José Marcial Nájares Romero

Přirozená čísla ve zlomcích

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 3, 34–38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152605

Přirozená čísla ve zlomcích

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha 10

Abstrakt. V tomto textu rozvíjíme myšlenky z článku Nepárne čísla v zlomkoch od V. Čerňanové. Zamýšlíme se nad tím, co se děje, když lichá čísla nahradíme přirozenými čísly.

Úvod

Tento článek se inspiruje článkem [1], kde se autorka věnuje lichým číslům ve zlomcích. Všímá si, že zlomek jedna třetina se dá zapsat nekonečně mnoha způsoby pomocí lichých čísel takto:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(4n-1)}, \tag{1}$$

tedy v čitateli je n prvních lichých čísel a ve jmenovateli je n bezprostředně následujících lichých čísel.

Dále autorka ukazuje, že pokud bude poměr počtu sčítanců v čitateli a jmenovateli $1 : (m-1)$, kde m je přirozené číslo větší než jedna, pak pro zlomek bude platit:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{mn}(2k-1)} = \frac{1}{m^2-1}, \tag{2}$$

což pro $m = 2$ skutečně dává jednu třetinu.

V našem článku se nejprve podíváme, co se stane se rovností (2), když nahradíme lichá čísla všemi přirozenými čísly při jinak stejném způsobu sčítání. Zjistíme, že se zlomku $1/\bigl(m^2-1\bigr)$ pouze blížíme s rostoucím počtem členů. Poté představíme dva způsoby, jak generovat přesně jednu třetinu pomocí zlomků z přirozených čísel, které se podobají (1). Tyto způsoby na závěr zobecníme i pro získání součtů $1/\bigl(m^2-1\bigr)$.

K úpravám výrazů budeme používat vzorec pro součet členů aritmetické posloupnosti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Přirozená čísla místo lichých

Podívejme se, co se stane se vzorcem (1), když nahradíme lichá čísla přirozenými:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1+2}{3+4}=\frac{3}{7},\quad \frac{1+2+3}{4+5+6}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},\ \ldots$$

Na první pohled to vypadá, že jsme nedostali nic souvisejícího s jednou třetinou. Ale přece!

$$\frac{1+2+\cdots+n}{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}=\frac{\frac{(1+n)n}{2}}{\frac{(n+1+2n)n}{2}}=\frac{1+n}{1+3n}\ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ \frac{1}{3}.$$

Podobné tvrzení platí i obecně při náhradě lichých čísel přirozenými ve vzorci (2).

Věta 1. *Nechť m je přirozené číslo, $m \geq 2$. Pak platí:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=n+1}^{mn}k}=\frac{1}{m^2-1}.$$

Důkaz. Opět použijeme vzorec pro součet aritmetické posloupnosti a dostaneme:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=n+1}^{mn}k}=\frac{\frac{(1+n)n}{2}}{\frac{(n+1+mn)(m-1)n}{2}}=\frac{1+n}{(1+(m+1)n)(m-1)}\ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ \frac{1}{(m+1)(m-1)}=\frac{1}{m^2-1}.$$

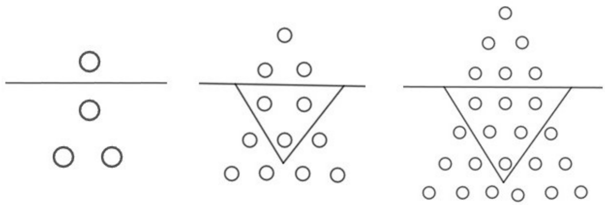
Generování jedné třetiny pomocí přirozených čísel

Nyní ukážeme dva způsoby, jak generovat přesně jednu třetinu pomocí přirozených čísel.

- **1. způsob**: Pro libovolné přirozené číslo n budeme v čitateli sčítat prvních n přirozených čísel a ve jmenovateli budeme sčítat hodnotu n a dále n bezprostředně následujících přirozených čísel, tj. ve jmenovateli bude sečteno $n+1$ čísel. Skutečně pro $n=1,2,3$:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}=\frac{1+2}{2+3+4}=\frac{1+2+3}{3+4+5+6}. \tag{3}$$

Podívejme se na znázornění pomocí trojúhelníkových čísel na obr. 1.



Obr. 1: Znázornění rovností (3) pomocí trojúhelníkových čísel

Tvrzení nyní zapišme formálně.

Věta 2. *Pro každé přirozené číslo n platí*

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n+(n+1)+\cdots+2n}=\frac{1}{3}.$$

Důkaz. Tvrzení okamžitě plyne použitím součtu pro aritmetickou posloupnost.

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n+(n+1)+\cdots+2n}=\frac{\frac{(1+n)n}{2}}{\frac{(n+2n)(n+1)}{2}}=\frac{1}{3}\,.$$

- **2. způsob**: Opět budeme pro libovolné přirozené číslo n v čitateli sčítat prvních n přirozených čísel a ve jmenovateli budeme sčítat hodnotu n po sobě jdoucích čísel počínaje $n+2$, tedy číslo $n+1$ tentokrát vynecháme. Skutečně pro $n=1,2,3$:

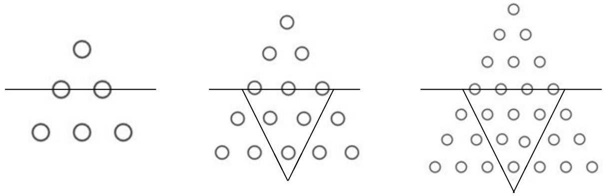
$$\frac{1}{3}=\frac{1+2}{4+5}=\frac{1+2+3}{5+6+7}. \tag{4}$$

Podívejme se i tentokrát na znázornění pomocí trojúhelníkových čísel na obr. 2.

Tvrzení opět zapišme formálně.

Věta 3. *Pro každé přirozené číslo n platí*

$$\frac{1+2+\cdots+n}{(n+2)+(n+3)+\cdots+2n+(2n+1)}=\frac{1}{3}.$$



Obr. 2: Znázornění rovností (4) pomocí trojúhelníkových čísel

Důkaz. Tvrzení plyne z věty 2, stačí si uvědomit, že nejen čitatelé, ale i jmenovatelé zlomků jsou ve větě 2 i ve větě 3 stejní.

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2)+\cdots+2n &= \\ =(n+2)+(n+3)+\cdots+2n+(2n+1). \end{aligned}$$

Generování dalších zlomků pomocí přirozených čísel

Nyní se budeme snažit zobecnit výsledek (2) pro přirozená čísla. Rozdělíme si způsoby pro m sudé a m liché, $m \geq 3$.

- *m sudé*: Pokud v čitateli sečteme n prvních přirozených čísel a do jmenovatele dáme $(m-1)n$ čísel ovšem tak, že vynecháme $m/2$ bezprostředně následujících po n, pak dostaneme $1/(m^2-1)$.

Věta 4. *Pro všechna přirozená čísla n, m, kde m je navíc sudé, platí:*

$$\frac{1+2+\cdots+n}{(n+m/2+1)+(n+m/2+2)+\cdots+(n+m/2+(m-1)n)} = \\ = \frac{1}{m^2-1}.$$

Důkaz. I tady si znovu vystačíme se součtem aritmetické posloupnosti.

$$\frac{1+2+\cdots+n}{(n+m/2+1)+(n+m/2+2)+\cdots+(n+m/2+(m-1)n)} = \\ = \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{\frac{\big(n+m/2+1+n+m/2+(m-1)n\big)(m-1)n}{2}} = \frac{1}{m^2-1}.$$

Všimněme si, že pro $m = 2$ odpovídá věta 4 druhému způsobu generování čísla jedna třetina, jak byl popsán v předchozí části.

- *m liché*: Pokud v čitateli sečteme n prvních přirozených čísel a ve jmenovateli sečteme $(m-1)n$ následujících čísel, ovšem poslední sčítanec mn opakujeme navíc $(m-1)/2$-krát, pak dostaneme součet $1/(m^2-1)$.

Věta 5. *Pro všechna přirozená čísla n, m, kde m je navíc liché a $m \geq 3$, platí*

$$\frac{1+2+\cdots+n}{(n+1)+(n+2)+\cdots+nm+nm\frac{(m-1)}{2}} = \frac{1}{m^2-1}.$$

Důkaz poslední věty necháváme jako cvičení pro čtenáře. I tentokrát bude stačit znalost vzorce pro součet aritmetické posloupnosti a šikovná úprava algebraických výrazů.

Poděkování

Rád bych poděkoval doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D., za jazykovou korekturu, zkrácení a zjednodušení článku a vylepšení jeho formátu.

Literatura

[1] Čerňanová, V.: Nepárne čísla v zlomkoch. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 2, s. 1–6.

[2] Tlustý, P.: Lichá čísla ve zlomcích ještě jednou. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 4, s. 39–43.