Učitel matematiky

Michal Křížek

Baťova prvočísla

Učitel matematiky, Vol. 31 (2023), No. 3, 178–182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152011

BAŤOVA PRVOČÍSLA

Michal Křížek[1]

Úvod

Slavný zlínský podnikatel a továrník Tomáš Baťa (1876–1932) kdysi přišel s nápadem, jak nepatrně pozměnit ceny svých výrobků, tak aby více přitahovaly zákazníky. Když například snížíte cenu bot z 2000 korun o pouhou jednu korunu na 1999 korun, což je prakticky stejná cena, vícero zákazníků si boty koupí, protože se jim nebudou zdát tak drahé. Celkově tedy vyděláte více. Tento trik se s velkou oblibou používá při prodeji dodnes. Proto přirozená čísla, která končí na několik devítek, budeme nazývat *Baťova čísla*.

Připomeňme, že prvočísla jsou přirozená čísla z množiny $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, která nelze zapsat jako součin dvou menších přirozených čísel. Existuje velké množství nejrůznějších tříd prvočísel, např. cyklická, permutační, faktoriální, Eukleidova, Fermatova prvočísla, viz např. Křížek et al. (2018), kde nalezneme také některé praktické aplikace prvočísel. V tomto článku nejprve zavedeme novou třídu prvočísel, tzv. Baťova prvočísla, která později zobecníme a budeme vyšetřovat jejich vlastnosti.

Prvočísla a čísla složená

Prvočísla mají právě dva různé dělitele (a to číslo jedna a sebe sama). Číslo jedna tedy prvočíslem není. Přirozená čísla větší než jedna, která nejsou prvočísly, se nazývají čísla složená. Podle základní věty aritmetiky lze každé přirozené číslo $n > 1$ jednoznačně

[1]Článek vznikl v rámci RVO 67985840.

napsat jako součin přirozených mocnin prvočísel $p_1 < p_2 < \cdots < p_j$, kde j je přirozené číslo.

Již Eukleidés uměl dokázat, že prvočísel je nekonečně mnoho. Předpokládal, že jich existuje jen konečně mnoho a došel ke sporu. Jeho důkaz si nyní předvedeme.

Předpokládejme, že $p_1, p_2, \ldots, p_j$ jsou všechna prvočísla a uvažujme číslo $m = p_1 p_2 \cdots p_j + 1$. Protože podíl m/p_i dá vždy zbytek 1, žádné p_i nedělí m. Podle základní věty aritmetiky je proto číslo m buď dalším prvočíslem, anebo je m složené číslo dělitelné nějakým dalším prvočíslem různým od $p_1, p_2, \ldots, p_j$. To je ale ve sporu s předpokladem, že $p_1, p_2, \ldots, p_j$ jsou všechna prvočísla. Proto musí být prvočísel nekonečně mnoho.

V některých publikacích se nesprávně píše, že m musí být nové prvočíslo. To ovšem není pravda. Stačí uvažovat konečnou posloupnost po sobě jdoucích prvočísel 2, 3, 5, 7, 11 a 13. Pak vidíme, že číslo

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509$$

je složené a není dělitelné žádným prvočíslem z dané posloupnosti.

Další starořecký matematik Eratosthenés se proslavil metodou, jak posloupnost prvočísel postupně konstruovat. Napišme si za sebou všechna přirozená čísla v nějakém omezeném intervalu, v němž vyškrtneme číslo jedna a všechna čísla složená. Škrtají se tedy nejprve čísla dělitelná dvěma kromě 2, čísla dělitelná třemi kromě 3, čísla dělitelná pěti kromě 5 atd., až zbydou jen prvočísla:

$$\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \ldots$$

Tento postup se nazývá *Eratosthenovo síto*. Není ale příliš efektivní k tomu, abychom zjistili, zda je zadané přirozené číslo n prvočíslem.

O trochu efektivnější metoda postupně zkouší dělit n všemi prvočísly nepřevyšujícími $\sqrt{n}$, viz Sedláček (1977, s. 20). Vychází vlastně přímo z definice prvočísla z úvodní kapitoly.

Příklad. Abychom se přesvědčili, že $n = 1\,999$ je prvočíslo, stačí jej postupně vydělit pouze čtrnácti prvočísly 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 a $43 < \sqrt{n} < 45$, abychom zjistili, že vždy dostaneme nenulový zbytek. Číslo 1 999 je tedy prvočíslem.

Baťových prvočísel je nekonečně mnoho

Přirozené číslo n, jehož dekadický zápis končí na alespoň k devítek, nazveme *Baťovým číslem k-té třídy.* Pokud je navíc n prvočíslem, nazveme ho *Baťovým prvočíslem k-té třídy.*

Tak například čísla

$$19, 29, 59, 79, 89 \text{ a } 109$$

jsou Baťova prvočísla 1. třídy.

Podobně

$$199, 499, 599, 1\,399, 1\,499, 1\,699, 1\,999, 2\,099, 2\,399, 2\,699, \dots$$

jsou Baťova prvočísla 2. třídy. Všimněte si, že tato posloupnost obsahuje i číslo 1 999, které končí na tři devítky. Je to z toho důvodu, že definice Baťova čísla obsahuje slovo „alespoň". Proto všechna Baťova prvočísla $k+1$ třídy jsou zároveň Baťovými prvočísly k-té třídy (ale ne naopak). Snadno se dá dále ověřit, že

$$1\,999, 2\,999, 4\,999, 8\,999, 13\,999, 25\,999, \dots$$

jsou Baťova prvočísla 3. třídy atd.

Nežli si dokážeme, že Baťových prvočísel k-té třídy pro libovolně velké k je také nekonečně mnoho, vyslovíme dvě věty.

Věta 1 (Dirichletova). *Nechť b a d jsou nesoudělná čísla. Pak existuje nekonečně mnoho prvočísel v aritmetické posloupnosti*

$$b, b+d, b+2d, b+3d, \dots$$

Důkaz této věty podal vynikající německý matematik Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1837). Předpoklad, že čísla b a d jsou nesoudělná, je podstatný, protože například pro $b = d = 3$ jsou v posloupnosti 3, 6, 9, 12,… všechna čísla kromě prvního členu složená.

Věta 2. *Dvě po sobě následující přirozená čísla jsou nesoudělná.*

Důkaz. Nechť n je libovolné přirozené číslo. Označme m největšího společného dělitele čísel n a $n+1$. Pak m dělí i rozdíl těchto čísel, tj.

$$n + 1 - n = 1$$

je dělitelné m. Odtud již plyne, že $m = 1$. □

Věta 3. *Pro libovolné přirozené číslo k je Baťových prvočísel k-té třídy nekonečně mnoho.*

Důkaz. Nechť k je libovolné přirozené číslo. Podle věty 2 jsou po sobě jdoucí čísla $b = 10k - 1$ a $d = 10k$ nesoudělná. Snadno nahlédneme, že každý člen aritmetické posloupnosti

$$b, b + d, b + 2d, b + 3d, \ldots$$

končí na alespoň k devítek. Podle Dirichletovy věty 1 tato posloupnost obsahuje nekonečně mnoho prvočísel. □

Zobecněná Baťova prvočísla

Prvočísla, která končí na alespoň k jedniček, k trojek, k sedmiček nebo k devítek, nazveme zobecněná Baťova prvočísla k-té třídy.

Je-li například $k = 3$, pak můžeme ověřit, že následující přirozená čísla jsou prvočísla:

2 111, 4 111, 8 111, 10 111, 16 111,...
2 333, 5 333, 7 333, 10 333, 16 333,...
1 777, 2 777, 11 777, 19 777, 22 777,...

a jsou to zároveň zobecněná Baťova prvočísla i pro $k = 1$ a $k = 2$. Cena 1 777 Kč se opět může zdát zákazníkovi přitažlivější než např. 1 734 Kč.

Věta 4. *Pro libovolné přirozené číslo k je zobecněných Baťových prvočísel k-té třídy nekonečně mnoho.*

Důkaz. Případ, kdy poslední cifry jsou devítky, byl již dokázán ve větě 3.

Nechť je k libovolné přirozené číslo. V důkazu věty 3 nejprve zvolme $b = 111 \ldots 111$, které má k cifer a není dělitelné prvočísly 2 ani 5. Je tedy zřejmě nesoudělné s $d = 10^k = 2^k 5^k$.

Podobně číslo $333 \ldots 333$ o k cifrách je také nesoudělné s 10^k a totéž platí i o čísle $777 \ldots 777$. Zbytek důkazu je stejný jako ve větě 3. □

Pomocí vztahů uvedených v (Křížek et al., 2018, s. 93) lze dokonce dokázat, že součet převrácených hodnot všech zobecněných Baťových prvočísel k-té třídy je nekonečný.

Dosud není známo, zda existuje nekonečně mnoho prvočísel, jejichž cifry jsou pouze jedničky. Jsou to např. čísla

$$11, 1\,111\,111\,111\,111\,111\,111, 11\,111\,111\,111\,111\,111\,111\,111,$$

která mají 2, 19 a 23 cifer.

Literatura

[1] Dirichet, P. G. L. (1837). Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. *Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 45–81.

[2] Křížek, M., Somer, L., & Šolcová, A. (2018). *Kouzlo čísel. Od velkých objevů k aplikacím* (3. vydání). Academia.

[3] Sedláček, J. (1977). *Co víme o přirozených číslech?* ÚV MO, Mladá fronta.

Abstract

A new class of prime numbers – Baťa primes – is introduced. A positive integer is called a Baťa prime of class k if it ends with at least k 9s. We prove that for any positive integer k there exist infinitely many Baťa primes of class k. Some generalizations of this statement are given as well.

Michal Křížek
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: krizek@math.cas.cz