František Kuřina

Obrázky a matematika

Učitel matematiky, Vol. 31 (2023), No. 2, 122–134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151740

OBRÁZKY A MATEMATIKA

František Kuřina

Geometrie je, jak známo, ta část školské matematiky, která se neobejde bez obrázků. Můžeme ukázat a nakreslit bod, úsečku, polopřímku či přímku, ale neumíme tyto pojmy definovat. Trojúhelník, čtverec, pětiúhelník nebo kružnici můžeme nejen nakreslit, ale i definovat. Obrázky jsou jazykem geometrie. Geometrické kresby jsou užitečné i v aritmetice a algebře. Kladná reálná čísla můžeme znázornit úsečkami, graficky můžeme vyjádřit i součet těchto čísel, jejich součin můžeme interpretovat jako obsah obdélníku. Geometrickým jazykem můžeme vyjádřit i některé aritmetické zákonitosti. Dvojí pohled na součet úseček napovídá komutativitu sčítání, obdélníkem s rozměry a a $b + c$ můžeme ověřit distributivitu násobení vzhledem ke sčítání, vzorec pro $(a + b)^2$ můžeme přiblížit žákům dvojím pohledem na čtverec se stranou $a + b$. Kreslení obrázků rovněž usnadňuje seznamování s novými pojmy. Geometrické obrázky jsou názornější než slovní nebo symbolická vyjádření. Připomeňme např. konvexní a nekonvexní útvar, spojitou a nespojitou funkci. Těmito známými otázkami se nebudeme zabývat. Všimneme si pouze role obrázků při řešení úloh a dokazování. Deskriptivní geometrie je metoda řešení úloh rýsováním. To je zcela v souladu s Vopěnkovou myšlenkou: „geometrie je metoda předpovídání pomocí rýsování“ (Vopěnka, 1971, s. 748).

Jak to vidí vědci?

„Umět úlohu přeložit z řeči slov do řeči obrazce a obráceně, to není spjato jenom s určitou partií učiva, ale s celou podstatou matematiky – ba dokonce s celou podstatou myšlení.“ (Holubář, 1960).

„Neuznávání obrázků a náčrtů za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, to je důsledné trvání na slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání.“ (Vopěnka, 2004, s. 569).

„Keď matematik stojí pred algebraickým problémom, usiluje sa dostať do geometrickej podoby, tak ho ľahšie môže vyriešiť.“ (Riečan, 2013, s. 71).

„Geometrické obrázky nejsou jen psychologickou pomůckou, ale důležitým nástrojem konstruování logické struktury matematických teorií.“ (Kvasz, 2008, s. 569).

„Skôr ako začneme konštruovať, musíme si celú situáciu ujasniť. Nakreslíme si obrázok, na ktorom je hľadaný útvar už zostrojený, vyznačíme dané prvky a začneme obrázok skúmať. Hľadáme cestu, ktorá vedie od daných prvkov k zostrojeniu celého obrázka.“ (Hejný et al., 1989, s. 327).

Popsaný Hejného postup je charakteristický pro tzv. rozbor konstrukční úlohy a hledání cesty znamená obvykle dokreslování obrázku. Toto dokreslování neponecháváme ovšem náhodě, ale opíráme se o intuici, o představu toho, co by snad mohlo vést k řešení. Jde o dobrý nápad, který je jen někdy veden logikou. „Nápad je jako sníh, musí napadnout“ (Lecův aforismus). Snad proto paroduje Emil Calda dokreslování obrázku následujícími slovy:

> Zíráme-li na obrázek představující rozbor konstruktivní úlohy dostatečně dlouho a stále nic nevidíme, spojíme namátkou vybrané body a koukáme, jestli už něco vidíme. Jestliže ani teď nic nevidíme, spojujeme postupně další a další body tak dlouho, dokud něco neuvidíme, nebo dokud nevznikne taková změť čar, že už vůbec nic vidět nemůžeme. V tomto případě nakreslíme původní obrázek znovu, spojíme jiné dva body a celý postup opakujeme. (Calda, 2003, s. 11)

Naše didaktika roli nápadu při řešení úloh nezdůrazňuje. Rozbor konstrukční úlohy se popisuje např. takto: „Přepokládejme hledané, jako by už bylo uskutečněno. Odtud vyvozujeme závěry a další závěry tak dlouho, až dojdeme k tomu, co je dáno. A konečně se pokusíme úsudky obrátit a dojít tak od daného k hledanému.“ (Thiele, 1985, s. 62). V naší literatuře jsem termín nápad vůbec nenašel. Didaktika matematiky je tak odtržena od školské praxe, neboť každý učitel význam dobrého nápadu při řešení úlohy ve třídě potvrdí, každý snad prožil uspokojení a úspěch, když dobrý nápad dostal. Co je dobrý nápad? „Náhlá a významná změna našeho pohledu na věc, náhlá reorganizace našeho způsobu chápání problému, právě se vynořivší smělá předpověď všech kroků, které musíme provést, abychom získali řešení.“ (Polya, 2016, s. 160). V souladu s Hadamardem (1996) bychom měli chápat řešení problémů takto:

1. Preparace. Problém je podroben systematické analýze.
2. Inkubace. Etapa zrání problému v podvědomí řešitele.
3. Iluminace. V řadě asociací, které se řešiteli honí hlavou, se zrodí dobrý nápad (happy idea), který je jádrem řešení problému.
4. Verifikace. Ověření, že řešení je správné.

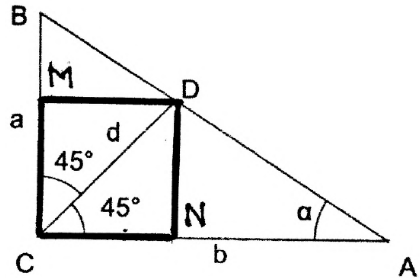
Domnívám se, že připomenuté čtyři etapy přispívají i k hlubšímu chápání vzdělávacího procesu. Velkou část školní matematiky můžeme považovat za etapu přípravy k řešení úloh (stupeň preparace). Ve škole bývá zpravidla málo času na zrání problémů v myslích žáků (stupeň inkubace). V praxi školy pak často radost z objevu prožije bohužel jen část žáků. Ověření správnosti řešení úlohy je ovšem nezanedbatelná složka školní práce.

Několik příkladů

Při řešení úloh bývá někdy zrod dobrého nápadu inspirován obrázkem. Ilustrujme to několika úlohami. Začátek řešení úlohy je v obrázcích naznačen tlustou čarou, nápady budeme označovat N_i.

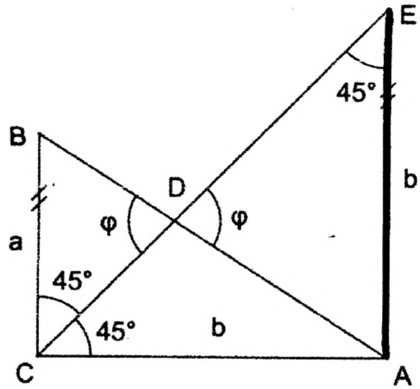
Příklad 1 (Dam, 2004, s. 16–19). *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami a, b označme D průsečík osy pravého úhlu s přímkou AB. Určete velikost úsečky CD.*

N_1: Sestrojme čtverec $CNDM$ (obr. 1). Z podobnosti trojúhelníků BMD a DNA vypočítáme velikost strany čtverce, $x = \frac{ab}{a+b}$. Úsečka CD má tedy velikost $d = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.



Obr. 1: Čtverec s úhlopříčkou CD

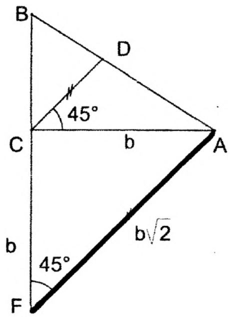
N_2: Sestrojme úsečku AE (obr. 2). Výsledek získáme z podobnosti trojúhelníků BCD a AED.



Obr. 2: Podobné trojúhelníky BCD a AED

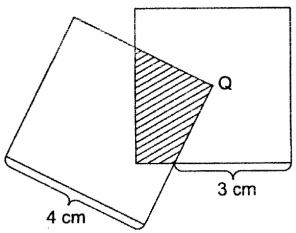
N_3: Sestrojme úsečku AF (obr. 3). Zde využijeme podobnost trojúhelníků BCD a BFA.

Užitím vzorce $S = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$ pro obsah trojúhelníku, sinové a kosinové věty, součtových vzorců pro goniometrické funkce nebo analytické geometrie můžeme získat řadu dalších řešení úlohy (Kuřina, 2011).



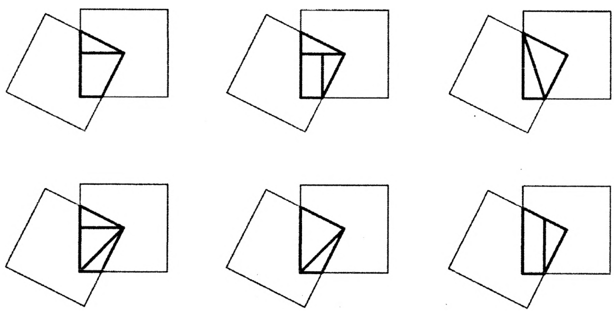
Obr. 3: Podobné trojúhelníky BCD a DFA

Příklad 2. *Vypočítejte obsah vyšrafovaného čtyřúhelníku, který je průnikem shodných čtverců podle obrázku 4. Q je střed čtverce.*



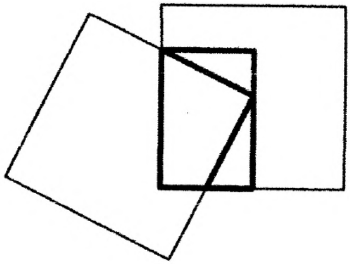
Obr. 4: Průnik čtverců

N_1: Rozdělme čtyřúhelník, jehož obsah hledáme, na části, jejichž obsahy umíme vypočítat podle obrázku 5.



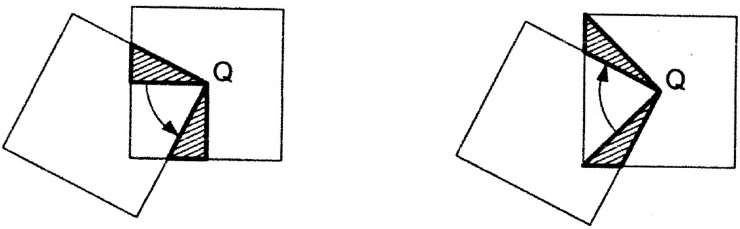
Obr. 5: Dělení čtyřúhelníku na části

N_2: Doplňme čtyřúhelník na útvary, jejichž obsahy umíme vypočítat (obr. 6).



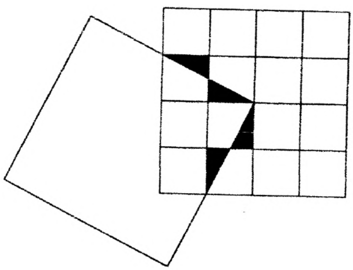
Obr. 6: Dělení obdélníku

N_3: Otočme vyšrafované trojúhelníky podle obrázku 7.



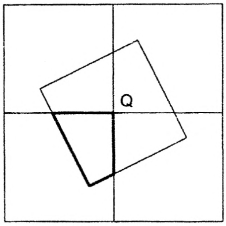
Obr. 7: Otáčení trojúhelníku

N_4: Nakresleme do jednoho čtverce malé čtverce podle obrázku 8.



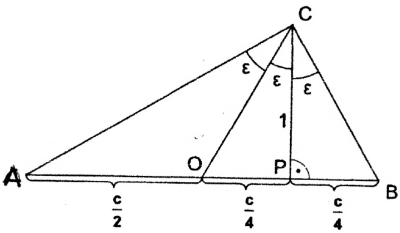
Obr. 8: Dokreslení malých čtverců

N_5: Dokresleme další 3 čtverce podle obrázku 9.



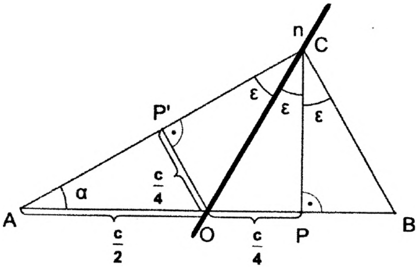
Obr. 9: Dokreslení tří čtverců

Příklad 3. *Dokažte: Jestliže výška CP a těžnice CO dělí úhel ACB trojúhelníku ABC na tři shodné části, je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB (obr. 10).*



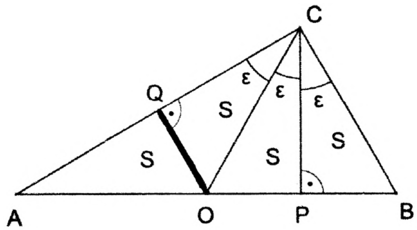
Obr. 10: Dělení úhlu na tři shodné části

N_1 (Jan Houska): Přímka $n = OC$ je osou souměrnosti, v níž bod P přejde do bodu P' (obr. 11). Z obrázku je řešení úlohy zřejmé. Protože $|OP| = \frac{c}{4}$, $|AO| = \frac{c}{2}$, je $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30\,°$. Podle věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku APC je $\varepsilon = 30\,°$ a $AC \perp BC$.



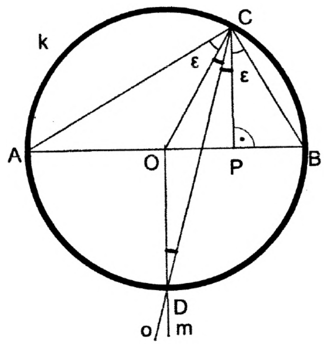
Obr. 11: Osa souměrnosti úhlu

N_2 (Jaroslav Švrček): Sestrojme výšku OQ trojúhelníku ACO (obr. 12). Z podmínek úlohy vyplývá, že trojúhelníky BPC, OPC, OQC, OQA mají týž obsah S, Q je střed strany AC a $AC \perp BC$.



Obr. 12: Výška trojúhelníku

N_3 (Karel Horák): Opišme trojúhelníku ABC kružnici k (obr. 13). Osa m strany AB se protne s osou o úhlu ACB v bodě D kružnice k. Ze shodnosti stejně označených úhlů lze snadno odvodit tvrzení úlohy.



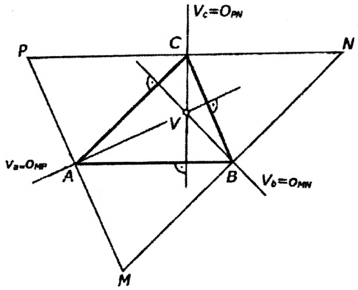
Obr. 13: Kružnice trojúhelníku opsaná

Dodejme, že v závorkách jsou uvedeni autoři jednotlivých nápadů.

Řešením naší úlohy jsme dokázali nejen to, že trojúhelník ABC je pravoúhlý, ale také to, že má velikosti ostrých úhlů $30\,°$ a $60\,°$. Nebylo by možné předpoklady úlohy oslabit, např. tím, že budeme požadovat pouze shodnost úhlů ACO a PCB? To vede k zajímavé úloze, jejíž řešení popisuji v knize (Kuřina, 2011, s. 128–132).

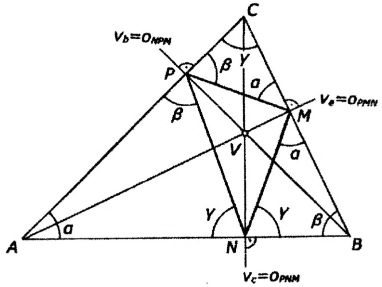
Obrázky hrají významnou roli nejen při řešení úloh, ale i při důkazech vět. Doložme to větou o průsečíku výšek trojúhelníku.

Podle publikace (Baltzer, 1883) založil sám velký Gauss důkaz této věty na nápadu sestrojit každým z vrcholů trojúhelníku ABC přímku rovnoběžnou s protilehlou stranou (obr. 14). V trojúhelníku MNP, který takto vznikne, jsou výšky trojúhelníku ABC osami stran trojúhelníku MNP a věta je dokázána. Tento důkaz se vyskytuje ve většině našich učebnic.



Obr. 14: Důkaz věty o průsečíku výšek

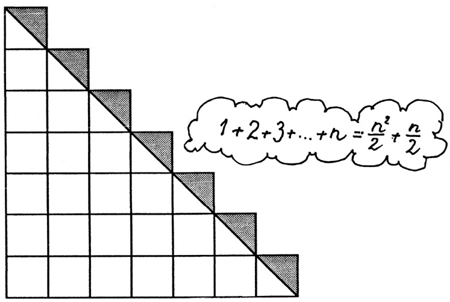
Nebylo by možné interpretovat výšky ostroúhlého trojúhelníku jako osy úhlů jiného trojúhelníku? Je to možné podle obrázku 15. Výšky trojúhelníku ABC jsou osami úhlů trojúhelníku MNP. Toto tvrzení je z obrázku 15 zřejmé, uvědomíme-li si, že např. trojúhelník MNB je podobný trojúhelníku ACB. Podobnost těchto trojúhelníků plyne z toho, že platí $|AN| = |AC| \cdot \cos\alpha$, $|AP| = |AB| \cdot \cos\alpha$.



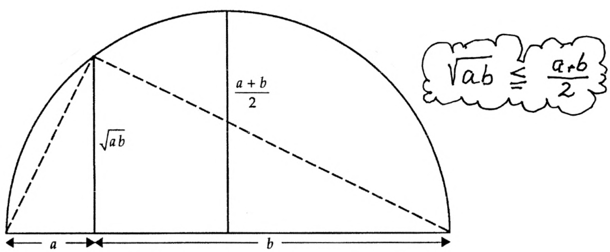
Obr. 15: Jiný důkaz věty o průsečíku výšek

Důkazy beze slov

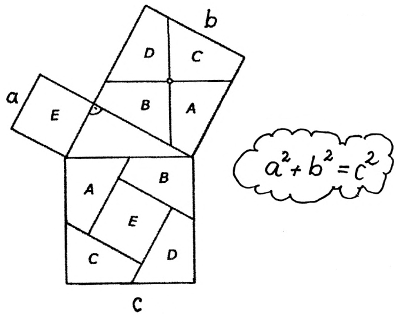
V příkladech, které jsme uvedli, stál obrázek na začátku řešení problému. Někdy ovšem může být obrázek tak výmluvný, že ho lze považovat, s trochou nadsázky, za důkaz beze slov, za vyjádření přesvědčení, že tvrzení platí. Snad nejrozsáhlejší zpracování této problematiky publikoval v dvoudílné knize *Proof without Words* americký matematik R. B. Nelsen. Jeho kniha byla přeložena i do češtiny (Nelsen, 1993). Pro ilustraci zde uveďme důkaz věty o součtu n přirozených čísel (obr. 16), důkaz nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (obr. 17), důkaz věty Pýthagorovy (obr. 18), důkaz věty kosinové pro ostroúhlý trojúhelník (obr. 19), důkaz věty o součtu nekonečné geometrické řady (obr. 20) a důkaz součtové věty pro funkci tangens, je-li součet $\alpha + \beta$ úhel ostrý (obr. 21).



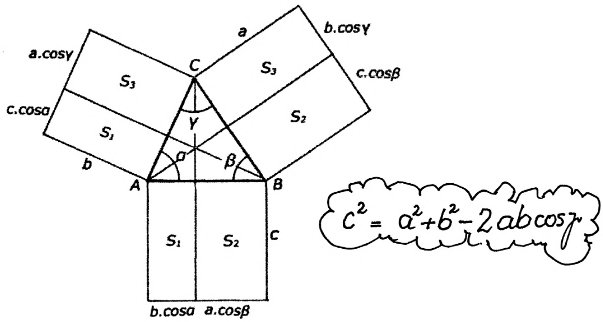
Obr. 16: Součet přirozených čísel (Nelsen, 1993, s. 70)



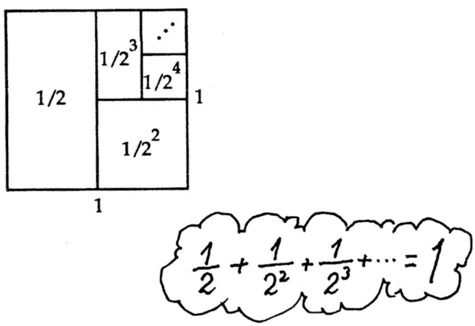
Obr. 17: Nerovnost mezi průměry (Nelsen, 1993, s. 49)



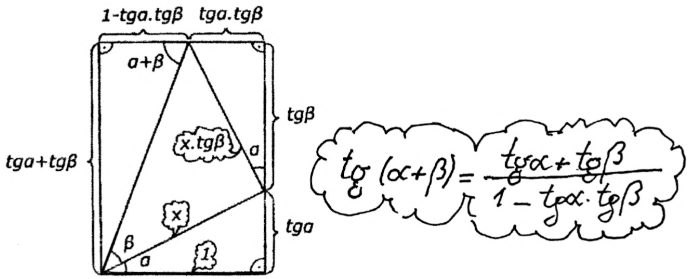
Obr. 18: Pýthagorova věta



Obr. 19: Kosinová věta



Obr. 20: Součet geometrické řady (Nelsen, 1993, s. 118)



Obr. 21: Součtový vzorec

Popsaný přístup je ovšem v příkrém rozporu se 70 let starým názorem Jana Vyšína: „Obrazec je při provádění důkazů jen jakýmsi přehledným seznamem označení a zápisem situace, nikoli podstatnou složkou při odůvodňování.“ (Vyšín, 1952, s. 5).

Podle mého názoru bychom měli věnovat vizuálním reprezentacím pojmů a postupů ve vyučování náležitou péči, protože mohou přispívat k porozumění matematice.

Literatura

[1] Baltzer, R. (1883). *Die Elemente der Mathematik.* II. Hirzel.

[2] Calda, E. (2003). *Pedagogické zásady a termíny ve výuce M & F.* Prometheus.

[3] Dam, Z. (2004). Kilka sposobów na dwuesiecną. *Matematyka, VII*(6).

[4] Hadamard, J. (1996). *The mathematician's mind.* Princeton University Press.

[5] Hejný, M., Bálint, Ľ., Benešová, M., Bereková, H., Bero, P., Frantíková, Ľ., Gábor, O., Hrdina, L., Repáš V., & Vantuch, J. (1989). *Teória vyučovánia matematiky 2.* Žlutá kniha. SPN.

[6] Holubář, J. (1960). Metodické semináře akademika Čecha o matematice. *Matematika ve škole, 6*, 325–329.

[7] Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh.* Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

[8] Kvasz, L. (2008). *Patterns of change.* Birkhäuser.

[9] Nelsen, R. B (2003). *Důkazy beze slov.* Young Scientist.

[10] Polya, G. (2016). *Jak to řešit?* Matfyzpress.

[11] Riečan, B. (2013). Kultúra v matematike, matematika v kultúre. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 42*(4), 71–72.

[12] Thiele, R. (1985). *Matematické důkazy.* SNTL.

[13] Vopěnka, P. (1971). Poznámky o současné matematice. *Filosofický časopis, XIX*, 731–753.

[14] Vopěnka, P. (2004). *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky.* Práh.

[15] Vyšín, J. (1952). *Elementární geometrie, I.* Přírodovědecké nakladatelství.

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: kurinovi@gmail.com