dann in kleinen Scholien angeführt wird, nicht gewahr ward. — Die erste Form, die ich meinem Beweise des Satzes §. 21 gab, bevor ich Wolfs Ontologie gelesen hatte, ist

ist kürzlich folgende: Wir haben keine apriorische Vorstellung von irgend einem bestimmten Auseinanderseyn zweyer Punkte, überhaupt von irgend einem bestimmten räumlichen Dinge. Soll also eine apriorische Erkenntniß von räuml. Dingen möglich seyn, so muß diese für jedes angenommene Maß gelten. Wenn daher z. B. (Fig. 7) in dem Δacb, $cb = n. ca$, $ab = m. ca$. Und im $\Delta \alpha c\beta$, bey gleichem Winkel eben so $c\beta = n. c\alpha$ ist: so muß auch $\alpha\beta = m. c\alpha$ seyn; weil wir widrigenfalls eine apriorische Vorstellung von der bestimmten Linie ca haben müßten, bey welcher allein die Zahl m gilt. — Meine Absicht bey der Erfindung dieses Beweises war: um mittelst der Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke, die bekannte Lücke in der Theorie der Parallelen zu ergänzen. — In der That, sollte man auch mit Wolfens (oder meinem) Beweise der Lehre von der Ähnlichkeit der $\Delta\Delta$ nicht ganz zufrieden seyn: so schiene mir doch noch das Bemühen, diese Lehre — (aus einem von Parallellinien und Betrachtungen der Ebene unabhängigem Grunde) — zu erweisen, eine nähere Beherzigung der Geometer zu verdienen. — Kant hat angemerkt (Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume. 1763 — zu finden in der Sammlung einiger seiner Schriften von Rink), und diesen Gedanken noch sonst (Prolegomena S. 57 f.) wiederholt: daß es Unterschiede (also auch Eigenschaften, worauf sie sich gründen) in räumlichen

lichen Dingen gebe, die aus keiner Vergleichung der Theile eines jeden untereinander erkannt werden. Denn es gibt räuml. Dinge, die einander völlig gleich und ähnlich sind, und sich doch nicht in denselben Raum bringen lassen; also doch einen Unterschied besitzen müssen. Dergleichen sind z. B. zwey gleiche sphär. Triangel auf entgegengesetzten Hemisphären. Kant nennt den Grund dieses Unterschieds die Gegend, nach welcher zu die Theile des einen und des andern räuml. Dinges liegen. — Diese Kantische Bemerkung ist zwar ganz richtig: indessen ist nicht bloß die Gegend, es ist auch zweytens die bestimmte Art des Auseinanderseyns (die Entfernung) eine Eigenschaft, die sich aus keiner Vergleichung der Theile eines Dinges untereinander erkennen läßt. So zwar, daß wenn in zwey Dingen alle Eigenschaften, die aus der Vergleichung der Theile eines jeden unter sich bemerket werden können, gleich sind: so folgt erst nur soviel, daß beyde Dinge ähnlich sind; ungleich können sie noch immer seyn. Sollen zwey Dinge auch als gleich erkannt werden, so muß man das Eine mit einem Theile des Andern, oder allgemein: man muß beyde mit Einerley drittem Dinge (einem gemeinschaftlichen Maße) vergleichen *). — Der Grund hievon liegt

*) So hätte also Kant in seiner Abhandlung nicht nur den Begriff der Gegend, sondern auch den des

liegt darinn, daß wir a priori keine Vorstellung von irgend einem bestimmten Auseinanderseyn zweyer Punkte (Entfernung) haben; daher uns nichts übrig bleibt, als das Bemerken der Verhältnisse verschiedener Entfernungen gegeneinander. Diese Wahrheit ist es, die ich §. 19 als einen Grundsatz aufgestellt. — Als einen Beweggrund entweder zur Annahme der vorhandenen, oder zur Aussinnung irgend einer andern Beweisart der Lehre von der Ähnlichkeit, erlaube ich mir noch folgende Erinnerung. Muß nach einer richtigen Methodik von jedem systematischen Beweise gefordert werden, daß er die Verbindung des Subjectes mit dem Prädicate darthue ohne Einmischung zufälliger Mittelbegriffe: so können unsere bisherigen Beweise von allen Lehrsätzen der Ähnlichkeit vor keiner Kritik bestehen. Ein Blick vom Sachverständigen auf unsre Lehrbücher (auf den Euklid) in dieser Rücksicht geworfen: und ich hoffe gerechtfertigt zu seyn von dem Verdachte der Verläumdung. Man hat also noch die Verbindlichkeit einen fehlerfreyen Beweis für diese Lehrsätze zu suchen. Dieser Beweis müßte, — unter andern Erfordernissen hier nur erwähnt, — dasjenige was von dem genus gilt, nicht durch eine Induction, von den einzelnen speciebus darthun. „Ähnlicher Körper Inhalte ver-

des Auseinanderseyns als eine Instanz gegen jene Philosophen anführen können, welche den Raum für ein bloßes Verhältniß der coexistirenden Dinge halten. —

verhalten sich wie die Würfeln ähnlicher Seiten, oder allgemeiner, wie was immer für andre aus ihnen auf ähnliche Art bestimmte Körper. Flächen, wie Fächen; Linien (krumme) wie Linien." — Wo vermag die Euklidische Geometrie diese Sätze in dieser ihrer Allgemeinheit darzuthun, ohne auf die Betrachtung von einzelnen Arten (Dreiecken dgl.) herabzusteigen?. — Aus §. 17 aber folgen diese Sätze in völliger Allgemeinheit, und ganz unmittelbar. Denn es seyen A, a zwey ähnliche Körper, und der Körper B aus A auf dieselbe Art bestimmt, wie b aus a; folglich auch B, b ähnlich; und man soll beweisen A: B = a: b. Das System der Körper A und B hat die bestimmenden Stücke: den Körper A und die Art, wie B aus A folgt. Diese bestimmenden Stücke sind nun ex hyp. ähnlich den bestimmenden Stücken in dem Systeme a und b. Also sind (§. 17) beyde Systeme ähnlich. Folglich alles was sich in dem einem Systeme durch Vergleichung seiner Theile bemerken läßt, auch in dem anderm gleich. Wenn man daher die körperlichen Inhalte der Körper A, B; a, b vergleicht; so muß A: B = a: b. — Denselben Beweis wird man von selbst auf Flächen und Linien anwenden können. — Schließlich bemerke ich noch, daß ich eben diesen Grundsatz (§. 19) auch in der Mechanik zum Beweise ihrer ersten unentbehrlichsten Sätze gebrauche; und daß er überhaupt in allen Theilen der Mathematik (die Arithm. und Algebra ausgenommen, —

weil

weil sie kein besonderes Ding, sondern die abstracte Vielheit selbst zum Gegenstande hat — mit Nutzen anzuwenden glaube.

§. 25.

Lehrs. Im gleichschenklichten Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich. $a = b$. (Fig. 8.)

Bew. Sie werden auf gleiche Art bestimmt. Aus §. 14 folgt $\Delta acb = \Delta bca$ (in der Ordnung der Buchstaben). Denn ca in $\Delta acb = cb$ in Δbca; cb in $\Delta acb = ca$ in Δbca; $< acb$ in $\Delta acb = < bca$ in Δbca. Folglich nach (§. 10) $< b$ entgegeng. der ac im $\Delta acb = < a$ entgegeng. der bc im Δbca.

§. 26.

Lehrs. Es ist möglich aus einem Punkte einer geraden Linie eine andere so aufzurichten, daß die beyden Nebenwinkel, die sie mit den Segmenten jener bildet, gleich sind.

Bew. Es ist möglich zwey gleiche gerade Linien $ca = cb$ (Fig. 9) unter irgend einem Winkel c verbunden zu gedenken. Zieht man nun ab, und gedenkt in o die Mitte von ab (ein in der Leh. v. d. ger. Lin. zu erklärender Begriff), und zieht endlich co: so ist (§. 25) $a = b$, und p. constr. $ac = bc$, $ao = bo$. Also (§. 14) $\Delta cao = \Delta cbo$. Mithin (§. 10) $< coa = < cob$.

§. 27.

Anm. Euklid trägt diesen Satz in der Form einer Aufgabe vor. Da nun die theoretische Geometrie (z. B. des Euklids) durch ihre Aufgaben bekanntlich nur die Absicht hat, die Möglichkeit dieses oder jenes räuml. Dinges zu zeigen; im Gegentheil die Absicht, Anweisung zu geben, wie sich durch einige einfache Instrumente (z. B. Lineal und Zirkel) allerley räuml. Dinge empirisch construiren lassen, eine praktische ist: so sind die Aufgaben der theor. Geometrie mehr eigentliche Lehrsätze, welche Form ihnen also auch schicklicher gebührt. Dagegen könnte der praktische Theil der Geometrie die Aufgaben abgesondert enthalten; und dieser Meynung war auch der Jesuit P. I. Gaston Par dies. — Aus dem angeführten Grunde muß es aber auch (was wichtiger ist) dem Theoretiker erlaubt seyn, gewisse räumliche Dinge anzunehmen, ohne die Art ihrer wirklichen Construction zu lehren, wenn er nur ihre Möglichkeit erwiesen hat. Aus dieser Absicht nahm ich bey gegenw. Satze die Mitte von ab an, ohne zu zeigen, wie sie gefunden werde; und bald in der Folge werde ich zu drey gegebenen die vierte proportionale Linie annehmen, ohne zu zeigen, wie sie zu construiren wäre; genug daß aus (§. 20) unmittelbar die Möglichkeit erhellet, zu der L. c eine gewisse d zu denken, die eben das Verhältniß zu ihr habe, welches die L. b zu a hat.

§. 28.

Lehrs. Es ist möglich, aus einem Punkte einer geraden Linie eine andere so aufzustellen, daß die gebildeten Nebenwinkel ungleich sind.

Bew. Wie in §. 26; nur seyen ca, cb ungleich, und statt §. 14 werde §. 15 angewendet.

§. 29.

Zus. Aus 26, §. 28 folgt nun die Möglichkeit aus jedem Punkte jeder ger. L. eine andere so zu ziehen, daß die gebildeten Nebenwinkel bald gleich (§. 26) bald ungleich (§. 28) werden: weil jede ger. L. durch Verkürzung oder Verlängerung der ab (§. 26, 28) gleich, und der in ihr gegebene Punkt ihr Mittelpunkt o werden kann; da denn von ihr möglich seyn muß, was von ab in (§. 26, 28) möglich ist.

§. 30.

Lehrs. Jedes System einer zu beyden Seiten ins Unbestimmte verlängerten ger. Linie, und eines außerhalb ihrer befindlichen Punktes — ist jedem andern solchen Systeme gleich. (Fig. 10) o, xy $\backsim$ ω, ξη.

Bew. Denn es läßt sich in beyden Systemen aus der Vergleichung ihrer Theile kein Unterschied bemerken. (§. 16) Da die ger. Linien xy, ξη zu beyden Seiten ins Unbestimmte verlängert sind, so läßt sich kein Punkt in denselben, durch die Lage, die er in ihnen hat, bestimmen.

Da nun die Punkte, o, ω außerhalb dieser geraden Linien liegen, so ist das wesentlich, daß jede aus o, ω in einen Punkt der unendlichen Linien a, α gezogene Linie mit letztern Nebenwinkel bildet. Diese in beyden Systemen so entstandenen Winkel können nun entweder ungleich oder gleich seyn. Sie seyen ungleich, so kann ich daraus doch auf keinen Unterschied in beyden Systemen schließen, weil die Punkte a, α, von denen diese Winkel abhangen, unbestimmt sind. Sind aber diese W. gleich oax $= \omega\alpha\xi$, oay $= \omega\alpha\eta$, so findet, weil die Schenkel ax, ay; $\alpha\xi$, $\alpha\eta$ unbestimmt sind, keine Vergleichung derselben mit der Linie oa, $\omega\alpha$ statt. Für sich sind aber diese Linien ähnlich; also sind o, xy; ω, $\xi\eta$ ähnliche Systeme, in denen oa, $\omega\alpha$ ähnlich liegende Linien sind.

§. 31.

Lehrs. Es ist möglich, aus jedem Punkte o (fig. 10) außerhalb einer zu beyden Seiten ins Unbestimmte verlängerten geraden L. xy, eine andre zu ihr so zu ziehen, daß sie einen Winkel an derselben bilde gleich irgend einem gegebenen $\omega\alpha\xi$.

Bew. Man gedenke einen Punkt ω in Einem der Schenkel des gegebenen Winkels $\omega\alpha\xi$, so ist dieser ein Punkt außerhalb des andern Schenkels $\alpha\xi$; verlängert man nun diesen zu beyden Seiten ins Unendliche, so hat man ein System ω, $\xi\eta$ eines Punkts und einer außerhalb

des-

desselben befindlichen unbestimmten ger. L., welches also dem gegebenen Systeme o, xy ähnlich ist. (§. 30) Folglich, weil sich in jenem eine Linie aus ω so auf $\xi\eta$ ziehen läßt, daß sie den W. $\omega\alpha\xi$ bildet, so muß auch in dem gegebenen Systeme, aus o eine Linie auf xy möglich seyn, welche einen W. oax $= \omega\alpha\xi$ bilde.

§. 32.

Lehrs. Aus jedem Punkte o (fig. 11) außerhalb einer geraden Linie xy läßt sich Eine und nur Eine Linie auf die letztre so ziehn, daß sie gleiche Nebenwinkel an ihr bilde.

Bew. Daß sich doch Eine ziehen lasse, folgt aus §. 26 vergl. mit §. 31. Es sey also oax = oay. — Gleichermaßen folgt aus §. 28 vgl. mit §. 31, daß sich aus o auf xy eine Linie om ziehen lasse, welche ungleiche Nebenw. bilde, omx nicht = omy. — Sollte es nun noch eine Linie ob, geben, welche obx = oby machte; so nehme man (der ab entgegengesetzt) $a\beta$ = ab und ziehe $o\beta$. Also (§. 14) Δ oab $= \Delta\, oa\beta$. Und (§. 10) ob $= o\beta$; $<$ oba $= < o\beta a$; folglich (§. 4) $<$ obx $= < o\beta y$. Aber ex hyp. $<$ obx $= <$ oba; also $<$ oba $= < o\beta y$. Nimmt man nun $\beta\mu$ = bm an, und zieht $o\mu$, so folgt (§. 14) Δ obm $= \Delta\, o\beta\mu$. Also (§. 10) om $= o\mu$, $<$ omb $= < o\mu\beta$. Im $\Delta\, mo\mu$ (§. 25) $< om\mu = < o\mu m = < o\mu\beta$. Folglich $<$ omb $= < om\mu$. D. h. $<$ omx $= <$ omy. contr. hyp.

§. 33.

§. 33.

Zus. Also bestimmt der Punkt o die Linie oa, so die Eigenschaft haben soll, mit xy gleiche Nebenw. zu bilden. Folglich auch die Beschaffenheit der W. oax, oay selbst.

§. 34.

Lehrs. Alle Winkel, die ihren Nebenwinkeln gleich sind, sind auch unter einander gleich.

Bew. Sey (fig. 12) $\sphericalangle$ oax = $\sphericalangle$ oay, $\sphericalangle \omega\alpha\xi = \sphericalangle \omega\alpha\eta$; und wäre doch $\sphericalangle$ oax nicht = $\omega\alpha\xi$: so ließe sich aus o eine Linie ziehen, die mit xy einen Winkel = $\omega\alpha\xi$ bildete (§. 31). Diese bildete gleiche Nebenwinkeln (§. 4); kann also von oa nicht verschieden seyn. (§. 32).

§. 35.

Anm. Solche Winkeln, weil sie einander alle gleich sind, bezeichnet man also mit dem gemeinschaftlichen Nahmen der rechten Winkel.

§. 36.

Lehrs. Wenn aus dem Punkte o (fig. 13) oa lothrecht auf xy, und a die Mitte von mn ist; so sind I. die Linien om = on, II. die W. aom = aon, III. die W. amo = ano.

Bew. Folgt unmittelbar aus §. 14 und §. 10.

§. 37.

Lehrs. Umgekehrt, wenn bey dem Lothe oa entweder I. die Linien om = on, oder II. die W. aom = aon, oder III. die W. amo = ano; so ist a die Mitte von mn.

Bew. I. Ist (fig. 14) om = on, und man nimmt die Mitte von mn, p; so folgt, wie im §. 26, daß op lothrecht auf mn; also muß (§. 32) p mit a einerley seyn. II. Ist (fig. 15) $\angle$ aom = $\angle$ aon, und man gedenkt om : oa = on : oα (dieß auf oa aus o aufgetragen); so wird (§. 21) $\triangle$moa $\sim$ $\triangle$noα; folglich (§. 23) $\angle$mao = $\angle$nαo, also = R. Also α mit a einerley (§. 32). Mithin oa = oα, also wegen der Proport. auch om = on, und (§. 10) am = an. III. Ist (fig. 16) $\angle$ amo = $\angle$ ano, und man gedenkt mo : ma = no : nα (dieß auf na aus n aufgetragen); so wird (§. 21) $\triangle$oma $\sim$ $\triangle$onα; folglich (§. 23) $\angle$oam = $\angle$oαn also = R. Also α mit a einerley (§. 32). Mithin, da (§. 21) ma : ao = nα : αo, und ao = αo; auch ma = nα = na.

§. 38.

Zus. Es gibt also nicht mehr als zwey Linien om, on aus o (fig. 13) auf xy, bey denen entweder I. om = on, oder II. $\angle$ aom = $\angle$ aon, oder III. $\angle$ amo = $\angle$ ano seyn soll. Denn welches von diesen statt fände, so wäre immer noch (§. 37) am = an; nun gibt es nur

zwey

zwey Punkte in der gr. L. xy, die von demselben Punkte a gleiche Entfernung haben.

§. 39.

Lehrs. Aus demselben Punkte o (fig. 17) läßt sich nur Eine Linie oa auf die Unbegränzte xy so ziehen, daß sie mit demselben ins Unbestimmte verlängertem Theile ax dieser Linie einen gegebenen Winkel oax bilde.

Bew. Daß sich doch Eine solche Linie ziehen lasse, folgt aus §. 31. Daß sich nur Eine ziehen lasse, erhellet so. Man setze $< o\alpha x =$ $< oax$. Nun gedenke man aus o das Loth op auf xy; fiele p in a oder α, so wären $< o\alpha x$ $= < oax = R$ also a, α einerley Punkt (§. 32). Fällt p nicht in a oder α, so gedenke man ao : ap $= \alpha o : \alpha\pi$ (dieß in demjenigen Schenkel der beyden Nebenwinkel bey α angenommen, der $=$ oap ist. (§. 4).). Sodann wird (§. 21) Δ oap $\backsim \Delta o\alpha\pi$. Also (§. 23) $<$ opa $=$ $< o\pi\alpha = R$. Folglich (§. 32) π mit p einerley; also op $= o\pi$, und wegen des Verhältnisses op : pa $= o\pi : \pi\alpha$, auch pa $= \pi\alpha =$ pα. Also (a. d. L. v. d. ger. L.) entweder p die Mitte von aα, oder a mit α einerley. Das erstre kann nicht seyn, weil dann ap, αp nicht einerley ins Unendliche verlängerten Schenkel ax enthalten würden. (A. d. L. v. d. g. L.) — Also ist das zweyte.

§. 40.

Zus. Conclusio in modo tollente: Wenn also zwey Linien (Fig. 18) ac, bd mit Schenkeln, die denselben ins Unbestimmte verlängerten

Theil

Theil der xy enthalten, gleiche Winkeln bilden cax = dbx; so können diese Linien bey c, d nirgends zusammenstoßen. Deßgleichen auch ihre Verlängerungen über a, b miteinander, aγ mit b∂. (Wohl aber könnte ac mit b∂ zusammenstoßen, wie in fig. 18*). Wenn die Winkel cax = dbx = R (fig. 18**): so können cγ, d∂ schlechterdings nicht zusammenstoßen; auch ac nicht mit b∂ gegen c, ∂, weil ebenfalls < cax = < ∂bx (§. 39).

§. 41.

Lehrs. Eine Seite und die zwey ihr anliegenden Winkel bestimmen das Dreieck, dem sie zugehören.

Bew. Sollten sie es nicht bestimmen, so müßte es noch anders seyn können. Es seyen also (fig. 19) bac, bam zwey verschiedne Dreiecke, über demselben W. bac, und bey derselben S. ab, bey denen noch der zweyte W. abc = abm ist. Gedenkt man ac : ab = am : an (dieß in ab aus a aufgetragen); so wird (§. 21) Δ cab $\backsim$ Δ man; folglich (§. 23) < mna = < cba = (ex hyp.) < mba. Da nun an in ab liegt, so enthalten na, ba über a verlängert einerley unendl. Theil der ger. L. ab (A. d. Lehre v. d. g. L.). Mithin (§. 39) muß n mit b einerley seyn, folglich wegen ac : ab = am : an, ac = am; also (§. 14) Δ mab = Δ cab.

§. 42.

Lehrs. Wenn in zwey Dreiecken eine Seite

mit

mit den zwey anliegenden Winkeln gleich ist, so sind die Dreiecke selbst gleich.

Bew. Ihre bestimmenden Stücke sind gleich (§. 41).

§. 43.

Lehrs. Wenn in zwey Dreiecken zwey Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke selbst ähnlich.

Bew. Ihre bestimmenden Stücke (§. 41) die S., der jene W. anliegen (§. 20), und diese selbst sind ähnlich. (§. 17).

§. 44.

Lehrs. In jedem Dreieck ist die Summe zweyer Seiten nie der dritten gleich.

Bew. Man verzeichne diese Summe, indem man (fig. 20) ac über c verlängert, daß $c\beta = cb$. Wäre nun $a\beta = ab$, so folgte (§. 25) im $\triangle \beta ab$, $\angle \beta = \angle ab\beta$, und im $\triangle \beta cb$ $\angle \beta = \angle cb\beta$. Also (§. 42) $\triangle c\beta b = \triangle a\beta b$. Folglich (§. 10) $a\beta = c\beta$, welches widersprechend.

§. 45.

Lehrs. In einem rechtwinklichtem Dreieck, und nur in diesem ist (in arithmetischer Bedeutung) das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate der beyden Katheten. (fig. 21) $ab^2 = ac^2 + bc^2$.

Bew. I. Weil zu beweisen, daß (in Linien) $ab = ac. \frac{ac}{ab} + bc. \frac{bc}{ab}$, so construire

man

man Linien von der Größe $ac . \frac{ac}{ab}$, $bc . \frac{bc}{ab}$, so daß man $ab : ac = ac : ao$ (dieß in ab aus a) und $ba : bc = bc : bu$ (dieß in ba aus b) annehme, um (§. 21) ähnliche Dreiecke zu erhalten, nämlich $\triangle bac \backsim \triangle cao$, $\triangle abc \backsim \triangle cbu$ (in der Ordnung der Buchstaben). Folglich (§. 23) $< acb = < aoc$, $< bca = < buc$. Folglich da $< c = R$, müssen o, u einerley Punkt seyn. Da nun ex constr. ao im Schenkel ab aus a, $bu = bo$ im Schenkel ba aus b liegt, so ist o innerhalb a und b (A. d. Leh. v. d. g. L.) und $ab = ao + ob = ac . \frac{ac}{ab} + bc . \frac{bc}{ab}$. — II. Ist acb kein rechter W., so kann o mit u nicht einerley seyn, sonst wären aoc, buc gleiche Nebenwinkel; folglich kann auch nicht $ab = ao + bu = \frac{ac^2}{ab} + \frac{bc^2}{ab}$ seyn.

§. 46.

Lehrs. Drey Seiten bestimmen das Dreieck, dem sie zugehören.

Bew. Beweise ich nur, daß drey Seiten einen Winkel bestimmen; so folgt (nach §. 12), daß sie auch das Dreieck selbst bestimmen. Die Bestimmung eines (nicht gegebenen) Winkels in einem Dreieck kann ich nach dem bisherigen (§. 12. §. 41) nur dann folgern, wenn entweder (§. 12) 2 S. mit d. eingeschl. W., oder (§. 41)

1 S.

1 S. mit d. 2 anlieg. W. gegeben sind. Allemal ist also Ein gegebener Winkel erforderlich. Ich bilde also (fig. 22) im Δacb, dessen Seiten mir gegeben, selbst einen Winkel; da ich nun in rechtwinklichten Dreiecken die Seiten berechnen kann (§. 45); so werde ich mir einen rechten Winkel bilden; und weil er in einem Dreieck seyn muß, ihn dadurch bilden, daß ich ein Loth aus einer Spitze c des Dreiecks auf die entgegenst. S. ab fälle; denn dadurch allein entstehen zwey rechtw. $\Delta\Delta$ adc, bdc, welche (§. 45) die Gleichungen geben $b^2 = x^2 + y^2$, $a^2 = x^2 + (\pm c \mp y)^2 = x^2 + (c - y)^2$ (je nachdem d inner- oder außerhalb ab liegt). Aus diesen Gleichungen werden x, y ohne Zweydeutigkeit bestimmt. Diese sind aber 2 S. des Δcda, deren eingeschl. W. cda = R gegeben ist. Mithin ist (§. 12) auch der Winkel a, und eben dadurch ferner das Δ abc bestimmt.

§. 47.

Lehrs. Wenn in zwey Dreiecken die drey Seiten gleich sind, so sind die Dreiecke selbst gleich.

Bew. Denn ihre bestimmenden Stücke sind gleich. (§. 46).

§. 48.

Lehrs. Wenn in zwey Dreiecken die drey Seiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke selbst ähnlich.

Bew.

Bew. Denn ihre bestimmenden Stücke sind ähnlich. (§. 46. §. 17).

§. 49.

Anm. Warum ich die gewöhnlichen Beweise der drey Sätze v. d. Gleichh. d. Dreiecke verlassen habe? — Den Beweis des ersten Lehrsatzes (§. 14) habe ich, den Vortrag ausgenommen — nicht wesentlich geändert. Was diesen Vortrag anbelangt, ließ ich freylich den Begriff des Dekens weg, dessen man sich hier und bey einigen andern Lehrsätzen gebraucht. Ich will hier nicht die unzweckmäßige Wahl des deutschen Wortes: Deken tadeln, welches den Anfänger leicht irre führt, an ein Übereinanderliegen, und nicht an die Einerleyheit der Gränze zu denken; statt welchem schicklicher: Ineinanderfallen, Congruiren (συμπιπτειν) gebraucht würde. Aber der Begriff des Congruirens selbst ist beydes: empirisch und überflüssig. Empirisch: denn wenn ich sage: A congruirt mit B, so stelle ich mir A als ein Object vor, das ich von dem Raume, den es einnimmt (als welcher B ist) unterscheide. Überflüssig. Man gebraucht sich des Begriffs vom Deken, um nach dem Grnndsatze: „Räuml. Dinge, die sich deken, sind einander gleich" auf die Gleichheit zweyer Dinge zu schließen, wenn man gezeigt, daß sie sich in einer gewissen Lage deken. (Eigentlich beweist man so die Einerleyheit, da man doch nur die Gleichheit zu erwei=

erweisen hatte). Nun konnte man nie schließen, daß 2 Dinge congruiren, d. h. daß ihre Gränzen einerley sind, als bis man gezeigt hatte, daß alle bestimmenden Stücke einerley sind. Beweißt man aber dieses, so kann man auch ohne Deken schließen, daß die bestimmenden Dinge selbst einerley sind. — Daher hat schon Herr Hofpr. Schultz den Begriff des Dekens in s. Anfangsgründen durchaus weggelassen, ohne daß er gerade deßwegen viel umzuändern brauchte. — Anlangend die Beweise des zweyten und dritten Lehrsatzes, so sind diese (auch wie sie neuere Geometer umgeändert haben) auf Lehrsätze von der Ebene ganz gegründet. Dieses wird jeder Kenner von selbst einsehen. Nach den (Vorr.) geäußerten Grundsätzen konnte ich mich also bey ihnen nicht beruhigen. — Aber sollten wohl meine eignen Beweise der (Vorr.) gemachten Forderung entsprechen, sich aller zufälliger Mittelbegriffe zu enthalten? — Ich glaube es. Allein, da ich zu Vermeidung der Weitläufigkeit in diesem kleinen Versuche nicht von jedem eingeführten Mittelbegriffe die umständliche Deduction seiner Nothwendigkeit angeben konnte: so bitte ich deßfalls den gelehrten Leser dieses durch einiges eigne Nachdenken zu ersetzen.

§. 50.

Lehrs. Wenn im Winkel (Fig. 23) xcy, ca : cb = cd : ce, so stossen die wie immer verlängerten ab, de nie zusammen.

Bew.

Bew. (§. 21) $\triangle acb \backsim \triangle dce$; daher $ab = de\,\frac{ac}{dc}$. Man gedenke cp lothrecht auf de, und cd : cp = ca : co (in cp aus c genommen); also (§. 21) $ao = dp\,\frac{ca}{cd}$; $bo = ep\,\frac{cb}{ce}$ $= ep\,\frac{ca}{cd}$. Mithin $ao \pm op = (dp \pm pe)\,\frac{ca}{cd}$ $= de\,\frac{ca}{cd}$, also = ab. Woraus (nach §. 44 in modo toll.) sich schließen läßt, daß o in der geraden ab. Auch ist (§. 23) $\angle aoc = \angle dpc$ = R. Folglich stossen ab, de nie zusammen (§. 40).

§. 51.

Lehrs. Auch sind (fig. 23) die Lothe aus a und b auf de, $a\alpha = b\beta$, wie auch ihre Abstände $ab = \alpha\beta$. Und die Winkel bey a, b auch recht.

Bew. I. Nach (§. 43) $\triangle ad\alpha \backsim \triangle cdp$; $\triangle be\beta \backsim \triangle cep$. Folglich $a\alpha = cp.\,\frac{da}{dc}$; $b\beta = cp.\,\frac{eb}{ec} = cp\,\frac{da}{dc}$. Also $a\alpha = b\beta$.

II. Ferner $d\alpha = dp\,\frac{da}{dc}$, $e\beta = ep\,\frac{eb}{ec} = ep\,\frac{da}{dc}$. Also $\alpha\beta = de - d\alpha - e\beta = de - (dp + pe)\,\frac{da}{dc} = de\,(1 - \frac{da}{dc}) = de.\,\frac{ac}{dc} =$ (wie

§. 50

§. 50 erwiesen) ab. III. Zieht man $b\alpha$, so wird (§. 47) $\triangle ba\alpha = \triangle \alpha\beta b$, also (§. 30) $< ba\alpha = < \alpha\beta b = R$. Eben so $< ab\beta = R$.

§. 52.

Lehrs. Wenn bey vier Punkten a, b, c, d (fig. 24) vier Winkel $abc = bcd = cda = dab = R$, so ist die Linie zwischen jeglichen zwey dieser vier Punkte gleich der Linie zwischen den beyden andern. $ab = cd$, $ac = bd$, $ad = bc$.

Bew. Heisse $ab = x$, $cd = \xi$, $ac = y$, $bd = \eta$, $ad = z$, $bc = \zeta$, so wird (§. 45)

$$y^2 = z^2 + \xi^2 = x^2 + \zeta^2$$
$$y^2 = z^2 + x^2 = \xi^2 + \zeta^2$$

Daher $\xi^2 - x^2 = x^2 - \xi^2$, $\xi^2 = x^2$, oder (der Länge nach) $\xi = x$. Also auch $y = \eta$, $z = \zeta$.

§. 53.

Lehrs. Wenn (fig. 25) $< a = < b = < \alpha = < \beta = R$: so hat von den drey Bedingungen: I. $< m$ oder $< \mu = R$; II. $am = \alpha\mu$ und $bm = \beta\mu$; III. $m\mu = a\alpha$, jede die übrigen zur Folge.

Bew. I. Sey $m = R$. Heisse $a\alpha = b\beta = a$, $ab = \alpha\beta = b$, $bm = x$, $\beta\mu = y$, $m\mu = z$. Nun ist (§. 45)
$a\mu^2 = a^2 + b^2 + 2by + y^2 = b^2 + 2bx + x^2 + z^2$ und $b\mu^2 = a^2 + y^2 = x^2 + z^2$. Woraus $2by = 2bx$, $y = x$; und $am = b + x = b$

$= b + y = \alpha\mu$ folgt. Dann aus dem rechtw. $\Delta\, bm\mu$, $z^2 = a^2 + x^2 - x^2 = a^2$, also $z = a$. Endlich (aus §. 47) $\Delta\, \beta bm = \Delta m\mu\beta$, also $\sphericalangle\, m\mu\beta = R$. II. Sey $am = \alpha\mu$ und $bm = \beta\mu$. Wäre nun m kein r. W., so gäbe es doch ein Loth aus μ auf ab, und für dieses wären (ex dem. I.) $am = \alpha\mu$, $bm = \beta\mu$; nun gibt es nur einen Punkt m in der ab, der diese beyden bestimmten Entfernungen von a und b hat. Also ist m ein r. W. III. Sey $m\mu = a\alpha$. Wäre nun m kein r. W., so gäbe es doch ein Loth aus μ auf ab, und dessen Länge wäre (ex dem. I.) $= a\alpha$. Nun kann die Hypoth. μm diesem Kathet nicht gleich seyn (§. 45); folglich ist μm selbst dieses Loth.

§. 54.

Anm. Weil also alle Lothe aus Punkten Einer der beyden Linien ab, $\alpha\beta$ auf die andre gleich sind, so heißt man sie Parallellinien. Daß Wolf diese Eigenschaft zur Definition der Parallelen annahm, ohne der Pflicht zu gedenken, die Möglichkeit dieser Eigenschaft zu beweisen, das war ein sehr unphilosophischer Fehler dieses Weltweisen.

§. 55.

Zus. Die Abstände zwischen jeglichen zwey Lothen $m\mu$, $n\nu$, sind gleich $mn = \mu\nu$. Folgt a. d. Leh. v. d. g. L., weil (§. 53) zugleich $am = \alpha\mu$, $bm = \beta\mu$ seyn

 müs-

müssen; welche doppelte Entfernungen von a, b die Punkte m, n bestimmen.

§. 56.

Lehrs. Jede Linie mν, welche beyde Parallelen ab, $\alpha\beta$ durchschneidet, (fig. 25) bildet an denselben gleiche Nebenwinkel.

Bew. Man ziehe die Lothe mμ, νn aus m, ν auf die entgegengesetzte Parallele; so sind (§. 47) Δ m$\mu\nu$ = Δ νnm. Also (§. 10) die W. nmν = $\mu\nu$m.

§. 57.

Zus. Die gleichen W. m$\nu\mu$, νmn heissen Wechselswinkel. Die unendlichen Theile mx, $\nu\eta$ (fig. 25*) der Parallelen, welche die Schenkeln zweyer zusammengehöriger Wechselswinkel abgeben, und ich die Wechselschenkel nennen möchte, werden daran erkannt, daß das Loth aus dem Anfangspunkte m des Einen mx, oder aus jedem Punkte r außerhalb desselben, den andern Wechselschenkel $\nu\eta$ trifft. Vom Lothe aus m ist dieß aus §. 56 offenbar; vom Lothe aus r zeig ich dieß so: Weil r außerhalb mx, also (ex dem.) außerhalb mn liegt; so ist (vermöge den Eigensch. d. g. L.) nr > nm, und > mr. Also auch (nach §. 55) $\nu\varrho$ (= nr) > $\nu\mu$ (= nm) und > $\mu\varrho$ (= mr). Folglich (nach d. L. v. d. ger. L.) liegen μ, ϱ in einerley Richtung zu ν, oder $\nu\mu$, $\nu\varrho$ sind einerley Schenkel.

§. 58.

§. 58.

Lehrs. Die Diagonalen (fig. 26) $a\beta$, $b\alpha$ im Rechteck schneiden sich in ihrer Mitte.

Bew. Man nehme in o, u die Mitten von $a\beta$, ab; so ist $\Delta oau \backsim \Delta \beta ab$, und $ou = \frac{1}{2}\beta b = \frac{1}{2} a\alpha$, und $< auo = < ab\beta = R = buo$. Daher (§. 21) $\Delta buo \backsim \Delta ba\alpha$, also $bo = \frac{1}{2} b\alpha$. Gleicherweise $\alpha o = \frac{1}{2} \alpha b$. Folglich (§. 44 in modo toll.) o in αb, also halbiren sich $a\beta$, $b\alpha$.

§. 59.

Lehrs. Durch denselben Punkt o (fig. 27) außerhalb der Geraden xy geht nur Eine Gerade parallel zu xy.

Bew. Es seyen om, on zwey Parallelen zu xy. Man nehme (der Kürze wegen) om = on, und fälle aus m, n Lothe auf xy, so ist (§. 55) $om = a\mu$, $on = a\nu$. Zieht man am, $o\mu$, so müssen sich diese gleiche Linien in ihrer Mitte x durchschneiden (§. 58); eben so an, $o\nu$ in y. Zieht man nun die g. L. xy, mn; so ist (§. 21) $\Delta \mu o\nu \backsim \Delta xoy$, woraus $yx = \frac{\nu\mu}{2}$. Ferner (§. 47) $\Delta xoy = \Delta xay$. Auch $\Delta man \backsim \Delta xay$, woraus $mn = 2xy = \nu\mu$ folgt. Da nun ν, a, μ in einerley Geraden, und $a\mu = a\nu$; so sind entweder ν, μ einerley Punkt, und also auch m, n; mithin om, on einerley Linie: oder es liegen ν, μ auf entgegeng. Sei-

 ten

ten von a, und also auch n, m auf entg. S. von o, folglich om, on abermals in einerley ger. Linie.

§. 60.

Lehrs. Wenn in jeder der Parallelen ab, $\alpha\beta$ (fig. 28) zwey Punkte von gleichen Entfernungen mn = $\mu\nu$ gegeben sind: so sind die Linien $m\mu$, $n\nu$, durch die man diese Punkte auf bestimmte Art verbindet parallel und gleich.

Bew. Man ziehe die Lothe mp, nq, so ist (§. 55) pq = mn. Aber mn = $\mu\nu$. Also $\mu\nu$ = pq. Nun folgt aus d. L. v. d. g. L., daß es noch Eine Combination der 4 Punkte μ, ν, p, q, die sich in der g. L. $\alpha\beta$ befinden, gebe, wobey 2 Entfernungen einander gleich werden. Ist dieß $\mu p = \nu q$, so sind m, μ; n, ν die Punkte, die man verbinden muß, nm die Parallelen zu erhalten. Denn nun ist, weil auch mp = nq (§. 53), nach (§. 14) $\Delta\, mp\mu = \Delta\, nq\nu$. Folglich $m\mu = n\nu$. Man ziehe aus n, ν Lothe auf μm, so folget leicht (aus §. 21), daß, weil Einer der Nebenw. nms, $nm\mu$, = $\nu\mu r$ seyn muß (§. 56), dieses der W. nms sey, in dessen Schenkel das Loth ns einfällt. Daher (§. 44) $\Delta\, nms \backsim \Delta\, \nu\mu r$. Und da nm = $\nu\mu$, so sind ns = νr, ms = μr; folglich μm = rs; und da $\mu m = \nu n$; rs = νn. Daher (§. 47) Δ rsn = $\Delta\, n\nu r$; also $< n\nu r$ = $<$ s = R. Mithin $m\mu$, $n\nu$ Parallelen. (§. 53).

§. 61.

Lehrs. Wenn (fig. 28 *) ab par. cd, ac par. bd, so sind auch ab = cd, ac = bd.

Bew. Wäre ab nicht = cd, und man nähme in dem Theile der unbegränzten cd, der kein Wechselschenkel von ab ist, $c\delta$ = ab, so wäre $b\delta$ par. ac (§. 60). Also (§. 59) d mit δ einerley. (Weil bd mit cd nur Einen Punkt gemein haben kann).

§. 62.

Lehrs. Wenn (fig. 28 *) ab par. cd und $\angle$ acx = $\angle$ bdx; so ist auch ac par. bd.

Bew. Denn man gedenke $b\delta$ (aus b gezogen) par. ac; so sind $\angle$ acx = $\angle$ $b\delta x$ (§. 60). Also $\angle$ bdx = $b\delta x$; mithin (§. 39) d mit δ einerley.

§. 63.

Lehrs. Wenn die Linien (fig. 29) ab, de die Schenkeln des W. xcy so durchschneiden, daß entweder ca : cb nicht = cd : ce, oder die Winkel cab nicht = cde (wobey wir a, d in Einem; b, e im andern Schenkel annehmen): so stoßen ab, de irgendwo zusammen.

Bew. Von diesen zwey Bedingungen hat Eine die Andre zur Folge, wie aus §. 23, 24 mod. toll. erhellet. Es sey nun $\frac{ca}{cb} < \frac{cd}{ce}$, u. ca < cd, (der Allgemeinheit unbeschadet). — Man gedenke cd : ce = ca : cf. (Dieß in ce aus c angenommen). Also cf < ce auch < cb. Folglich f sowohl

wohl in cb, als ce; mithin $\angle$ afe $=$ $\angle$ afb. Nun ist (§. 23) $\angle$ cfa $=$ $\angle$ ced, also auch (§. 4) $\angle$ afe ($=$ $\angle$ afb) $=$ $\angle$ beo. Man gedenke fb : fa $=$ eb : eo (dieß in dem Schenkel des letztgenannten W. beo, der nähmlich $=$ $\angle$ afb ist, aus e genommen). Also (§. 21) $\triangle$ afb $\backsim$ $\triangle$ oea. Und bo $=$ ab. $\frac{eb}{fb}$. — Man gedenke dc : de $=$ da : dα (dieß in de aufgetragen); so ist subtrah. dc : de $=$ ac : αe. Aber dc : de $=$ ac : af, also αe $=$ af. Eben so zeigt sich fe $=$ aα. Wegen $\triangle$ adα $\backsim$ $\triangle$ caf, (§. 23) $\angle$ aαd $=$ $\angle$ cfa; also (§. 4) $\angle$ aαo $=$ $\angle$ afb. Ferner ist αa : αo $=$ ef : αe $+$ eo $=$ ef : af $+$ af. $\frac{eb}{fb}$ $=$ ef : af $\left(\frac{fb + eb}{fb}\right)$ $=$ ef : $\frac{af.\ fe}{fb}$ $=$ fb : af. Also (§. 21) $\triangle$ aαo $\backsim$ $\triangle$ bfa. Mithin ao $=$ ab. $\frac{a\alpha}{fb}$ $=$ ab. $\frac{ef}{fb}$. Daher (in fig. 29) ab $+$ bo $=$ ab $+$ $\frac{ab.\ eb}{fb}$ $=$ ab. $\frac{ef}{fb}$ $=$ ao. Mithin b in der ger. L. ab (§. 44). Oder (in fig. 29 *) ao $+$ ob $=$ ab. $\frac{ef}{fb}$ $+$ $\frac{ab.\ eb}{fb}$ $=$ ab $\left(\frac{be + ef}{fb}\right)$ $=$ ab. Folglich abermals o in der ger. L. ab.

§. 64.

§. 64.

Lehrs. Wenn (fig. 30) ab, cd parallel, und die Stücke ab, cd, oder die Winkel cax, dbx ungleich sind; so stossen ac, bd zusammen.

Bew. Die erstre Bedingung hat die andre zur Folge. Denn wenn man $b\alpha = dc$ in dem Schenkel bx annimmt, der mit dc kein Wechselschenkel ist, so sind $c\alpha$, db Parallelen (§. 60), und $< dbx = < c\alpha x$. Nun können (§. 39) $c\alpha x$, cax nicht gleiche W. seyn. Also $<$ cax nicht $= <$ dbx. — Man gedenke nun $a\alpha$: ac $=$ ab: ao (dieß in jenem Theile der ac aufgetragen, der mit ab einen dem αac gleichen W. bildet). Ziehe bo, do. Nun ist allemal $<$ dco $= < \alpha ac$. Denn ist z. B. in Einem Falle die Richtung $a\alpha$ mit ab einerley, so hat auch (per constr.) ac mit ao einerley Richtung. Da nun (ex hyp.) bx, dc keine Wechselschenkel, so sinds auch ab, cd nicht; mithin da diese Parallelen von ac geschnitten werden, $<$ bao ($= < \alpha a c$) $= <$ dco. Eben so im andern Falle. — Ferner war $a\alpha$: ac$=$ab: ao$=\alpha$b: co (add. v. subt. $=$ cd: co. Daher (§. 21) Δ dco $\backsim$ Δ αac. Woraus do $= c\alpha. \frac{cd}{a\alpha} =$ bd. $\frac{\alpha b}{a\alpha}$. Aus Δbao $\backsim$ Δ αac folgt aber bo $= c\alpha. \frac{ab}{a\alpha} =$bd. $\frac{ab}{a\alpha}$.

Aus welchen Gleichungen sich, durch Vergleich mit

mit bd ergibt, daß bd, bo einerley Gerade sind.

§. 65.

Lehrs. Wenn die zwey Linien (fig. 31) ab, de zwey andre ad, be, welche entweder parallel sind oder zusammenstossen, schneiden: so sind die erstern entweder parallel, oder sie stossen zusammen; je nachdem die fünfte Linie mn, von der sie geschnitten werden, gleiche oder ungleiche Wechselwinkeln bildet.

Bew. I. Sind diese Winkel gleich, so können ab, de nicht zusammenstossen. Denn geschähe dieß in o, und das Loth aus n auf mo fiele innerhalb om, so fiele das Loth aus m auf no außerhalb on, weil die W. $nm\nu = mn\mu$ Wechselwinkel seyn sollen (§. 57). Daher $< omx = < mn\mu =$ (§. 5) $< onx$, (wenn nx eine Verlängerung von mn über n ist), gegen (§. 39). — Wenn aber $< bac$, $< edc$ ungleich wären, so müßten ab, de zusammenstossen (§. 63. 64). Also sind diese W. gleich, daher (§. 50 — 54) ab, de parallel. II. Sind die Wechselwinkel ungleich, so müssen auch $< bac$, $< edc$ ungleich seyn, weil diese Wechselsw. sonst gleich würden. (§. 50. 57. 62). Sind aber $<bac$, $< edc$ ungleich, so stossen ab, de zusammen (§. 63. 64).

§. 66.

Lehrs. Wenn zwey Linien (fig. 32) ab, cd entweder parallel sind, oder zusammenstossen; eine

eine dritte ac schneidet beyde, und die vierte bo, welche mit der dritten entweder parallel ist, oder zusammenstößt, schneidet die Eine ab: so schneidet sie auch die andre cd, oder ist mit ihr parallel.

Bew. I. Wenn ab par. cd, und bo par. ac, so muß bo, welche die Eine ab schneidet, nothwendig auch cd schneiden. Denn nimmt man $c\beta = ab$, so wird $b\beta$ par. ac seyn, also bo mit $b\beta$ (§. 59) einerley. II. Stossen ab, cd (fig. 32 *) zusammen in x, aber ac par. bo, so nehme man $xa : xb = xc : x\beta$; folglich (§. 50. 54) $b\beta$ par. ac. Also (§. 59) $b\beta$ mit bo einerley. III. Stossen sowohl ab, cd, als auch ac, bo zusammen; so müssen bo, cd sich nicht nothwendig schneiden. Aber Eins von beyden: entweder bo par. cd oder sie stossen zusammen. Denn hier ist der Fall, daß im W. bac zwey Linien cy, bx beyde Schenkeln schneiden, wo sich §. 62. leicht anwenden läßt.

§. 67.

Anm. Dieß sind etwa die vornehmsten Sätze der Lehre von den Parallelen, die hier ohne dem Begriff der Ebene (dem die Bedingung: daß zwey Linien sich entweder schneiden oder parallel sind, gleich geltet) ausgedrückt sind; woraus sich nun mehrere andre, insbesonders trigonometrische Sätze, auf die gewöhnliche Art herleiten lassen. — Man wird hie und da bemerkt haben, daß ich gewisse Sätze aus der

Theo-

Theorie der g. L. vorausgesetzt habe, die in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Geometrie nicht ausdrücklich erwähnt werden. Dennoch sind sie zur Bestimmtheit der geometrischen Sprache unentbehrlich; und ich hätte gewunschen, mich ihrer stärker bedienen zu dürfen, als ich jetzt aus Furcht, daß man mir dieß für prahlerische Genauigkeit auslegte, nicht thun konnte. — Daß die Bemühungen der Geometer in der Lehre von den Parallelen, bis auf jene neuesten der Herrn Schultz, Gensich, Bendavid, Langsdorf — noch alle unzulänglich waren, ist allgemein anerkannt. Nun haben bereits Andre gegen den Beweis des Hrn. Hofpr. Schultz — (und mit diesem kömmt dem Wesen nach auch der des Franzosen Bertrand überein) — die Einwendung gemacht: daß er (nebst den noch nicht überall genehmigten Grundsätzen vom Unendlichen) auf eine heterogene Betrachtung von der unendlichen Fläche des Winkels gegründet sey. Hr. Gensich beabsichtigt mit Anwendung vieles Scharfsinns nur die Schwierigkeiten vom Unendlichen zu heben; ändert übrigens in dem zweyten Umstand nichts. — Daß mich also dieser Beweis der Lehre v. den Parallelen nicht beruhigen könne, geht aus den geäußerten Grundsätzen (Vorr., und §. 6) hervor. Hrn. Bendavids Beweis enthält eine (für den Verfasser der Auseinandersetzung des mathem. Unendlichen etwas unerwarte), Übereilung, die ihn ganz ungültig macht. — Der

Be-

Beweis, den Hr. Langsdorf (Anfangsgründe der rein. El. u. höh. Math. Erlang. 1802) liefert, kann mich und alle jene nicht befriedigen, die sich etwa noch nicht überzeugt hätten von der Möglichkeit und Nothwendigkeit seiner Raumpunkte (die ein Einfaches im Raume seyn sollen, aus dessen Aneinanderhäufung in endlicher Anzahl Linien, Flächen und Körper entstehen). Im Gegentheile aber: auch wenn dieser Wahrheitsforschende Gelehrte seine Überzeugung von den Raumpunkten noch nicht geändert hat: so würde Ihn dieß (weil auch Er die geom. Punkte und Linien annimmt) doch nicht hindern müssen, meinen in gegenwärtiger Schrift enthaltenen Beweisarten (wenn ihnen sonst nichts abgeht) einigen Beyfall zu ertheilen. — Andere neuere Versuche über die Parallelen sind mir nicht bekannt geworden. Da ich mich nun auch selbst an einen so oft schon mißlungenen Gegenstand gewagt: so wäre es gegen alle Bescheidenheit, wenn ich das der Erfahrung nach schon so oft zu voreilig hervorgekommene εὕρηκα mir selbstmächtig zuriefe: was ich vielmehr billig dem Urtheile des Lesers, und der Zukunft überlasse.