

Rozhledy matematicko-fyzikální

Bijekce

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 2, 31–32

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151713>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2023

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Bijekce

V tomto čísle jsme se v článku Dalibora Martiška: *Krocení jedné bijekce aneb o zipu a tkaničkách* (str. 13) seznámili s bijekcí mezi čtvercem $\langle 0; 1 \rangle^2$ a úsečkou $\langle 0; 1 \rangle$. Autor pomocí tkaniček bot ilustroval Königův důkaz. Ovšem Königova konstrukce funguje i pro důkaz mnohem obecnějšího tvrzení, slavné Cantorovy–Schröderovy–Bernsteinovy věty. Proto není divu, že existují jednodušší bijekce mezi čtvercem a úsečkou. Náš dnešní úkol pro čtenáře zní:

Úloha: Zkonstruujte vlastní co nejjednodušší bijekci

$$\langle 0; 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0; 1 \rangle \text{ nebo } \langle 0; 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$$

$$\text{nebo } (0; 1)^2 \rightarrow (0; 1) \text{ nebo } (0; 1)^2 \rightarrow (0; 1).$$

Nejelegantnější řešení příště otiskneme.

Nyní se pojdme vrátit k úloze o nudném profesorovi z minulého čísla a představit elegantní řešení Adama Blažka, studenta 2. ročníku Jaderné fakulty ČVUT. Nejprve připomeňme znění úlohy:

Úloha z minula: Nudný profesor vede tak nudnou přednášku, že studentům se chce spát už od jejího začátku. Téměř neustále alespoň jeden posluchač spí. Profesor ovšem dodržuje následující pravidlo: jestliže v některém okamžiku usne více než polovina přítomných studentů, bude se příště psát obzvláště zapeklitá písemka. V inkriminovaný den přišlo na přednášku pět studentů. Přednáška byla tak strašlivě nudná, že každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech). Navíc, a tuto informaci prosím interpretujte správně, každý spal s každým. Otázka zní: *Bude se příště psát písemka?*

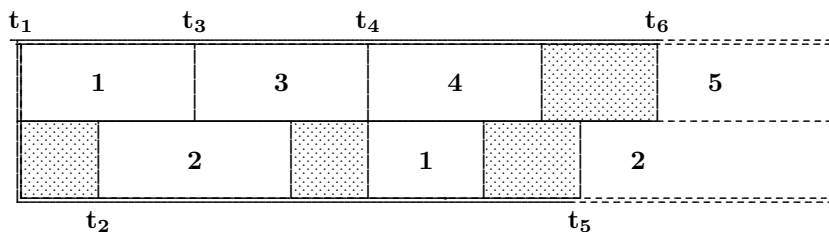
Řešení: Odpověď je *ano*. Tvrzení si dokážeme sporem. Předpokládejme, že na přednášce v inkriminovaný den spí v každém okamžiku nejvýše dva studenti. Označme jako J množinu okamžiků, kdy usnul alespoň jeden student. Jako D označme množinu okamžiků, kdy začali spát dva studenti zároveň, nebo se ke spícímu studentovi přidal druhý spáč. Na následujícím obrázku jsme takové okamžiky vyznačili. Studenty jsme pojmenovali 1, 2, 3, 4, 5.

MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

Zřejmě je $D \subset J$.

Pro začátek přednášky vyznačený na obrázku platí

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\} \subset J \quad \text{a} \quad \{t_2, t_3, t_4, t_6\} \subset D.$$



Počet prvků množiny J je nejvýše 10, protože každý z pěti studentů usnul právě dvakrát během přednášky, což dá nejvýše 10 různých začátků spánků. A rovnost $\#J = 10$ nastává, právě když žádní dva studenti neusínají ve stejném okamžiku.

Zároveň je ale počet prvků množiny D alespoň 10. Každý student spí s každým, proto pro každou z dvojic

$$\begin{aligned} &\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \\ &\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \\ &\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\} \end{aligned}$$

existuje okamžik, kdy začínají oba z dvojice spát naráz, nebo se jeden z dvojice připojuje k již spícímu kolegovi z dvojice.

Zjistili jsme, že

$$D \subset J \quad \text{a} \quad \#D = \#J = 10.$$

To znamená, že $D = J$.

Podívejme se na okamžik, kdy začíná spát první student. Tento prvek patří do J , tedy i do D . Tudíž v daný okamžik nutně začínají spát dva studenti naráz. To je ale spor s tím, že $\#J = 10$, protože jak jsme výše vysvětlili, J má 10 prvků jen v případě, kdy žádní dva studenti neusínají ve stejném okamžiku.