Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik

B. Von den Grundsätzen und Forderungen, §10 - §38

In: Bernard Bolzano (author): Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. (German). Prag: Caspar Widtmann, 1810. pp. 59--134.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400066

und es ist nicht zu wundern, wenn sie mißlingen. So fallen z. B., wenn anders die Begriffe, welche wir unten in der Geometrie aufzustellen gedenken, ihre Richtigkeit haben, alle bisher von Schultz u. a. versuchte Abtheilungen in dieser Wissenschaft, als unbrauchbar hinweg.

B. Von den Grundsätzen und Forderungen.

§. 10.

Von den Grundsätzen heißt es in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Mathematik, selbst noch in vielen Logiken, „sie wären Sätze die wegen ihrer Anschaulichkeit (Evidenz) keines Beweises bedürfen; oder deren Wahrheit man anerkennt, so bald man nur ihren Sinn versteht." Auf diese Art bestände also das Charakteristische eines Grundsatzes in der Anschaulichkeit. Allein bey einigem Nachdenken wird man leicht inne werden, daß diese Eigenschaft sehr wenig tauge, einen sichern Eintheilungsgrund aller Wahrheiten in zwey Classen, nähmlich in Grund- und Lehr-

sä-

sätze, abzugeben. Denn erstlich ist die Anschaulichkeit eine von jenen Eigenschaften, welche unzählige Verschiedenheiten in ihrem Grade zulassen; nie also wird man genau bestimmen können, was für ein Grad derselben eigentlich zu einem Grundsatze hinreichen solle. Ferner hängt auch die Anschaulichkeit einer Wahrheit von allerley sehr zufälligen Umständen ab; z. B. ob wir durch Unterricht, durch eigene Erfahrungen, u. dgl. oft oder selten zu ihrer Anerkennung geleitet worden sind. Eben deßhalb ist endlich der Grad der Anschaulichkeit auch bey verschiedenen Menschen sehr verschieden; und was der eine oft überaus einleuchtend findet, kömmt einem andern dunkel vor. Doch alles dieses scheinen, wie wir schon (§. 2.) anmerkten, die größten Mathematiker von jeher dunkel gefühlt zu haben, indem sie auch selbst die einleuchtendsten Wahrheiten, wenn sie nur anders einen Beweis für sie ausfindig zu machen wußten, unter die Classe der Lehrsätze aufnahmen. Euklides und seine Vorgänger erwiesen, was sie erweisen konnten; und der berüchtigte Satz von den Parallelen wurde nebst einigen andern Sätzen gewiß nur darum unter die so genannten κοινας ἐννοιας gestellt, weil sie dieselben nicht zu beweisen wußten *).

§. 11.

---

*) Herr Michelsen trägt in seinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik u.s.w. die Muthmaßung vor, Euklidens Forderungen und Grundsätze wären wohl ihrer ursprünglichen Bestimmung nach nichts anders gewesen, als gewisse Hülfs- und Erinnerungsmittel zur Erfindung der Auflösungen und Beweise für einen Anfänger. — Es ist wohl möglich, daß sie ursprünglich diese Bestimmung gehabt; denn sie sind allerdings zu jenem Zwecke sehr brauchbar. Doch zu Euklidens Zeiten hatte man diese angebliche Bestimmung sicher nicht mehr vor Augen; oder man würde ihnen noch manche andere Sätze, z. B. den vom Quadrate der Hypotenuse, der bey Beweisen wenigstens eben so häufig als das 11. Axioma vorkömmt, beygefügt haben. Doch wie dem immer sey, so wäre doch

§. 11.

Aber das bloße: nicht zu beweisen wissen macht eine Wahrheit wohl allerdings zu einer κοινη ἐννοια, d. h. zu einer gemeinen und ungelehrten Erkenntniß (denn also heißt eine Erkenntniß, die nicht auf deutlich erkannten Gründen beruht); man würde auch wohl daran thun, wenn man dergleichen Wahrheiten abgesondert von allen übrigen im Anfange des Lehrbuches aufstellte, um das Erwiesene so von dem Unerwiesenen zu trennen, und die Aufmerksamkeit des Forschers auf das letztere besonders hinzuweisen: aber dieß wäre dann doch nur eine bloß subjective Eintheilung der Sätze, nicht für die Wissenschaft an sich, sondern nur zum Behufe für ihre Bearbeiter gemacht; und was man heute als eine κοινη ἐννοια aufstellte, dazu erfände morgen ein anderer den Beweis, und würde es sonach aus jener Liste der Schulden ausstreichen. Soll also das Wort

---

diese Bestimmung der Grundsätze nichts weniger als wissenschaftlich, und von uns nachzuahmen.

Wort Grundsatz in einem objectiven Sinne genommen werden, so müssen wir darunter eine Wahrheit verstehn, die wir nicht nur nicht zu erweisen wissen, sondern die an sich unerweislich ist.

Anm. Auch die gemeinen Erkenntnisse können in einem systematischen Vortrage zum Beweise anderer Sätze angewandt werden, wenn man nur überzeugt ist, daß der noch unbekannte Beweis der ersteren ohne Voraussetzung eben derjenigen Sätze, zu deren Beweis man sie gebrauchen will, sich führen lassen werde. So kann man z. B. in der Lehre von den Dreyecken alle Lehrsätze von der geraden Linie als κοινας ἐννοιας voraussetzen.

§. 12.

Jetzt frägt es sich nun wieder, was unter dem Beweise einer Wahrheit eigentlich verstanden werden solle? Man nennt oft jede Reihe von Urtheilen und Schlüssen, wodurch die Wahrheit eines gewissen Satzes nur überhaupt erkenn-

bar

bar und einleuchtend gemacht wird, einen Beweis desselben. In diesem weitesten Verstande lassen sich alle wahre Sätze, von welcher Art sie immer seyn mögen, beweisen. Wir müssen also das Wort in einer engeren Bedeutung nehmen, und unter dem wissenschaftlichen Beweise einer Wahrheit die Darstellung der objectiven Abhängigkeit derselben von andern Wahrheiten verstehen, d. h. die Herleitung derselben aus solchen Wahrheiten, die nicht zufälliger Weise, sondern an sich und nothwendig als Grund von ihr, und sie dagegen als ihre Folge betrachtet werden muß. Grundsätze sind daher Sätze, welche in objectiver Hinsicht nur immer als Grund, und nie als Folge betrachtet werden können. Hier sollte es nun freylich längst erörtert seyn, wie viele einfache und von einander wesentlich verschiedene Schlußarten es gebe? d. h. wie vielerley Arten es gebe, wie eine Wahrheit von andern abhängig seyn kann. Ich gehe nicht ohne Bedenklichkeit daran, meine von der gewöhnlichen hier so sehr abwei-

chen-

chende Meinung vorzutragen. Was erstlich den Syllogismus betrifft, so glaube ich, daß es nur eine einzige einfache Form desselben gebe, nähmlich die Barbara oder Γραμματα in der ersten Figur; wobey ich jedoch noch die Veränderung treffen möchte, daß ich den Minor dem Major voraus setzen würde, indem auf diese Art die 3 Begriffe S, M, P, vom Speciellen stufenweise zum Allgemeinern fortgehn, und ich es natürlicher finde zu schließen: Cajus ist ein Mensch, Menschen sind sterblich, also ist Cajus sterblich, als in der sonst gewöhnlichen Ordnung: Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch, also ist Cajus sterblich. Doch dieß sind Kleinigkeiten. — Jede andere Figur und Form des Syllogismus däucht mir entweder nicht im Wesentlichen von Barbara verschieden, oder nicht völlig einfach zu seyn. Dagegen halte ich aber dafür, daß es noch außer dem Syllogismus einige einfache Schlußarten gebe. Ich will diejenigen, die mir bis jetzo eingefallen sind, in Kürze anzeigen. a) Wenn man die beyden Sätze hat:

A ist (oder enthält) B, und
A ist (oder enthält) C;

so folgt daraus durch eine eigene Schlußart der dritte:

A ist (oder enthält) [B et C].

Dieser Satz ist von den erstern beyden, jeden für sich betrachtet, offenbar verschieden; denn er enthält ein anderes Prädicat als sie; er ist auch nicht mit ihrer Summe einerley, denn diese ist nicht ein einziger Satz, sondern ein Inbegriff von zweyen. Endlich ist auch das offenbar, daß nach dem nothwendigen Gesetze unsers Denkens die beyden ersteren Sätze als Grund des dritten, nicht etwa umgekehrt betrachtet werden können. — b) Auf eine gleiche Art läßt sich auch zeigen, daß aus den beyden Sätzen:

A ist (oder enthält) M, und
B ist (oder enthält) M,

der dritte Satz:

[A et B] ist (oder enthält) M

durch einen einfachen Schluß hervor gehe. c) Wieder ein anderer einfacher Schluß ist es, der aus den beyden Sätzen:

A ist (oder enthält) M, und
(A cum B) ist möglich, oder
A kann enthalten B,

den dritten herleitet:

(A cum B) ist (oder enthält) M.

Dieser Schluß hat viele Aehnlichkeit mit dem Syllogismus, ist aber gleichwohl von ihm zu unterscheiden. Die syllogistische Form würde den letzten der beyden Vordersätze eigentlich so umstalten: (A cum B) ist (oder enthält) A. Dieser Satz aber bedarf zu seiner Bewährung erstlich des Satzes: (A cum B) ist möglich. Wird aber dieser angenommen, so kann man dann des erstern, als eines bloß analytischen entbehren, oder man nimmt ihn in einem solchen Sinne, daß beyde in der That ein und dasselbe bedeuten sollen, und nur in Worten unterschieden sind. — Alle diese Schlußarten, mit Inbegriff des Syllogismus, haben das Gemeinschaftliche, daß sie aus zwey Prämissen nur Eine Folgerung herleiten. Folgendes könnte dagegen ein Beyspiel von einer Schlußart scheinen, wobey aus einer Prämisse zwey Folgerungen fließen:

A ist (oder enthält) [B cum C]

Also: A ist (oder enthält) B, und
A ist (oder enthält) C.

Aber ich glaube nicht, daß dieses ein Schluß in jenem Sinne des Wortes sey, den wir im Anfange dieses §. festsetzten. Ich kann wohl subjectiv aus der wie immer erkannten Wahrheit des ersten dieser drey Sätze die Wahrheit der beyden andern erkennen, aber ich kann den ersten nicht objectiv als Grund von den zwey andern ansehen. — In eine ausführlichere Erörterung aller dieser Behauptungen darf ich mich hier nicht einlassen.

§. 13.

Nunmehr entstehet die doppelte Frage, „ob es auch überhaupt Wahrheiten gebe, die an sich unerweislich sind; und ob es ferner bestimmte Kennzeichen für diese Unerweislichkeit derselben gebe?" Beydes muß sich bejahend beantworten lassen, wenn es Grundsätze in der oben (§. 11.) angegebenen Bedeutung des Wortes geben soll. Da es nun immer noch von einigen bezweifelt wird, ob es im Reiche der Wahrheit auch überall Urtheile gebe, welche sich schlechterdings nicht erweisen

ließen;

ließen; so scheint es mir der Mühe nicht unwerth, hier einen kurzen Beweis dieser Behauptung zu versuchen. Ein jedes erweisliche Urtheil ist nach der (§. 12.) gegebenen Erklärung anzusehen als eine Folge, und seine Prämissen zusammen genommen als dessen Grund. Behaupten also, daß alle Urtheile erweislich sind, heißt eine Reihe von Folgen annehmen, in der kein erster, d. h. kein solcher Grund erscheint, der selbst nicht wieder eine Folge ist. Dieses ist aber ungereimt. Im Gegentheile also muß man nothwendig einige — zum wenigsten zwey (§. 12.) — Urtheile annehmen. die selbst nicht wieder gefolgerte, sondern Grundurtheile im strengsten Sinne des Wortes, d. h. Grundsätze sind.

Anm. Das Widersprechende einer Reihe von Folgen ohne ersten Grund, welches bey einer endlichen Anzahl der Glieder in die Augen springt, suchte man dadurch unbemerkbarer zu machen, daß man die Reihe in das Unendliche verlängerte. Aber es läßt sich leicht zeigen, daß dieses den Wider-

Widerspruch gar nicht hebe. Dieser beruhet nähmlich nicht auf der Anzahl der Glieder, sondern nur darauf, daß die Wegläugnung eines ersten Grundes (nach unserer oben gegebenen Erklärung dieses Ausdruckes) die Setzung einer Folge ist, die keinen Grund hat. Nimmt man an, daß sich die Reihe rückwärts in das Unendliche erstrecke; so entstehet hieraus nur so viel, daß derjenige, welcher von einem gegebenen Gliede an rückwärts zu zählen anfängt, niemahls zu jenem Widerspruche hingelanget. Allein ob er ihn gleich auf diesem Wege nicht findet, so muß er ihn nichts desto weniger doch als vorhanden denken. Beynahe ganz so ist auch jener berüchtigte Einwurf gegen die Möglichkeit der Bewegung, das argumentum Achilleum genannt, zu widerlegen. Auf dem Wege, den die Erfinder dieses Einwurfs absichtlich einschlagen, kann man freylich nie zu dem Augenblicke gelangen, in welchem Achilles die Schildkröte erreicht. Aber daraus folgt nicht, daß dieser Augenblick gar nicht vorhanden sey; wie er denn

wirk-

wirklich auf einem andern Wege sehr leicht gefunden werden kann. Man vergleiche hiemit Cochius bekannte Abhandlung: ob jede Folge einen Anfang habe, in Hißmanns Magazin 4. B.

§. 14.

Woran erkennt man es aber, daß ein Satz unerweislich sey? Diese Frage gehörig zu beantworten, werden wir etwas weiter ausholen müssen, nähmlich von dem Begriffe eines Urtheils und den verschiedenen Arten desselben. Die gewöhnliche Erklärung des Urtheils, als einer Verbindung zweyer Begriffe, ist offenbar zu weit, weil auch ein jeder zusammen gesetzte Begriff eine Verbindung zweyer (oder mehrerer) Begriffe ist. Es ist nähmlich eine andere Verbindung diejenige, mit welcher wir zwey Begriffe in einen neuen zusammen gesetzten Begriff vereinigen, und eine andere diejenige, durch welche wir zwey Begriffe zu einem Urtheile verknüpfen. Beyde Verbindungen sind aber meines Erachtens einfache, indefi-

nible

nible Verrichtungen unsers Geistes. Kant will uns zwar (Metaph. Anfangsgründe der Naturwissenschaft. 3te Aufl. Leipz. S. XVIII Vorr.; ingleichen in seiner Logik) eine genau bestimmte Definition des Urtheils, als einer Handlung durch die gegebene Vorstellungen zuerst Erkenntnisse eines Objects werden, gegeben haben. Allein verstehe ich diese Erklärung anders recht, wenn ich unter den gegebenen Vorstellungen das Prädicat, und unter dem Objecte das so genannte Subject des Urtheils verstehe; so liegt der ganze Begriff des Urtheils hier in dem Worte Erkennen. Und die Redensarten: „eine Vorstellung (nähmlich das Prädicat) als das Erkenntniß eines Objects (nähmlich des sonst so genannten Subjects) betrachten,“ oder „eine Vorstellung als Merkmahl, Kennzeichen von einer andern ansehen“ u. s. w. sind nur verschiedene Umschreibungen, nicht aber eigentliche Erklärungen d. h. Zerlegungen des Begriffes eines Urtheils. Diese Behauptung hat ihre Wichtigkeit für mich, weil im entgegen

gegen

gegen gesetzten Falle, wenn der Begriff des Urtheils ein zusammengesetzter wäre, auch die Begriffe von den verschiedenen Arten der Urtheile zusammen gesetzte Begriffe seyn müßten; wir dürften sie also nicht so, wie wirs gleich jetzo thun werden, bloß aufzählen, sondern nach einem logischen Eintheilungsgrunde eintheilen.

§. 15.

Die Logiker haben bisher, so viel ich weiß, durchgängig voraus gesetzt, daß alle Urtheile sich auf die Form A ist B zurück führen lassen; wo A und B die zwey verbundenen Begriffe, und das Wörtlein ist (die Copula genannt) die Art ausdrücken sollen, wie der Verstand A und B im Urtheile verbindet. Mir däucht es nun, daß eben diese Verbindungsart der beyden Begriffe nicht bey allen Urtheilen ein und dieselbe ist, daher sie denn auch nicht mit einerley Worte bezeichnet werden sollte. In der Verschiedenheit dieser Verbindungsart scheint mir der wesentlichste Unterschied der

Ur-

Urtheile zu liegen, so zwar, daß mir bisher folgende Arten der letztern beygefallen sind.

1. Urtheile, welche sich auf die Form: S ist eine Art von P, oder, was gleich viel ist, S enthält den Begriff P, oder: dem Dinge S kömmt zu der Begriff P, zurück führen lassen. Der Verbindungsbegriff in diesen Urtheilen ist der Begriff des Zukommens einer gewissen Eigenschaft, oder, was eben so viel ist, des Enthaltenseyns eines gewissen Dinges, als Individui oder Art, unter einer gewissen Gattung. Dieser Begriff, ob er gleich hier mit mehreren Worten ausgedrückt ist, scheint mir dessen ungeachtet ein einfacher zu seyn; und wenn nicht einerley mit dem Begriffe der Nothwendigkeit, doch unter ihm vorzugsweise enthalten; daher ich diese Classe der Urtheile, um sie mit einem eigenen Nahmen zu bezeichnen, Nothwendigkeitsurtheile nennen möchte. Ein Beyspiel eines solchen Nothwendigkeitsurtheils ist der Satz: Zwey Linien, welche die Schenkel eines Winkels in disproportionirten

ten Theilen schneiden, stossen, gehörig verlängert, zusammen; denn er ist eigentlich so auszudrücken: der Begriff zweyer Linien, welche die Schenkel eines Winkels in disproportionirten Theilen schneiden (= S) — ist eine Art — von dem Begriffe zweyer Linien, die einen Punct gemein haben (= P). — Uebrigens können diese Urtheile so wohl affirmativ als negativ seyn, welches auch von den folgenden Classen gilt.

2. Urtheile, die eine Möglichkeit aussagen, und unter der Form: A kann seyn eine Art von B, enthalten sind. Ihr Verbindungsbegriff ist der Begriff der Möglichkeit, daher ich sie eben Möglichkeitsurtheile nenne. Ein Beyspiel sey der Satz: es gibt gleichseitige Dreyecke; denn er ist eigentlich so auszudrücken: Der Begriff eines Dreyecks (= A) — kann seyn eine Art — von dem Begriffe einer gleichseitigen Figur (= B).

3. Urtheile, die eine Pflicht ausdrücken, und unter der Form: Du, oder

allge-

allgemeiner, N soll thun X, enthalten sind. Der Verbindungsbegriff ist hier der Begriff des Sollens, oder der Pflicht; und das Subject N ist wesentlich ein freyes vernünftiges Wesen. Man nennt sie praktische Urtheile.

4. Urtheile, die irgend ein bloßes Seyn ohne Nothwendigkeit ausdrücken, und unter der Form: Ich nehme wahr X, begriffen werden können, wenn man das Wahrnehmen in seiner weitesten Bedeutung nimmt, in welcher man nicht nur sinnliche Vorstellungen, sondern überhaupt alle seine Vorstellungen wahrnehmen kann. Ihr wesentliches Subject ist Ich. Wir heißen sie empirische, Wahrnehmungs- oder Wirklichkeitsurtheile.

5. Endlich bilden auch die Wahrscheinlichkeitsurtheile (wie mir däucht) noch eine eigene Classe von Urtheilen, deren Verbindungsbegriff jener der Wahrscheinlichkeit ist. Doch bin ich über ihre eigentliche Natur noch nicht im Klaren.

§. 16.

§. 16.

Der wesentlichste Umstand, in welchem ich bey dieser Aufzählung (§. 15.) von andern abweiche, bestehet darin, daß ich gewisse Begriffe zur Copula des Urtheils ziehe, welche man sonst in das Prädicat oder Subject verlegt hat. Ich muß also noch im Kurzen anzeigen, was mich zu dieser Veränderung veranlaßt habe. Es waren vornehmlich die Möglichkeits- und Pflichtsurtheile. Ich glaube gefunden zu haben, daß alle Urtheile, deren Subject oder Prädicat zusammen gesetzte Begriffe sind, erweisliche Urtheile seyn müßten. (S. unten §. 20.) Drückt man nun die Möglichkeitsurtheile (nach der gewöhnlichen Methode) so aus, daß der Begriff der Möglichkeit das Prädicat zu bilden scheint; so wäre ihr Subject wesentlich ein zusammen gesetzter Begriff, indem es bekanntlich überflüßig ist, die Möglichkeit eines einfachen Begriffes zu behaupten. (A cum B) ist — möglich wäre dann die allgemeine Form aller Urtheile dieser Art, wo (A cum B) das Subject, möglich das Prädicat vor-

stellen

stellen würde. Nach der nur eben angeführten Bemerkung also müßten alle diese Urtheile erweislich seyn, gleichwohl sieht man leicht ein, daß es einige schlechterdings unerweisliche Urtheile der Art geben müsse, weil jedes Möglichkeitsurtheil, wenn es erwiesen werden soll, eine Prämisse, in welcher der Begriff der Möglichkeit bereits vorhanden ist, d. h. ein anderes Möglichkeitsurtheil voraussetzt. Ziehen wir aber den Begriff der Möglichkeit in die Copula, so kann es Möglichkeitsurtheile geben, deren Subject und Prädicat beyde ganz einfache Begriffe sind, und die wir daher, ohne anzustossen, für unerweisliche Urtheile gelten lassen können. Wenn nähmlich A und B einfache Begriffe sind, so ist die Annahme, das Urtheil „A kann seyn B" sey unerweislich, nicht ungereimt, indem Subject und Prädicat desselben einfach sind. — Ein Gleiches ist es auch mit den praktischen Urtheilen, welche, wenn man den Begriff des Sollens oder der Pflicht ins Prädicat oder Subject versetzet, allezeit zusammen gesetzte Urtheile seyn müßten. Und gleichwohl muß es ein erstes praktisches

Ur-

Urtheil (nähmlich das oberste Sittengesetz) geben, das schlechthin unerweislich ist.

Anm. So viel ersieht man doch zum wenigsten, daß es oft nicht so leicht sey, zu bestimmen, was eigentlich zu dem Subjecte, und was zum Prädicate eines Urtheiles gehöre. Der Augenschein ist trüglich. So würde man z. B. in dem Satze: In jedem gleichschenkeligen Dreyecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich, offenbar ganz irrig die Worte vor sind zum Subjecte, und die nachfolgenden zum Prädicate machen. Denn hier würde im Prädicate das Subject wiederhohlt werden, indem der Begriff der Winkel an der Grundlinie jenen des gleichschenkeligen Dreyecks stillschweigend in sich faßt, weil ja nur jene Winkel die Winkel an der Grundlinie heißen, auch nur von jenen die Gleichheit ausgesagt werden kann, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen. Der Satz muß also lauten: der Begriff des Verhältnisses der 2 Winkel an der Grundlinie in einem gleichschenkeligen Dreyecke (= S) — ist eine Art — von dem Begriffe der Gleichheit zweyer Winkel (= P).

§. 17.

Eine von den bisher betrachteten ganz verschiedene Eintheilung der Urtheile ist die seit Kant besonders wichtig gewordene in analytische und synthetische Urtheile. In den von uns §. 15 Nro. 1. so genannten Nothwendigkeitsurtheilen erscheinet das Subject als eine Art, deren Gattung das Prädicat ist. Dieses Verhältniß der Art zur Gattung kann aber doppelt seyn; denn entweder es gibt ein für sich selbst gedenkbares und angebliches Merkmahl, welches als differentia specifica zur Gattung (zum Prädicate P) hinzugedacht, die Art (das Subject S) hervor bringt, oder nicht. Im ersten Falle heißt das Urtheil analytisch; ein jedes andere, von welcher der §. 15. genannten Classen es auch seyn mag, heißt synthetisch. Mit andern Worten, ein analytisches Urtheil ist ein solches, dessen

Prä-

Prädicat in der Erklärung des Subjects unmittel- oder mittelbar enthalten ist, und jedes andere ist synthetisch.

§. 18.

Aus dieser Erklärung folgt nun sogleich, daß analytische Urtheile niemahls als Grundsätze betrachtet werden können. Ja, meines Erachtens verdienen sie nicht einmahl den Nahmen der Urtheile, sondern nur den der Sätze; indem sie nur als Sätze, d. h. nur in wie fern sie in Worten ausgedrücket sind, nicht aber als Urtheile uns etwas Neues lehren; oder mit andern Worten, indem das Neue, das man etwa durch sie erfahren kann, nie die Begriffe und Dinge an sich, sondern nur höchstens ihre Bezeichnungen betrifft. Daher verdienen sie auch in einem wissenschaftlichen Systeme gar keinen Platz, und wenn sie ja gebraucht werden, so geschieht es nur, um an den Begriff zu erinnern, den man mit einem gewissen Worte bezeichnet, gerade wie die willkürlichen Sätze. Inzwischen, daß analytische Urtheile keine Grundsätze sind, das ist selbst nach den gewöhnlichen Ansichten ausgemacht; denn ihre Wahrheit wird ja nicht aus ihnen selbst, sondern aus der Erklärung des Subjects erkannt.

§. 19.

Wären also alle unsere Urtheile analytisch, so könnte es auch durchaus keine unerweisliche Urtheile, d. i. Grundsätze geben. Und weil diese Meinung wirklich noch immer ihre Anhänger findet, so wollen wir es auf eine vom §. 15. unabhängige Weise darzuthun suchen, daß es doch wirklich synthetische Urtheile gebe.

1. Alle Urtheile, deren Subject ein einfacher Begriff ist, sind eben darum schon auch synthetisch. Dieses erhellet ohne weitern Beweis aus der Erklärung §. 17. Daß es aber dergleichen Urtheile mit einfachem Subjecte wirklich gebe, wird niemand in Zweifel ziehen, der nur das Daseyn einfacher Begriffe selbst nicht läugnet (§. 4). Denn Urtheile müssen sich doch über jeden Begriff, von welcher Art er immer seyn mag, bilden lassen, weil jedem Begriffe jeder andere als Prädicat entweder zukommen oder nicht zukommen muß.

2.

2. Alle negativen Urtheile, wenn ihr Subject ein positiver Begriff ist, sind gleichfalls synthetisch. Denn, wenn das Subject ein positiver, d. h. ein entweder ganz einfacher, oder aus mehreren einfachen, durch bloße Bejahungen zusammen gesetzter Begriff ist, in welchem gar keine Verneinung vorkömmt, so kann man auch aus seiner bloßen Erklärung nie beweisen, ihm könne als Subject dieß Prädicat nicht zukommen. Es gibt nun wirklich dergleichen negative Urtheile, z. B. „Dem Puncte kömmt keine Größe zu."

Anm. Es ist ein wesentlicher, nicht bloß auf der beliebigen Wahl der Worte beruhender Unterschied, der zwischen positiven und negativen Begriffen obwaltet. Wir haben die positiven bereits erkläret; die negativen sind solche, die irgend eine Verneinung (d. h. ein Ausschließen, nicht bloß ein Nichtseyn) enthalten. Freylich aber ist es nicht immer gleich an dem Worte, das zur Bezeichnung eines Begriffes dient, bemerklich, ob dieser bejahend oder verneinend sey. Allein wenn man die Erklärung des Begriffes versucht, und selbe bis auf die einfachen Merkmahle fortsetzt; wird es sich allemahl entdecken, ob derselbe eine Verneinung enthalte oder nicht. So ist z. B. der Begriff eines rechten Winkels ein positiver; denn er ist der Begriff eines Winkels, der seinem Nebenwinkel gleich ist. Dagegen der Begriff eines schiefen, d. i. nicht rechten Winkels ist offenbar verneinend; allein die Begriffe von einem spitzigen und stumpfen Winkel sind wieder positiv, u. s. w. Unter den negativen Begriffen sind die einfachsten diejenigen, welche aus einer bloßen Verneinung oder Ausschließung eines gewissen positiven Begriffes A entstehen, ohne irgend etwas Bestimmtes dabey zu setzen. Sie sind von der Form: „Alles, was nicht A ist." Ich zeichne sie (Π sine A), und nenne sie unbestimmte oder unendliche Begriffe (terminos indefinitos). Sie kommen bey der Umkehrung bejahender Sätze vor. Denn wenn

man

man z. B. den Satz „M ist A“ hat, so folgt daraus: Alles, was nicht A ist = (Π sine A) — ist auch nicht M. Aus diesem Beyspiele sieht man zugleich, wie eigentlich der Ausdruck: „Alles, was nicht A ist“ gemeint sey; nähmlich nicht collectiv wird das Wort Alles genommen, so daß es das All der Dinge, welche nicht A sind, bezeichnete; sondern distributiv, d. h. so daß man darunter den oder jenen Gegenstand, unbestimmt welchen, nur daß er nicht A seyn darf, verstehet. In wie fern jeder Begriff doch etwas setzen muß, so ist das, was die unendlichen Begriffe setzen, ganz unbestimmt, außer — daß es nicht A seyn darf; daher ihr Nahme unbestimmte Begriffe. Die Urtheile, in welchen sie als Prädicat erscheinen, nennet man limitirende oder unendliche Urtheile. Sie sind von den verneinenden in so weit nicht verschieden, daß beyde äquipollent sind; aber die ersteren erscheinen wesentlich als minor bey ver-

nei-

neinenden Syllogisiren. — Als Subject können dergleichen Begriffe nur in verneinenden Urtheilen vorkommen. Denn von dem Etwas, das nicht A ist, läßt sich bejahend und allgemein nichts prädiciren, als daß es — Etwas, das nicht A ist, sey, welches ein bloß identischer Satz ist. Wohl aber kann man verneinende Sätze bilden, in welchen (Π sine A) Subject ist. Weiß man nähmlich z. B., daß A allezeit a sey; so kann man sagen: (Π sine A) ist niemahls a. — Die übrigen negativen Begriffe dagegen, welche noch irgend eine positive Bestimmung bey sich führen, (M sine A), lassen allerdings auch bejahende Urtheile zu. Z. B. Wenn zwey Zahlen einander nicht gleich sind, so ist die eine derselben größer als die andere.

§. 20.

Nach diesen Vorausschickungen können wir uns nun unsere §. 14. aufgestellte Frage auf folgende Art beantworten:

a)

a) **Urtheile, deren Subject ein zusammen gesetzter Begriff ist, sind, wenn sie a priori als wahr erkennbar sind, allezeit erweisliche Sätze.** Es ist nähmlich einleuchtend, daß das Zusammengesetzte und seine Eigenschaften von jenen einfachen Dingen, aus welchen es zusammen gesetzt ist, und von den Eigenschaften derselben abhängig seyn müsse. Ist also irgend ein Subject ein zusammen gesetzter Begriff, so müssen die Eigenschaften desselben, d. h. die **Prädicate**, welche man ihm beylegen kann, von jenen einzelnen Begriffen, aus welchen es zusammen gesetzt ist, und von den Eigenschaften derselben, d. h. von jenen **Urtheilen**, welche sich über diese einfachen Begriffe bilden lassen, abhängig seyn. Mithin ist jeder Satz, dessen Subject ein zusammen gesetzter Begriff ist, ein von mehreren andern Sätzen **abhängiger**, mithin (in wie fern er a priori erkennbar ist) auch wirklich **herleitbarer**, d. h. **erweislicher Satz**, und kann sonach auf keine Weise für einen **Grundsatz** gelten.

b)

b) Urtheile, deren Prädicat ein zusammen gesetzter Begriff ist, sind, wenn sie a priori als wahr erkennbar sind, allezeit erweisliche Sätze. Daß einem gewissen Subjecte ein gewisses Prädicat zukömmt, hängt eben so wie vom Subjecte auch von dem Prädicate und seinen Eigenschaften ab. Ist dieses nun ein zusammen gesetzter Begriff, so hängen seine Eigenschaften von jenen einzelnen Begriffen, aus welchen es zusammen gesetzt ist, und von den Eigenschaften derselben, d. h. von jenen Urtheilen ab, welche sich über diese Begriffe bilden lassen. Also hänget die Wahrheit eines Urtheils, dessen Prädicat ein zusammen gesetzter Begriff ist, von mehreren andern Urtheilen ab, und so erhellet wie vorhin, daß es kein Grundsatz seyn könne.

c) Hieraus ergibt sich nun schon, daß die eigentlich unerweislichen Sätze oder Grundsätze unter der Classe bloß jener Urtheile zu suchen seyen in welchen beydes, Subject und Prädicat, ganz einfache Begriffe sind. Und weil es doch über-

überhaupt Grundsätze gibt (§. 13.), so müssen sie auch daselbst zu finden seyn. Zu einer noch nähern Bestimmung aber kann uns folgender dritte Lehrsatz dienen: Für jeden einfachen Begriff gibt es zum wenigsten Ein unerweisliches Urtheil, in welchem er als Subject erscheint. Denn es gibt doch überhaupt Urtheile über ihn. Sey also: „A ist B", ein solches. Setzen wir nun, dasselbe sey erweislich; so kann es wegen seines einfachen Subjects und Prädicates nur durch einen Syllogismus erwiesen werden, dessen Prämissen von der Form: „A ist X", und, „X ist B", sind. Soll die Prämisse: „A ist X", wieder erweislich seyn, so setzt sie auf gleiche Art eine andere von der Form: „X ist Y", voraus, u. s. w. Man müßte also eine unendliche Reihe von Folgen ohne ersten Grund annehmen, wenn man nicht zugeben wollte, daß es zum wenigsten Einen Grundsatz von der Form: „A ist M", gebe.

Anm.

Anm. In dem Beweise dieses letzten Satzes scheint die Behauptung, die mit durchschossenen Lettern gedruckt ist, noch einer nähern Erläuterung zu bedürfen. Man könnte nähmlich die Frage aufwerfen, warum ich diese Behauptung nur auf Sätze mit einfachem Subject und Prädicat beschränke? Denn gilt sie allgemein, so folgt aus meinem Beweise zu viel, nähmlich, daß es zu jedem, auch selbst zusammengesetzten Begriffe ein unerweisliches Urtheil gebe, in welchem er als Prädicat erscheint; welches dem ersten Lehrsatze widerspräche. So wird denn also zur völligen Bewährung dieser ersteren Behauptung eigentlich dreyerley erfordert werden: 1) daß Sätze mit einfachen Begriffen nur durch Syllogismen erweislich sind; 2) daß diese Syllogismen allezeit eine Prämisse voraus setzen, deren Subject ein und derselbe einfache Begriff A ist; und 3) daß wenigstens eines von diesen beyden Stücken nur ausschließlich von Sätzen mit einfachen, und nicht auch mit zusammengesetzten Begriffen gelte.

gelte. Nun habe ich bereits §. 12. erwähnt, daß ich den Syllogismus nicht für die einzige einfache Schlußart halte. Aus dem dort angeführten Beyspiele ist vielmehr zu ersehen, daß es für Sätze mit zusammen gesetzten Begriffen — aber auch nur für diese — wenigstens noch drey andere einfache Schlußformen gebe. Dagegen, wie Sätze mit einfachen Begriffen anders als nur durch einen Syllogismus erwiesen werden könnten, wüßte ich wirklich nicht. Ich nehme denn also an, daß 1. und 3. ihre Richtigkeit haben; und es ist nur noch 2. übrig. Daß 2. zum wenigsten von Sätzen mit einfachen Begriffen gelte, ist mir ganz einleuchtend; ob es aber bey Sätzen mit zusammen gesetzten Begriffen ein anderes sey, getraue ich mich für jetzt nicht zu entscheiden. Es käme hier nähmlich auf die (freylich auch in anderer Rücksicht interessante) Frage an, ob sich ein jedes Urtheil nur auf einerley Art, d. h. so daß es einerley Subject und Prädicat behält, aussprechen lasse? Bey Urtheilen mit einfachen Be-

griffen

griffen ist dieses offenbar; bey andern aber könnte man meinen, daß sich ein und dasselbe Urtheil, ohne Veränderung seines Sinnes, bloß dadurch, daß man einige Merkmahle des Subjects zum Prädicate hinüber zieht oder umgekehrt, in ein neues verwandeln lasse, das ein ganz anderes Subject und Prädicat enthält. Sollte nun dieses der Fall seyn *), so ließe sich ein zusammen gesetztes Urtheil durch eine Reihe von Syllogismen erweisen, ohne daß jeder dieser Syllogismen eine Prämisse enthielte, deren Subject dasselbe unveränderte Subject des Urtheils wäre. Dieß wäre dann ein zweyter Grund, weßhalb sich meine obige Behauptung nicht wider meinen Willen auch auf zusammen gesetzte Urtheile ausdehnen ließe.

§. 21.

Wenn wir nun auch durch das Bisherige erwiesen haben, daß jedes Urtheil, wel-

*) Ich gestehe aber offenherzig, daß mir das Gegentheil viel wahrscheinlicher dünkt.

welches ein Grundsatz seyn soll, aus lauter einfachen Begriffen bestehen müsse; so ist doch noch nicht umgekehrt erwiesen, daß jedes Urtheil, das aus einfachen Begriffen bestehet, ein Grundsatz sey. Es ist also, um zu beweisen, daß ein vorhandener Satz: „A ist B", ein Grundsatz sey, noch nicht genug zu zeigen, daß die Begriffe A und B beyde ganz einfach sind; sondern man muß noch ferner zeigen, es gebe auch keine zwey Sätze von der Form: „A ist X", und, „X ist B", aus welchen jener gefolgert werden könnte. Dieses wird in den meisten Fällen eine eigene Betrachtung erfordern, die ich zum Unterschiede von einem eigentlichen Beweise (oder einer Demonstration) mit dem bestimmten Nahmen einer Herleitung (oder Deduction) belege. Grunsätze werden also zwar nicht bewiesen, wohl aber deduciret, und diese Deductionen sind ein wesentlicher Bestandtheil des wissenschaftlichen Vortrages, indem man ohne sie niemahls gewiß seyn könnte, ob jene Sätze, deren man sich als Grundsätze bedienet, dieses auch wirklich sind.

Anm.

Anm. Wenn man erwäget, daß eben das, was wir §. 8. von einfachen Begriffen sagten, auch bey den Grundsätzen Statt finde; so wird man nicht erwarten, daß alle Grundsätze unserm Bewußtseyn mit einer ganz vorzüglichen Lebhaftigkeit vorschweben sollten. Unsere lebhaftesten und klärsten Urtheile sind vielmehr offenbar gefolgerte. Der Satz, daß eine krumme Linie länger als die gerade zwischen denselben Puncten sey, ist weit klärer und anschaulicher, als mancher von jenen, aus welchen er mühsam muß hergeleitet werden. Der Satz (um einmahl auch ein Beyspiel aus einer andern Wissenschaft zu geben): „Du sollst nicht lügen" ist weit einleuchtender und unverkennbarer als jener Grundsatz, aus dem er folgt: „Du sollst das allgemeine Wohl befördern." — Ja, es könnte wohl seyn, daß ein Grundsatz — besonders aus Mißverstand seiner Worte, oder weil wir nicht gleich sehen, daß sich dasjenige aus ihm herleiten lasse, was wir doch einmahl als

wahr

wahr erkennen — sogar bedenklich und zweifelhaft erscheine. (So finden manche den bloß identischen Satz: „Folge der Vernunft" bedenklich, weil sie ihn so verstehen, als ob er die Verbindlichkeit, den göttlichen Geboten, oder jenen einer rechtmäßigen Obrigkeit zu gehorchen, aufhübe.) In solchen Fällen muß die Deduction des Grundsatzes uns erst Zutrauen zu seiner Wahrheit einflößen, welches dadurch geschehen wird, daß sie von einigen allgemein angenommenen und unverkennbar einleuchtenden Sätzen ausgeht, welche aber im Grunde nichts anders als gefolgerte, und zwar eben aus jenem Grundsatze, welchen man deduciren will, gefolgerte Urtheile sind. Indem sie uns diesen Zusammenhang bemerklich macht, werden wir von der Wahrheit des Grundsatzes selbst überzeuget werden.

§. 22.

Hat das Bisherige seine Richtigkeit, so läßt sich jetzo die Frage beantworten, „ob auch die Mathematik ihre Grundsäße habe?" — Wenn nähmlich alle mathematische Begriffe erklärbare Begriffe wären, so könnte es auch keine Grundsätze in den mathematischen Disciplinen geben. Da es aber einfache Begriffe gibt welche der Mathematik eigenthümlich zukommen (§. 8.); so muß man allerdings auch wirkliche Grundsätze in ihr anerkennen; und das Gebiet derselben erstreckt sich so weit, als die bloß einfachen Begriffe reichen; wo diese aufhören, und die Erklärungen ihren Anfang nehmen, da hören auch die Grundsätze auf, und es fangen die Lehrsätze an. *)

§. 23.

Als eine besondere Art von Grundsätzen pflegen die Mathematiker noch die Postulate anzuführen, unter welchen sie solche Grundsätze verstehen, welche die Möglichkeit eines gewissen Gegenstandes

*) Hieraus ersieht man, wie unrichtig es in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Mathematik heiße: „Auf die Erklärungen folgen die Grundsätze."

des behaupten. Nach §. 16 gibt es und muß es Postulate (unerweisliche Möglichkeitsurtheile) geben. Doch finden sie höchstens nur bey Begriffen Statt, die aus zwey einfachen zusammen gesetzt sind. Die Möglichkeit eines aus drey oder mehreren einfachen Bestandtheilen zusammen gesetzten Begriffes ist ein erweislicher Satz. Dagegen die Möglichkeit völlig einfacher Begriffe ist eigentlich gar kein Urtheil, denn es fehlt hier das Prädicat, welches in dem wörtlichen Ausdrucke des Satzes das Wort möglich nur auf eine scheinbare Weise vertritt. Möglichkeit, so wie Unmöglichkeit, findet nur bey zusammen gesetzten Begriffen Statt.

C. Von den Lehrsätzen, Zusätzen, Folgerungen und ihren Beweisen.

§. 24.

Erweisliche Sätze nennt man bekanntlich bald Lehrsätze, bald wieder Zusätze oder Folgerungen. Es scheint, daß es die Mathematiker ihrer Aufmerksamkeit bisher nicht werth geachtet, die erstern von den letztern bestimmt zu unterscheiden. Das, was der eine aus ihnen als einen Lehrsatz aufstellt, sieht man den andern als einen Zusatz oder als eine Folgerung behandeln. Gleichwohl würde ich meinen, es sollte der Wissenschaft nicht zum Nachtheile gereichen, wenn man es sich zu einem deutlichen Bewußtseyn brächte, welchen Unterschied man eigentlich durch die Verschiedenheit jener Titel anzeigen wolle. Das, worein die meisten Mathematiker bisher, nach einem dunkeln Gefühle, den Charakter des Lehrsatzes gesetzt haben, scheinet die größere Merkwürdigkeit des Satzes gewesen zu seyn. Aber man sieht von selbst, daß diese Eigenschaft nicht sehr geeignet sey, ein sicheres Unterscheidungsmittel der Sätze abzugeben, da sie bloß relativ und äußerst schwankend ist. Ich würde daher folgenden Unterscheidungsgrund in Vorschlag bringen. Alle Lehr- und Zusätze haben das gemeinschaftlich, daß sie aus vorher gehenden Sätzen gefolgerte Urtheile sind. Aber um diese Folgerung aus dem vorher gehenden Satze herleiten zu können, bedarf man entweder der Zuziehung eines eigenen Grundsatzes in dieser Wissenschaft, (oder, was

eben

eben so viel ist, eines aus einem solchen bereits gefolgerten Satzes), oder nicht. Im ersten Falle mag der gefolgerte Satz ein Lehrsatz, im zweyten, d. h. wenn er aus dem vorher gehenden Satze bloß mittelst Zuziehung eines Grundsatzes aus einer andern Wissenschaft, oder durch bloße Berufung auf eine vorhandene Erklärung u. dgl. entwickelt worden ist, mag er ein Zusatz oder eine Folgerung heißen.

Anm. Nach dieser Regel wäre z. B. wenn erst erwiesen worden ist, daß das arithmetische Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der beyden Katheten gleich ist — ein bloßer Zusatz der Satz: Die Seite des Quadrats verhält sich zur Diagonale $= 1 : \sqrt{2}$; ingleichen der Satz: Alle irrationale Verhältnisse von der Form $\sqrt{n} : \sqrt{m}$: lassen sich durch das Verhältniß zweyer gerader Linien darstellen; u. dgl. Denn alle diese Sätze bedürfen zu ihrer Herleitung aus jenem ersten nur besonderer Anwendungen der Arithmetik, aber keines neuen geometrischen Grundsatzes. Dagegen der Satz, daß die Quadratfläche über der Hypotenuse der Summe der beyden Quadratflächen über den Katheten gleich sey — wäre ein neuer Lehrsatz, weil er nur durch die Zuziehung eines neuen geometrischen Grundsatzes, oder, was eben so viel ist, eines neuen vorher gehenden Lehrsatzes erwiesen werden kann, nähmlich des Satzes, daß sich die Flächenräume ähnlicher Figuren, wie die arithmetischen Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten.

§. 25.

Wollte man etwa auch zwischen Zusätzen und Folgerungen noch einen Unterschied annehmen; so könnte man sich hier wohl an denjenigen halten, welchen der Sprachgebrauch schon wirklich macht. Dieser pflegt nähmlich Zusätze (gleichsam hinzu gefügte Sätze) solche Urtheile zu nennen, welchen schon irgend ein eigent-

eigentlicher Satz, d. h. ein Lehrsatz vorher gegangen ist. Dagegen andere Sätze, welche, z. B. unmittelbar auf eine Erklärung folgen, können eben deßhalb nicht schicklich Zusätze heißen; man nennt sie also bloße Folgerungen. Es wären demnach, wenn wir die jetzige Bestimmung mit der vorhin aufgestellten verbinden, Folgerungen solche erweisliche Urtheile, welche aus einer bloßen Erklärung — Zusätze aber solche, welche aus einem vorhergehenden Lehrsatze, doch immer ohne Zuziehung irgend eines neuen Grundsatzes in dieser Wissenschaft entwickelt werden.

§. 26.

Aus den Erörterungen, welche wir oben angestellt, lassen sich mancherley Folgerungen über die Bildung und Stuffenfolge der Sätze in einem wissenschaftlichen Systeme und über die Beschaffenheit ihrer Beweise herleiten. Wir wollen einige derselben, werden sie auch im Grunde nichts Neues und noch nie Gesagtes enthalten, doch darum anführen,

ren,

ren, weil sie noch immer nicht befolget, und, wie es scheint, nach ihrer Unerläßlichkeit nicht genug anerkannt werden.

1 Wenn mehrere in einem wissenschaftlichen Systeme vorkommende Sätze einerley Prädicat besitzen; so muß der Satz mit dem engeren Subjecte auf jenen mit dem weiteren folgen, nicht etwa umgekehrt. Denn wenn die beyden Urtheile: S ist P, und: Σ ist P, gelten, wo Σ enger als S ist; so ist entweder Σ = (S cum s), oder es gilt doch der Satz: Σ enthält S. Im erstern Falle weiß man, daß der Satz: Σ ist P, als Folge aus den beyden: S ist P, und: (S cum s) ist möglich +, zu betrachten sey, nach der dritten Schlußart im §. 12. — Im zweyten Falle ist der Satz: Σ ist P, als Folge der beyden Sätze: Σ enthält S, und: S ist P, durch einen Syllogismus, anzusehen. Uebrigens hat man die Wahrheit dieser Behauptung von jeher schon gefühlt, und sie in folgender Redensart ausgedrückt, „in einem wissenschaftlichen Vortrage müsse man von dem Allgemeinen zu

dem

dem *Besondern fortschreiten.*" Denn dieses heißt nichts anderes, als der Satz mit *engerem* Subjecte muß allezeit auf den Satz mit *weiterem* Subjecte folgen.

Anm. Zuweilen kann aber ein Satz so ausgedrückt seyn, daß er den Worten nach, eine größere Allgemeinheit zu haben scheint, als ein gewisser anderer, ohne sie doch in der That zu haben. Hiedurch muß man sich also nicht irre machen lassen. Ein Beyspiel gibt folgender Satz: *In jedem Dreyecke* bac ist $ab^2 = ac^2 + bc^2 \pm 2.\, ac.\, cd$, *je nachdem das Perpendikel* ad *außer- oder innerhalb* cb *fällt.* — Dieser Satz scheinet ein *weiteres Subject* zu haben, als der *bekannte Pythagoräische*, von welchem er gleichwohl nur abgeleitet ist. Doch in der That ist es ein Anderes. Zuvörderst ist nähmlich zu bemerken, daß hier im Grunde *zwey* Sätze vorhanden sind, die bloß auf eine scheinbare Weise in einen einzigen zusammen geschoben sind; es kommen hier

wirklich zwey Subjecte und auch zwey Prädicate vor, je nachdem das erwähnte Perpendikel entweder außer- oder innerhalb der Seite cb fällt. Euklides that daher ganz Recht, daß er daraus zwey abgesonderte Lehrsätze bildete. Ferner muß man nicht glauben, daß der Pythag. Lehrsatz als enthalten unter Einem von diesen beyden Sätzen betrachtet werden könne; indem der Fall, wo das besagte Perpendikel in den Scheitelpunct des eingeschlossenen Winkels selbst einfällt, ein ganz besonderer ist, bey welchem von jenem Rechtecke ac. cd gar keine Rede seyn kann. Sonach sind die Subjecte dieser drey Sätze gar nicht einander subordinirte, sondern coordinirte Begriffe.

§. 29.

2) Wenn mehrere in einem wissenschaftlichen Systeme vorkommende Sätze einerley Subject besitzen; so muß der Satz mit dem zusammen gesetzteren Prädicate auf jenen mit dem einfacheren folgen, nicht etwa um-

umgekehrt. Denn in dem Satze: S enthält (P cum π), wird der Satz: S enthält P, auf eine solche Art vorausgesetzt, daß man diesen schlechterdings eher denken muß als jenen, und nicht etwa umgekehrt. (§. 12.) Diese Wahrheit drang sich denjenigen, welche über die Natur des wissenschaftlichen Vortrages nachdachten, besonders unverkennbar auf: „Man muß, sagten sie, in den folgenden Sätzen immer mehr, nie weniger als in den vorhergehenden lehren." Hier ist es übrigens offenbar, daß wir unsere Behauptung nicht weiter ausdehnen, und statt des Ausdruckes: der Satz mit dem zusammengesetztern Prädicate, nicht den allgemeineren: der Satz mit engerem Prädicate, setzen dürften. Denn so oft wir durch einen Syllogismus schließen, hat eine der Prämissen (nähmlich die sogenannte Major) bey eben demselben Subjecte ein Prädicat (nähmlich den terminus medius), das enger ist als jenes der Conclusion. S enthält M; M enthält P; S enthält also P. Wo der Begriff

M

M offenbar enger seyn muß als P, weil sonst der Satz: M enthält P, nicht wahr seyn könnte; und dennoch wird das Urtheil: S enthält M, als ein dem Urtheile: S enthält P, vorhergehendes betrachtet.

§. 28.

Was die Beweise betrifft, mit welchen alle erweislichen Sätze in einem wissenschaftlichen Systeme versehen werden müssen, so wollen wir uns mit der Erwähnung bloß zweyer Eigenschaften, welche zu ihrer Richtigkeit, als conditio sine qua non, erfordert werden, begnügen.

1) Wenn das Subject (oder die Hypothesis) eines Satzes so weit ist, als es nur immer seyn darf, damit das Prädicat (oder die Thesis) demselben zugesprochen werden könne: so müssen in jedem richtigen Beweise dieses Satzes alle Merkmahle des Subjects benützet, d. h. zur Herleitung des Prädicats angewendet werden; und wenn dieß

nicht

nicht geschieht, ist der Beweis unrichtig. Denn in einem solchen Satze ist das ganze Subject (nicht etwa nur einer seiner Theilbegriffe) als der hinreichende Grund vom Daseyn des Prädicates anzusehen. Würde man aber im Beweise irgend ein Merkmahl des Subjectes gar nicht benützen, d. h. gar keine Folgerungen daraus herleiten, so würde eben darum das Prädicat als unabhängig von diesem Einen Merkmahle erscheinen, mithin nicht mehr das ganze Subject, sondern nur ein Theil desselben als Grund vom Prädicate zu betrachten seyn. Wenn also irgend ein Merkmahl des Subjects in dem Beweise gar nicht benützet wird, so ist dieß ein sicheres Zeichen, daß entweder der Lehrsatz selbst zu enge ausgedrückt seyn müsse, und überflüssige Einschränkungen enthalte; oder, wenn dieses nicht der Fall ist, daß der Beweis selbst irgend einen versteckten Fehlschluß enthalte, nach dem bekannten Spruche der Logiker: quod nimium probat, nihil probat.

Anm. So einfach und einleuchtend schon an sich selbst diese Bemerkung ist, so

oft

oft hat man sie gleichwohl in praxi übersehen, und bald — vergebliche Mühe sich gegeben, einen Beweis für einen gewissen Lehrsatz ausfindig zu machen, ohne zuvor darauf zu sehen, wie man die in der hypothesi vorhandenen Bedingungen in diesem Beweise alle benützen wolle — bald wieder Beweise aufgestellt, die, weil sie nicht alle Bedingungen der hypothesis benützten, offenbar fehlerhaft ausfallen mußten. Ein Beyspiel des ersteren ist der berüchtigte Satz von den Parallelen, in welchem das Zusammenstoßen der beyden Linien offenbar nur unter der Bedingung gilt, daß beyde Linien in einerley Ebene liegen. Allein die Wenigsten, welche sich mit der Erfindung eines Beweises für diesen Satz beschäftigten, dachten daran, wie sie diese Bedingung in dem Beweise benützen könnten, welches, sie wirklich zur Aufsuchung ganz anderer Wege veranlaßt haben würde. Ein Beyspiel vom zweyten Falle mag uns die Kästnerische Theorie des Hebels darbieten, welche man doch gewöhnlich

für

für die vollkommenste aus allen hält. Nachdem Kästner in seinen mathematischen Anfangsgründen II. Th. I. Abth. nach der vierten Aufl. in (16.) den Lehrsatz, „daß bey gleichen Hebelsarmen und Gewichten Gleichgewicht erfolge", sehr richtig dargethan hat; schließt er im Zusatze (18.) so: „Lasten, die nicht sinken sollen, müssen getragen werden. Hier ist nichts, das tragen könnte, als die Unterlage bey A. Also erhält diese die völlige Last 2 P = 2 Q, d. i. (nach einer Erklärung, die er von dieser Redensart in 29. macht) „wenn man diesen beschwerten Hebel an einem Faden AZ halten wollte, so müßte man nach AZ mit einer Kraft F = 2 P ziehen." In diesem Schlusse kömmt nichts von der Bedingung vor, daß die beyden Gewichte der Kräfte senkrecht, oder zum wenigsten in paralleler Richtung auf den Hebel einwirken müssen, eine Bedingung, die gleichwohl nothwendig ist,

wenn

wenn das Statt finden soll, was hier gefolgert wird. Daher ist dieser Beweis offenbar falsch, denn er beweist zu viel.

§. 29.

2. Nebst dem Merkmahle des Subjects können in dem Beweise noch manche andere Mittelbegriffe vorkommen; jedoch, wenn der Beweis nichts Ueberflüssiges enthalten soll, bey einem bejahenden Satze nur solche, welche nicht enger als das Subject, und nicht weiter als das Prädicat; bey einem verneinenden Satze aber nur solche, die weiter als das Subject, oder weiter als das Prädicat sind. Aus §. 17. ist zu ersehen, daß in allen apriorischen Urtheilen, zum wenigsten in allen Nothwendigkeits= und Möglichkeitsurtheilen (dergleichen alle mathematischen Urtheile sind), wenn sie bejahend sind, das Prädicat ein wo nicht weiterer, doch wenigstens eben so weiter *) Begriff als das Subject sey.
Soll

*) Diesem scheinet zu widersprechen, was Herr Selle (De la realité et de l'ide-

Soll nun ein solches bejahendes Urtheil, z. B. A enthält B, erwiesen werden, so werden dazu zwey andere gleichfalls bejahende Urtheile, als Prämissen, erfordert. Und

---

alité des objets de nos connaissances, in den Memoires de l'Academie de Berlin. 1787. p. 601.) entdecket haben will, daß der eigentliche Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Urtheilen nicht darin, worein wir ihn oben in Uebereinstimmung mit Kant gesetzet haben, sondern nur in dem Umstande liege, daß bey analytischen Urtheilen das Prädicat in dem Subjecte, bey synthetischen aber dieses in jenem enthalten sey. Nun ist zwar die Redensart: „ein Begriff A ist in einem anderm B enthalten", in der Französischen Sprache, eben so wie in der Deutschen, zweydeutig, und kann so wohl bedeuten, daß A, als auch daß B der engere aus beyden sey; aber in jedem Falle käme heraus, daß es Urtheile gebe, in welchen das Prädicat enger als das Subject ist; welches mir wenigstens bey den erwähnten zwey Urtheilsgattungen ungereimt scheint. Denn was erstlich die negativen Urtheile betrifft, so ist be

Und in welcher von den vier oben (§. 12.) angezeigten einfachen Schlußformen nur immer geschlossen werden mag; so zeiget es sich daß die gebrauchten Mittel-

---

ihnen das Prädicat offenbar weder enger noch weiter als das Subject, sondern beyde schließen einander völlig aus. Unter positiven Urtheilen aber möchte es bey den particulären und disjunctiven noch am ehesten den Anschein haben, als ob ihr Subject weiter, als ihr Prädicat wäre. So möchte man sagen, daß in dem particulären Urtheile: „Einige Vierecke sind Quadrate", das Subject einige Vierecke offenbar weiter sey, als das Prädicat Quadrate. Allein genauer betrachtet, erkennt man wohl, daß die Form particulärer Urtheile gar keine rein a priorische, sondern empirische sey Denn daß einige Vierecke wirklich Quadrate sind, ist so ausgedruckt, eine empirische Behauptung; rein a priorisch kann es nur heißen: Der Begriff Viereck kann den Begriff einer Figur von lauter gleichen Seiten und Winkeln enthalten; welches Urtelbegriffe jedesmahl enger als A und weiter als B sind. Aus folgender Tafel, worin die Zeichen $>$ und $<$ weiter und enger bedeuten, wird man dieß ohne Mühe übersehen, wenn man nur das so eben behauptete Umfangsverhältniß zwischen den beyden Begriffen eines bejahenden Urtheils immer in Anwendung bringt.

Er-

---

theil unter die Classe rein a priorischer Möglichkeitsurtheile gehört (§. 15.), und worin offenbar das Prädicat ein weiterer Begriff, als das Subject ist. Die disjunctiven Urtheile sind eigentlich alle von der Form: A ist entweder B oder nicht B. Dieses Urtheil will eigentlich so viel sagen, als: Der Begriff der Summe von (A cum B) und (A sine B) enthält den Begriff von allen A. Hier ist nun das Subject: „die Summe von (A cum B) und (A sine B)" offenbar wieder ein engerer Begriff, nur eine Art von dem Begriffe des Prädicats: „Allheit der Dinge, welche A sind."

Erste Form.

A ist eine Art von M
A ist eine Art von N

A ist eine Art von (M et N) = B

| M > A und < B
| N > A und < B.

Zweyte Form.

M ist eine Art von B
N ist eine Art von B

(M et N) = A ist eine Art von B

| M > A und < B
| N > A und < B.

Dritte Form.

M ist eine Art von B
M kann seyn eine Art von N

(M cum N) = A ist eine Art von B.

| M > A und < B
| N > A und < B.

Vier-

Vierte Form.

A ist eine Art von M
M ist eine Art von B
A ist eine Art von B

| M $>$ A und $<$ B.

In einem negativen Urtheile schliessen Subject und Prädicat einander wechselseitig aus; man kann also von keinem aus beyden sagen, daß er der weitere oder engere sey. Daß aber die Mittelbegriffe, die zum Beweise eines solchen negativen Urtheils: A ist keine Art von B, erfordert werden, allemahl weiter als das Subject A, oder weiter als das Prädicat B seyn müssen, erhellet wie vorhin:

Erste Form.

A ist keine Art von M
A ist keine Art von N
A ist keine Art von (M et N) = B

| M $>$ B
| N $>$ B.

Zweyte Form.

M ist keine Art von B
N ist keine Art von B

(M et N) = A ist keine Art von B.

| M > A
| N > A.

Dritte Form.

Was eine Art von M ist, ist keine Art von B.
M kann seyn eine Art von N

(M cum N) = A ist keine Art von B.

| M > A
| N > A.

Vierte Form.

Was eine Art von M ist, ist keine Art von B
A ist eine Art von M

A ist keine Art von B.

| M > A

Anm.

Anm. Kommen also in einem Beweise Mittelbegriffe vor, welche z. B. enger als das Subject sind; so ist derselbe offenbar fehlerhaft, ist, was man sonst eine μεταβασις εις αλλο γενος zu nennen pflegt. Zuweilen ist es nun freylich gleich auf den ersten Blick einleuchtend, daß ein gewisser Begriff zu dem Beweise eines Satzes, als ein ganz fremdartiger nicht gehöre; wie z. B. wenn in der *Theorie des fonctions analytiques*, *Nro.* 14, die wichtige Behauptung, daß sich die Function $f(x+i) = f(x) + ip + i^2 q + i^3 r + \ldots$ im Allgemeinen mit i stätig verändere, aus einer geometrischen Betrachtung hergeleitet wird; aus dieser nähmlich, daß es bey einer continuirlichen krummen Linie, die ihre Abscissenlinie schneidet, keine kleinste Ordinate gebe. Hier wird überdieß ein eigentlicher circulus vitiosus begangen, weil man nur eben unter Voraussetzung der jetzt zu beweisenden rein arithmetischen Behauptung darthun kann, daß jede Gleichung von der Form $y = fx$ eine continuirliche krumme Linie gebe. — In andern Fällen

len aber läßt es sich nur erst durch eine genaue Zergliederung des ganzen Beweises in seine einfachen Schlüsse, und durch Zerlegung aller Begriffe desselben in ihre einfachen Bestandtheile entscheiden, ob irgend ein überflüssiger Begriff eingemischt sey oder nicht.

§. 30.

Hier müssen wir uns noch über die Frage erklären, ob es für Einen Satz wohl mehrerley Beweise geben könne? — Es kömmt darauf an, was man zum Wesen eines Beweises zähle. Wenn man die Ordnung der Sätze, die bald mit ausdrücklichen Worten, bald stillschweigend gemachte Benützung gewisser Vordersätze mit zu dem Wesen eines Beweises zählt; so daß man einen Beweis schon dann einen andern nennt, wenn nur die Sätze desselben in einer andern Ordnung folgen, und einige Zwischensätze hier ausdrücklich angeführt, dort übersprungen sind: so ist es gar kein Zweifel, es könne mehrerley Beweise für Einen Satz geben.

ben. Dagegen, setzt man das Wesentliche eines Beweises in jene Urtheile, auf welche das zu erweisende wie eine Folge auf ihrem Grunde beruht; gleichviel, ob diese Urtheile alle ausdrücklich ausgesprochen, oder ob einige derselben bloß stillschweigend voraus gesetzt werden; gleichviel, ob sie in dieser oder jener Ordnung auf einander folgen: so gibt es auch für jedes wahre Urtheil nur einen einzigen Beweis. Denn ob zwar im Allgemeinen nicht jede Folge auch ihren Grund bestimmt, und gleiche Folgen zuweilen auch aus ungleichen Gründen hervor gehen können: so ist es doch ein anderes bey den Erkenntnißgründen. Hier erhellet es nähmlich aus dem Vorhergehenden, daß der Eine oder die zwey Mittelbegriffe, welche zu jedem einfachen Schluße erfordert werden, immer bestimmt sind, und nicht nach Willkür anders angenommen werden können. Wir wollen dieß zur Ersparung des Raumes nur von Einer aus jenen Schlußarten, z. B. der syllogistischen, so zeigen, daß man von selbst ersehen wird, wie eben dasselbe auch von den andern gelte. Es seyen M, N, O, . . . Mit-

tel-

telbegriffe zwischen A und B, d. h. sie seyen $>$ A und $<$ B; so kann man jeden derselben zu einem Syllogismus, aus welchem das Urtheil: A ist eine Art von B, gefolgert werden soll, benützen. Man kann nähmlich die Syllogismen aufstellen: A ist eine Art von M, M ist eine Art von B, also A eine Art von B; ingleichen: A ist eine Art von N, N ist eine Art von B also A eine Art von B; u. s. w. In so fern schiene es nun, als ob es wirklich mehrerley Beweise des Urtheils: A ist eine Art von B, gäbe. Allein wenn zwischen A und M noch irgend ein Mittelbegriff L vorhanden ist, so ist das Urtheil: A ist eine Art von M, selbst ein erweisliches; in einem vollständigen Beweise also, in welchem nichts übersprungen werden soll, muß der Syllogismus: A ist eine Art von L, L ist eine Art von M, also A eine Art von M, voraus geschickt werden; es müssen, mit Einem Worte, so viele Syllogismen aufgestellt werden, als es Mittelbegriffe zwischen A und B gibt. Und da die Anzahl dieser Mittelbegriffe doch offenbar nur Eine bestimmte ist,

so

so ist auch die Anzahl und die Form dieser Syllogismen, mithin der ganze Beweis nur Ein bestimmter.

§. 31.

Hieraus ergibt sich von selbst, wie man die Eintheilung der Beweise in analytische und synthetische zu beurtheilen habe. Der ganze Unterschied zwischen diesen beyden Beweisarten beruhet nähmlich bloß auf der Ordnung und Aufeinanderfolge der Sätze im Vortrage; gerade wie, nach der Bemerkung des vortrefflichen Hrn. Platners (in seinen philosoph. Aphorismen 1. B. §. 554. der 2ten Aufl.) der Unterschied zwischen der vierten und ersten syllogistischen Figur, in welchen die beyden Vordersätze bloß verwechselt sind. Dergleichen Unterschiede können nun freylich keine objectiv gültige oder wissenschaftliche Eintheilung begründen, aber darum sind sie doch nicht ganz zu verwerfen. Wo ich nicht irre, beruhet hierauf der eigentliche Unterschied zwischen den Lehrsätzen und Aufgaben, von welchem wir gleich reden werden.

§. 32.

§. 32.

Letzlich müssen wir uns noch über die apagogische Beweisart mit Wenigem erklären, da selbe in der Mathematik so häufig angewendet wird. Doch müssen wir zuvörderst eine Bemerkung über die so genannte Umkehrung der Sätze voraus schicken. Gilt nähmlich das bejahende Urtheil: A ist B: (oder bestimmter A ist eine Art von B), so gilt bekanntlich als propositio inversa auch das Urtheil: Was nicht B, ist, ist auch nicht A (oder bestimmter: Was keine Art von B ist, ist auch keine Art von A). Gewöhnlich betrachtet man dieß letztere als eine Art von Folgerung aus dem ersten. Aber sollte der umgekehrte Satz aus seinem bejahenden Gegentheile durch einen eigentlichen Schluß, d. h. so abgeleitet seyn, daß man den erstern als Grund, den letzteren als eine Folge zu betrachten hätte? Läßt sich der erstere nicht eben so gut auch aus dem letztern, wie dieser aus jenem herleiten; so daß man also mit eben dem Rechte jenen als Folge, und

diesen

diesen als Grund ansehen könnte? Ich halte also dafür, daß die Umkehrung eines Satzes keineswegs unter die Classe der Schlußarten, von welchen wir oben redeten (§. 12.), zu rechnen sey.

§. 33.

Dieses voraus geschickt, so hat man besonders zwey Arten apagogischer Beweise unterschieden. Die Eine, wo man den Satz: A ist B, dadurch beweist, daß man das contradictorische Gegentheil: A ist nicht B, annimmt, und daraus irgend eine Unmöglichkeit, d. h. irgend einen Widerspruch mit einem bereits erwiesenen Satze: A ist C, herleitet. In dieser Beweisart liegt nun (wie ich glaube) das Wesentliche nicht in der falschen Annahme: A ist nicht B, sondern lediglich darin, daß hier Prämissen von der Form: Was nicht M ist, ist auch nicht N, vorkommen; und zwar so, daß meiner Meinung nach nur verneinende Sätze eines indirecten Beweises wesentlich bedürfen, bejahende allezeit direct erwiesen werden können. Nach der gewöhnlichen Form wird nähmlich in dem apagogischen Beweise se so geschlossen: „A ist B; denn angenommen, A wäre nicht B, so wäre A gleichfalls nicht C, welches doch ungereimt ist." Diesem Raisonnement hätte man nun auch folgende Form ertheilen können: Was C ist, ist allezeit B, A ist C, also ist A auch B. Und hier erscheint gar kein verneinender Satz. — Wäre dagegen der zu beweisende Satz verneinend, z. B. A ist nicht C; so würde man nach der gewöhnlichen Methode so verfahren: „Angenommen, A wäre B, so würde folgen, A sey auch C, welches doch ungereimt ist." Dieß läßt sich aber auch so vortragen: Was nicht C ist, ist auch nicht B, A ist nicht C, A ist also auch nicht B.

§. 34.

Die zweyte Art indirecter Beweise leitet aus der falschen Annahme: A ist nicht B, den wahren Satz: A ist B, selbst her. Dieses fand man nun mit Recht anstößig, bis Wolf, Lambert u. a. gezeigt, daß es eigentlich nicht der falsche Vorder-

der-

dersatz: A ist nicht B, sey, worauf man baue, sondern daß im Anfange des Beweises nur unbestimmt gelassen werde, ob A eine Art von B sey oder nicht. — Sonach gehört diese Bweisart, wenn sonst kein umgekehrter Satz darin als wesentliche Prämisse erscheint, gar nicht zu den apagogischen.

D. Von den Aufgaben, Auflösungen, Anmerkungen u. s. w.

§. 35.

Eine besondere Art mathematischer Sätze sind die Aufgaben mit ihren Auflösungen. Ueber das eigentliche Wesen derselben sind die Erklärungen der Mathematiker noch nicht ganz einig. Die meisten Neuern erklären die Aufgaben als solche „erweisliche Sätze, welche die Möglichkeit eines Begriffes aussagen." Sie haben das für sich, daß sonach Lehrsätze und Aufgaben eben so unterschieden werden, wie Grund- und Heischesätze. — Sehen wir aber auf den Gebrauch, welchen

chen die Mathematiker von ihren Aufgaben von jeher wirklich machen, so finden wir, daß er diesem Begriffe gar nicht entspreche. Denn nicht bloß Möglichkeitssätze werden unter dem Titel der Aufgaben vorgetragen, sondern auch viele Nothwendigkeitssätze. z. B. „Aus den zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreyecks die dritte Seite zu finden," worin von gar keiner Möglichkeit die Rede ist. Auch beym Euklides kommen dergleichen Sätze, die keine Möglichkeit aussagen, unter dem Titel von Aufgaben vor, z. B. Elem. L. II. Prop. 14. L. III. Prop. 1. L. VII. Prop. 2. u. m. a. Umgekehrt werden dagegen auch manche Möglichkeitssätze unter dem Titel der Lehrsätze aufgestellt. So ist Elem. L. I. Prop. 7. Theor. 4. Es ist unmöglich, über derselben geraden Linie in derselben Ebene nach Einer Seite hin zu mehr als Einem Puncte zwey gleiche gerade Linien zu ziehen, — ein negativer Möglichkeitssatz. — Ich bin eben nicht dagegen, daß man der schon bestehen-

den

den Unterscheidung der unerweislichen Sätze in Grund- und Heischesätze gemäß, auch die erweislichen Sätze in solche, die eine Nothwendigkeit, und solche, die eine Möglichkeit ausdrücken, unterscheide, und hiezu schickliche Benennungen ausdenke; es ist dieß vielmehr sehr anzurathen, indem die Möglichkeitssätze auch aus ganz andern Gründen als die Nothwendigkeitssätze erwiesen werden, jene nähmlich aus Heischesätzen, wie diese aus Grundsätzen. Aber nur glaube ich, der Unterschied zwischen Aufgaben und Lehrsätzen sey noch ein anderer, und auch er verdiene beybehalten zu werden, ob er gleich nicht objectiv wissenschaftlich ist, sondern nur bloß die Art des Vortrages betrifft. Erweisliche Sätze nähmlich können in einem wissenschaftlichen Systeme auf eine doppelte Art vorgetragen werden: entweder man spricht selbe erst aus (d. h. macht sie uns erst nur ihrem Sinne nach bekannt), und läßt die Ueberzeugung von ihrer Wahrheit, und die Darstellung ihres objectiven Zusammenhanges mit andern Sätzen folgen, oder man thut das nicht. Das

Er-

Erstere gibt die Form des Lehrsatzes, das Zweyte jene der Aufgabe. Der Lehrsatz hat daher zwey Bestandtheile: den Satz (thesis), in welchem das neue Urtheil bloß ausgesprochen wird; und den Beweis, in welchem der objective Zusammenhang desselben mit andern Wahrheiten gezeiget wird. Aber auch die Aufgabe hat zwey Bestandtheile: die Frage (sonst auch die Aufgabe im engern Sinn genannt), in welcher man nur den Gegenstand bestimmt, worüber man jetzt etwas Neues aussagen will; und die Auflösung, in welcher man von unerweislichen oder bereits erwiesenen Wahrheiten ausgehend zu der gesuchten neuen gelangt. Hieraus ersieht man also, daß es ein Mißbrauch sey, wenn man die Auflösung mit einem eigenen Beweise versieht, denn dadurch fällt die Aufgabe in die Form eines Lehrsatzes wieder zurück; vielmehr soll Auflösung und Beweis durch den Gebrauch der synthetischen Methode in Eines verschmolzen seyn.

§. 36.

Diese Begriffe voraus gesetzt, läßt sich nun auch genauer bestimmen, für welche Wahrheiten sich mehr die Form des Lehrsatzes, für welche die der Aufgabe eigne. Nähmlich für solche Sätze, durch deren Aufstellung man nicht überrascht wird, deren Wahrheit man gleich auf der Stelle aus dem Vorhergehenden, obgleich nur dunkel, zu begreifen vermag, schickt sich die Form des Lehrsatzes. Dagegen für jene, auf die man nicht von sich selbst verfallen könnte, ist die Form einer Aufgabe zweckmäßiger. So eignet sich z. B. der Satz, daß Factoren mit veränderter Ordnung einerley Product geben, seiner Natur nach, zu einem Lehrsatze. Dagegen der Satz, wie der größte gemeinschaftliche Theiler zwischen zwey Zahlen gefunden werden solle, wird allezeit schicklicher in einer Aufgabe vorgetragen werden.

Anm. Noch ist in Ansehung der Stelle, die man den Aufgaben einräumt, zu merken, daß man in den vorher gehenden Sätzen dafür gesorgt haben muß, daß man die Möglichkeit, sie aufzulösen, einsehe. Z. B. Bevor man die Aufgabe aufstellt, „aus den drey Seiten eines Dreyecks den Inhalt desseben zu berechnen", muß man erwiesen haben, daß dieser Inhalt durch jene drey Seiten bestimmt werde.

§. 37.

Hier scheint es auch am rechten Orte zu seyn, eine gewisse willkürliche Einschränkung zu rügen, die sich die Mathematiker, besonders in der Geometrie, selbst in den Weg gelegt haben; nähmlich nie einen Gegenstand als wirklich anzunehmen, bevor sie nicht erst die Art und Weise gezeigt, wie er, vermittelst gewisser Werkzeuge, zu Stande gebracht werden könne. In der Euklidischen Geometrie wird bekanntlich kein räumlicher Gegenstand als wirklich angenommen, wenn nicht erst seine Construction durch Ebene, Kreis und gerade Linie

ge-

gezeiget worden ist. Diese Einschränkung verräth ihren empirischen Ursprung deutlich genug. Tafel, Zirkel und Lineal sind nähmlich die einfachsten Werkzeuge, deren man sich zuerst beym Zeichnen bedient hatte. Aber an sich betrachtet, sind die gerade Linie, der Kreis, und endlich vollends die Ebene so zusammen gesetzte Gegenstände, daß ihre Möglichkeit nicht nur auf keine Weise als Postulat angenommen werden darf, sondern im Gegentheile erst aus der Möglichkeit gerade solcher Dinge, welche Euklides durch jene drey construiren lehret, erwiesen werden muß. So ist z. B. der Satz, daß zwischen jeglichen zwey Puncten ein Mittelpunct liege, weit einfacher, als der, daß sich zwischen jegliche zwey Puncte eine gerade Linie ziehen lasse; gleichwohl erweiset Euklides den ersteren aus diesem letzteren, u. m. a. — Für den theoretischen Vortrag der Mathematik (I. Abth. §. 18.) ist es hinreichend, wenn man die Möglichkeit jeder Begriffverbindung, welche man aufstellt, erweiset. Wie und auf welche Weise sich ein Gegenstand analog diesem Begriffe in der Wirklichkeit darstellen lasse, gehört in die praktische Mathematik. So ist es z. B. genug, zu beweisen, daß es zu jeglichen drey geraden Linien eine vierte Proportional-Linie geben müsse; die Art, wie sie gefunden werden könne, brauchen wir nicht zu zeigen.

§. 38.

Endlich gibt es noch Einen Titel, der in den apriorischen Disciplinen der Mathematik gebräuchlich ist, nähmlich die Anmerkung. Diese enthält Bemerkungen, die nicht zur Wissenschaft in objectiver Hinsicht gehören, sondern nur subjective Zwecke haben; z. B. Geschichtsbemerkungen, Erläuterungen, andere Beweise, Beyspiele, Nutzanwendungen, Warnung vor Mißverständnissen, u. dgl. — Warum hat man aber nicht auch noch Vorerinnerungen, Einleitungen, Uebergänge, u. a. dgl. Titel in den mathematischen Apparat eben so aufgenommen, wie sie in andern wissenschaftlichen Vorträgen bereits gebräuchlich sind?

Soll-

Sollte dadurch der mathematische Vortrag nicht von seiner Steifheit verlieren, geschmeidiger, lichtvoller und gemeinfaßlicher werden können? — Nimmt man nun alles bisher Gesagte zusammen; so bestände der sämmtliche mathematische Apparat (um eine kurze Uebersicht von ihm zu geben) aus folgenden Theilen:

1) Bezeichnungen (für einfache Begriffe).
2) Erklärungen (Zerlegungen zusammen gesetzter Begriffe in ihre einfachen Bestandtheile).
3) Willkürliche Sätze (Bezeichnungen für einfache so wohl als auch zusammen gesetzte Begriffe).
4) Eintheilungen (die allezeit zusammen gesetzte Begriffe geben).
5) Heischesätze (unerweisliche Sätze, die eine Möglichkeit aussagen).
6) Grundsätze (unerweisliche Sätze, die eine Nothwendigkeit aussagen).
7) Lehrsätze (erweisliche Sätze aus Grundsätzen derselben Wissenschaft gefol-

folgert, welche entweder a. Möglichkeits- oder b. Nothwendigkeitssätze sind).

8) Folgerungen (erweisliche Sätze, die aus Erklärungen mit Zuziehung fremder Grundsätze gefolgert sind).

9) Zusätze (erweisliche Sätze, welche aus Lehrsätzen mit Zuziehung fremder Grundsätze gefolgert sind).

10) Aufgaben mit ihren Auflösungen (erweisliche Sätze, die nach synthetischer Methode vorgetragen werden).

11) Einleitungen, Uebergänge, Anmerkungen.

12) Gemeine Erkenntnisse (erweisliche Sätze, von deren Wahrheit man zwar überzeugt ist, deren systematischen Beweis man aber noch nicht kennt).

An-