Jiří Veselý

Existuje královská cesta k exponenciále a logaritmu?

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 2, 65–80

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151448`

EXISTUJE KRÁLOVSKÁ CESTA K EXPONENCIÁLE A LOGARITMU?

JIŘÍ VESELÝ

Článek obsahuje popis metody výkladu o exponenciále a logaritmu realizovatelného na střední škole; poskytuje velkou variabilitu hloubky pohledu. Na tento výklad je snadné navázat i na vysoké škole. V extrémně příznivém případě lze (např. v semináři apod.) dokázat téměř vše, metoda však zároveň umožňuje smysluplné vynechávání některých kroků či jejich odložení na pozdější dobu. Exponenciála (označení: exp) a logaritmus (označení: log) jsou *elementární transcendentní funkce*; žáci se s nimi seznamují již záhy na střední škole, ale při jejich zavádění nevystačíme pouze s algebraickými operacemi a potřebujeme i limitní přechod. Přitom je z různých důvodů rozumné žáky s nimi seznámit, a to poměrně brzo: v jistém smyslu dříve, než většina žáků může pochopit látku v celé šíři (a hlavně hloubce). Proto se tak děje zpravidla postupně. Označení v tomto článku je voleno v souladu s potřebami: symbol $\log_c$ užíváme k označení logaritmu o základu c, přičemž u přirozeného logaritmu index vypouštíme (neužíváme tedy ani lg či ln). Také exp je pro nás vhodnější pro práci s funkcemi než e^x. Poznámky pod čarou obsahují většinou upozornění na možnost oživení výkladu.

Nezbytná trocha historie

Začneme zhruba v 16. století. V té době měli lidé zkušenosti jak s tabulkami, tak i s geometrickou posloupností. V jednom spisku se v souvislosti s ní objevila základní idea *logaritmických tabulek*. MICHAEL STIFEL (1486 – 1567) si povšiml v práci *Arithmetica*

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), absolvent MFF UK, pracuje v Oddělení historie matematiky MÚ UK. Článek je rozšířeným textem stejnojmenné přednášky na 5. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol v Mariánských Lázních.

integra z r. 1544, že při práci s aritmetickou a geometrickou posloupností

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & \dots \end{array}$$

násobení členů ve druhé řádce (např. $8 \times 32 = 256$) odpovídá sčítání exponentů v první řádce ($3 + 5 = 8$). Možný postup při zjednodušení násobení je zřejmý. Uvedená množina čísel, které bychom mohli násobit, je sice poněkud „řídká", ale princip dvojice aritmetické a geometrické posloupnosti je z příkladu již dobře patrný.

Zhruba v té době totiž vznikala naléhavá potřeba astronomie, navigace, obchodu, inženýrství apod. zrychlit a zpřesnit potřebné výpočty. Lze říci, že v jistém smyslu objev logaritmů „visel ve vzduchu" . Logaritmy se objevily nejprve ve formě tabulek jako pomůcka ke zjednodušení výpočtů. Nebyla to jediná cesta zjednodušování. Přibližně v té době se objevuje i první (mechanický) počítací stroj, který navrhl a zkonstruoval r. 1642 BLAISE PASCAL (1623 – 1662). Avšak již dříve si uměli někteří lidé násobení zjednodušit. Počtář PAUL WITTICH, který pracoval v r. 1582 na Hvaru, k tomu používal při práci na výpočtech pro dánského astronoma TYCHONA DE BRAHE (1546 – 1601)[1] vzorečku

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] .$$

V některých pramenech, např. v [Ev], se uvádí, že to mohl být jeden z myšlenkových zdrojů pro vznik logaritmických tabulek.

U zrodu prvních logaritmických tabulek stála trojice lidí: všestranně nadaný skotský šlechtic JOHN NAPIER (1550 – 1617), švýcarský jemný mechanik, hodinář a výpočtář JOOST BÜRGI[2]

[1] TYCHO DE BRAHE je pohřben v Praze v Týnském chrámu u Staroměstského náměstí.

[2] Pobýval v letech 1603 – 1622 v Praze; spolupracoval s JOHANNESEM KEPLEREM, kterému prováděl výpočty. Jeho tabulky byly publikovány r. 1920.

(1552 - 1632) a anglický matematik HENRY BRIGGS[3] (1561 - 1630).

Napierovy první tabulky obsahovaly 100 členů geometrické posloupnosti s prvním členem 10^7 a kvocientem $(1 - 10^{-7})$. Jeho definice logaritmů byla založena na spojitém pohybu (v té době to bylo s ohledem na kvantitativní úvahy o spojitosti patrně jediné možné řešení)[4].

Bürgi sestrojil (nezávisle) podobnou tabulku. Jestliže označíme jím zavedený logaritmus Bog, pak Bog je ve skutečnosti ve světle běžných soudobých definic již obecný logaritmus, tj.

$$\mathrm{Bog} x = \log_c x, \quad x \in (0, +\infty) ;$$

číslo c je definováno rovností $c = (1 + 10^{-4})^{10^4}$. Pro Bürgiho logaritmus již tedy platí (pro Napierův to neplatilo, šlo tedy vlastně o předchůdce logaritmu v našem smyslu)

$$\mathrm{Bog} xy = \mathrm{Bog} x + \mathrm{Bog} y .$$

Tato rovnice, ukazující jasně význam logaritmů pro převod násobení na sčítání, bude pro nás základem úvah. Briggs[5], který r. 1615 navštívil Napiera, dospěl po diskusi s ním k „vylepšeným" logaritmům, které nazýváme *dekadické logaritmy*. Jeho čtrnáctimístné tabulky byly publikovány v r. 1628; pro $\log_{10}$ samozřejmě platí také

$$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y .$$

[3]Mezi těmito třemi jediný profesionál; byl profesorem matematiky na univerzitě v Cambridge a patřil k propagátorům Keplerových objevů.

[4]Poznamenejme v této souvislosti ještě to, že někdy bývá *přirozený logaritmus* ne příliš šťastně nazýván Napierovým logaritmem.

[5]Tím pochopitelně historie tabulek nekončí. Tak např. JOHANNES KEPLER (1572 - 1630), který přišel r. 1600 do Prahy a stal se po smrti Tychona de Brahe dvorním hvězdářem Rudolfa II., používal Napierovy tabulky od r. 1614; velmi mu usnadnily numerické výpočty. Kepler později sám vydal jiné logaritmické tabulky r. 1624, zpočátku patrně silně závislé na Napierových (srv. [Go]). I když Kepler učinil v Praze mnoho objevů, po smrti Rudolfově r. 1612 odešel, patrně z náboženských důvodů, z Prahy do Lince.

Významnou vlastností *přirozeného* logaritmu je jeho vztah k rovnoosé hyperbole, který je pozdějšího data. GREGORIE DE SAINT VINCENT (1584 – 1667) si v práci *Opus Geometricum* (1647) povšiml, že jisté plochy odvozené od jejího grafu mají podobnou vlastnost jako dvojice aritmetické a geometrické posloupnosti používané v logaritmických tabulkách. Teprve však jeho žák a přítel, jezuita ALFONS ANTON DE SARASA (1618 – 1667), upozornil v práci *Problematis a Mersenne Propositi* (1649) na souvislost logaritmu a rovnoosé hyperboly o rovnici $xy = 1$. Označíme-li (kreslete si obrázek) symbolem $J_{a,b}$ pro $0 < a < b$ obsah obrazce omezeného přímkami o rovnicích $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a a křivkou $xy = 1, x \in (0, +\infty)$, platí pro všechna $t > 0$

$$J_{a,b} = J_{ta,tb}\ ;$$

viz např. [Kla], [To] apod. Odtud speciální volbou dostáváme pro $x, y \in (0, +\infty)$

$$J_{1,xy} = J_{1,x} + J_{1,y}.$$

Uvážíme-li souvislost „obsahu obrazce pod grafem funkce" s integrálem, dostáváme pro $x \in (0, +\infty)$[6] (srv. níže Kleinův přístup k definici přirozeného logaritmu) a pro f

$$(1) \qquad f(x) := J_{1,x} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

funkcionální rovnici

$$(2) \qquad f(xy) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in (0, +\infty)\ .$$

Je velmi lehké ukázat pro integrál z (1) tuto vlastnost přímo, pokud však máme k dispozici základní vlastnosti integrálu.

[6] S obvyklou konvencí pro případ splývajících mezí (pak je hodnota integrálu definována jako 0) nebo pro případ, kdy je dolní mez integrálu větší než horní (hodnotu definujeme jako hodnotu integrálu se zaměněnými mezemi a opačným znaménkem).

Tradiční vyjádření logaritmu pomocí řady

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \tag{3}$$

odvodil komplikovaně NICOLAS KAUFMAN, známější pod latinskou formou jména jako MERCATOR (1620 - 1687), v práci *Logaritmotechnia* z r. 1668.

U ISAACA NEWTONA (1643 - 1727) nacházíme také vzoreček (3); odvodil ho jednoduše integrací řady

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

člen po členu. Jeho objev pochází patrně z r. 1667, byl však publikován později. Teprve po publikování Mercatorovy práce Newton sepsal v r. 1669 práci *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*, která kolovala v rukopisné formě mezi anglickými matematiky a mnohé podstatně ovlivnila, byla však publikována tiskem v r. 1711 (největší část Newtonových výsledků pochází z let 1664 - 1666; srv. [Ed], str. 201). Newton také již pracoval s řadou pro inverzní funkci k log.

Je známo, že řada (3) se k výpočtu logaritmů nehodí, neboť velice pomalu konverguje; viz např. [Ja1]. K urychlení konvergence se používá různých triků, např. vícekrát objeveného rozvoje (pro $x \in (-1, 1)$)

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right] = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} ;$$

dospěli k němu JAMES GREGORY (1638 - 1675) v r. 1668 a později i astronom EDMUND HALLEY (1656 - 1742). Poznamenejme ještě, že dekadické logaritmy bývají někdy (naprosto adekvátně) nazývány Briggsovými logaritmy, zatímco „hyperbolický logaritmus" se nejčastěji nazývá přirozený (zkratka ln je odvozena od *logarithmus naturalis*) nebo ještě častěji jen logaritmus. Tohoto zvyku jsme se přidrželi i my.

LEONHARD EULER (1707 – 1783) používal při zavádění exponenciální a logaritmické funkce *nekonečně velkých* a *nekonečně malých* čísel. Tento nástroj byl později z rigorózních matematických úvah vymýcen a vrátil se do nich v modifikované podobě teprve v tomto století ve formě *hyperreálných čísel*; jsou základním prostředkem tzv. *nestandardní analýzy*. Nekonečně malá čísla byla zdrojem četných rozporů, i když se s nimi na intuitivní úrovni lehce pracovalo.[7]

Část Eulerových úvah si v nepatrně modifikovaném označení přiblížíme (viz [Ed], str. 272). Ve výkladu, který uváděné pasáži v jeho knize *Introductio in Analysin Infinitorum* předcházel, zavedl Euler *logaritmus* x při *základu* a (v soudobém označení $\log_a x$) jako takový exponent y, pro který platí $a^y = x$. Dále po poznámce, že $a^0 = 1$ píše pro nekonečně malé číslo ε rovnost

$$a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$$

s tím, že k a a *nejsou* na sobě nezávislé. Pro (konečné) číslo x pak zavádí nekonečně velké číslo N vztahem $N = x/\varepsilon$. Úpravami postupně dostává s využitím binomického rozvoje (ten znal a používal již Newton)

$$a^x = a^{N\varepsilon} = (a^\varepsilon)^N = (1+k\varepsilon)^N = \left(1+\frac{kx}{N}\right)^N =$$
$$1 + \frac{N}{1!}\left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \cdots .$$

Jestliže nyní píšeme všechny výrazy obsahující N v každém sčítanci do samostatného zlomku a užijeme-li dalšího Eulerova obratu (ten ho zdůvodňuje tím, že N je nekonečně velké)

$$1 = \frac{(N-1)}{N} = \frac{(N-2)}{N} = \cdots ,$$

[7] Matematické zvládnutí tohoto pojmu je silně netriviální. Jeho téměř intuitivní používání (při krácení se s nekonečně malými zacházelo jako s nenulovými čísly, přitom se však zanedbávala jako 0) kritizoval např. již biskup GEORGE BERKELEY (1685 – 1753); nekonečně malé nazýval „duchy zemřelých veličin“ .

dostáváme

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \cdots .$$

Nyní Euler dosadil $x = 1$ a dostal vztah mezi a a k

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots .$$

Pak zavedl[8] číslo e jako tu hodnotu a, pro kterou je $k = 1$ a ukázal, že jde o základ přirozených (hyperbolických) logaritmů; jsou tedy e^x, $x \in \mathbb{R}$ a $\log x$, $x \in (0, \infty)$ navzájem inverzní funkce a je

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Z rovností na začátku úprav dostal pak jednoduše dosazením za a a k formulku

$$\mathrm{e}^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N ,$$

kterou můžeme v soudobém označení přepsat do známého tvaru

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Poznamenejme, že studenti se často setkají nejprve se zjednodušeným tvarem této posloupnosti (pro $x = 1$), při zavádění čísla e. Euler podobně zaváděl i logaritmus.

Někdy se používají k zavádění exponenciály a logaritmu diferenciální rovnice. U nich je téměř nemožné vystopovat počátky teorie a správně ocenit přínos jednotlivců. Vyšetřovaly se nejprve bez jednotící teorie a výsledky jsou známé i z korespondence mezi jednotlivými matematiky.[9] Explicitně o rovnicích prvního řádu

---

[8] Základ přirozených logaritmů, tj. to číslo, jehož (přirozený) logaritmus je roven 1, je takto označován na Eulerovu počest; Eulerovo označení symbolem e se rychle vžilo.

[9] Pro nás je zajímavé, jak rychlá (!) a spolehlivá (!!) byla *kdysi* tato cesta šíření poznatků, i když to byl dnes stále méně používaný a právem někdy hanobený „snail mail“ a ne již téměř nepostradatelný e-mail.

píše r. 1693 v časopise *Acta Eruditorum* CHRISTIAN HUYGENS (1629 – 1695); popisuje je také GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716). Rovnice druhého řádu se v souvislosti s fyzikálními aplikacemi objevila již r. 1691.[10]. Jak je všeobecně známo, základní věty o existenci a jednoznačnosti řešení obecné rovnice prvního řádu jsou svázány se jmény GIUSEPPE PEANO (1858 – 1932) a WILLIAM FOGG OSGOOD (1864 – 1943)[11]

Jiný přístup k exponenciále a logaritmu nabízejí *funkcionální rovnice*. JEAN D'ALEMBERT (1717 – 1783) vyšetřoval funkcionální rovnice ve třech svých pracích z let 1747, 1750 a 1769. Poslední z prací má fyzikální charakter a obsahově úzce souvisí s [Da], Část 7. – Jedna aplikace.

Je samozřejmé, že již dříve bylo známo, že např. funkce log vyhovuje funkcionální rovnici (2), která váže operaci sčítání reálných čísel s násobením nezáporných reálných čísel. LOUIS A. CAUCHY (1784 – 1857) řešil rovnice po něm později nazvané v [Ca] v r. 1821. Zabýval se *spojitými řešeními* rovnic, které popisují v jistém smyslu všechny čtyři vztahy mezi základními operacemi s reálnými čísly[12]. Pro nás bude z nich zajímavá ještě rovnice

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Tisíc cest má jeden cíl...

Všimněme si blíže toho, proč *jsou* zkoumané elementární funkce exp a log tak důležité.

Logaritmy souvisely s praktickými potřebami zvládnout rychleji výpočty. V tomto směru její význam již pominul, protože dnes provádíme technické výpočty i s jednoduchou kalkulačkou podstatně rychleji. Vpád minikalkulátorů do matematiky je věcí několika posledních desetiletí, ale přesto by *historické poznámky* o logaritmických tabulkách měly ve středoškolských učebnicích

[10] U Bernoulliů, kteří nemalou měrou přispěli k rozvoji této disciplíny.

[11] OSGOOD velmi přispěl k přenesení některých trendů evropské matematiky do USA; byl ovlivněn částečně FELIXEM KLEINEM.

[12] Převádějí jednu operaci na druhou tak, že např. součtu dvou čísel je přiřazena hodnota jejich součinu, atp. Mnohem abstraktnější pohled (isomorfismy grup) na tuto problematiku nalezne čtenář např. v [Bo2], [π] apod.

zůstat. Logaritmy však mají i četné využití ve fyzice (škála intenzity zvuku apod.), takže odtud také přichází požadavek na brzké osvojení jejich základních vlastností.

Patrně nejdůležitější funkcí v matematice je *exponenciální funkce*. Setkáváme se s ní ve fyzice (absorbce záření, radioaktivní rozpad, ochlazování či oteplování), demografii (populační modely) apod. Její význam pro četné matematické disciplíny jen podtrhuje její důležitost.[13]

Funkce exp a log nejsou na sobě nezávislé, jsou totiž navzájem inverzní. Klasické cesty k jejich zavádění částečně kopírují historii a jsou velmi četné. V zásadě jde o to, *kdy* je zavádět, *jak* je zavádět a v jakých *souvislostech*; není totiž zpravidla časově možné je zavést nezávisle a pak teprve souvislosti zkoumat. V tom se názory různí i mezi autory vysokoškolských učebních textů: v některých se připraví celý teoretický základ pro pohodlné zavedení a zkoumání a pak se teprve funkce zavedou.

Tak např. velmi hezká učebnice [Wh] obsahuje definice těchto funkcí až na str. 202 (celkem jich má 244), podobně se postupuje v krásné učebnici [Ru]. Také v [Jal] se autor dostane k logaritmu až na str. 105. Ve skriptech, kdy se autor snaží dostat se brzo k netriviálním příkladům, bývají tyto funkce traktovány dříve (např. v [Čer] jsou zavedeny na str. 29 a násl., avšak důkazy jsou odloženy na pozdější dobu; v [Do] se zavádí exponenciála na str. 60 již v komplexním oboru, a to včetně důkazů potřebných tvrzení).

Na vysokoškolské úrovni máme mnoho možností. Můžeme tyto funkce zavést pomocí mocninných řad (srv. [Wh], [Ru] apod.): definujeme exponenciálu pomocí řady (znal ji již Newton, který ji nalezl invertováním řady pro logaritmus)

$$\exp x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

a logaritmus pomocí (3). Velmi snadno pak zvládneme rozšíření

[13] Souvislostí s úrokováním sahá historie exponenciály přes JAKOBA BERNOULLIHO (1654 – 1705) až do starověku; srv. [To].

exponenciály do komplexního oboru $\mathbb{C}$, obtíže budeme mít jen s logaritmem.

Můžeme jako Euler použít k zavedení exponenciály a (přirozeného) logaritmu posloupnosti funkcí (srv. [Do]) tvaru

$$\text{(5)} \qquad \exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n , \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{resp.}$$

$$\text{(5)} \qquad \log x = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right), \quad x \in (0, +\infty) .$$

Felix Klein[14] (1849 – 1925), považoval za nejvhodnější zavádět funkci logaritmus pomocí integrálu

$$\text{(6)} \qquad \log x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad x \in (0, +\infty) .$$

Tak se též v době mého studia na MFF zaváděl. Prakticky ekvivalentní (pro tuto funkci) je postup, zavádějící elementární funkce pomocí diferenciálních rovnic s vhodnými počátečními podmínkami (srv. [π], Téma 31)

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = 0, \quad \text{pro funkci log} ,$$
$$y' = y , \quad y(0) = 1, \quad \text{pro funkci exp} .$$

Konečně poznamenejme, že Cauchyovy funkcionální rovnice (2) a (4) (viz výše) po doplnění vhodnou podmínkou, určují funkce (srv. opět [π]) exp a log; jsou to rovnice

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in (0, +\infty) , \quad f'(0) = 1 ,$$
$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} , \quad f'(1) = 1 .$$

Jak je tomu na středních školách jinde ? Jestliže bude považovat gymnaziální profesor v SRN zavedení elementárních funkcí

[14] Je znám svým Erlangenským programem (jeho vstupní přednáška na erlangenské univerzitě o stavu současné geometrie) a také jako jeden z otců *didaktiky matematiky*; srv. [Kle].

za zajímavý problém, má např. možnost v [BT] získat množství základních informací o jednotlivých možnostech zavádění včetně citací na práce, kde je uvedený postup realizován. Zpravidla si patrně uvědomí, že většinu těchto fakt ze studia zná, má je však v hutné formě pohotově k dispozici. Stačí pak zajít do knihovny a má k dispozici ke zvolenému přístupu i celou řadu v [BT] citovaných textů na výběr. A konečně má také proč vybírat: jeho žáci díky vzdělávacímu systému mají v průměru větší předpoklady zvládnout i náročnější postupy. U nás je to poněkud jednodušší: *momentálně* potřebujeme přístup k této problematice co nejjednodušší, s velikou variabilitou náročnosti i časových nároků, *konsistentní s výukou na vysokých školách* a s *návazností* na učivo střední školy. Jednu takovou možnost přístupu níže popíši.

V dnešní době obvyklý středoškolský přístup není pochopitelně založen na uvedených vztazích: logaritmus bývá zaváděn „jako jistý exponent". Nabízený postup je kombinací eulerovské definice a „axiomatického přístupu" přes funkcionální rovnice. I když v optimálních podmínkách nelze à priori plnou realizaci postupu vyloučit, představa, že by mohlo jít o obecně přijatý přístup aplikovatelný na většině středních škol nebo jen většině gymnázií, není správná. Postup je však relativně velmi variabilní, neboť se z něj dá rozumným způsobem některé části bez ztráty souvislostí vypouštět, a to je jeho výhoda.

Postup by na úrovni střední školy měl přispět k lepšímu chápání partie o elementárních transcendentních funkcích, na úrovni vysoké školy pak přinést snadnou možnost navázání, při níž není nutno některé poznatky opakovat; pokud se přesto zopakují, dojde k jejich zlepšené fixaci. Je vhodné se však zmínit, proč takto *a ne jinak*. Dosavadní postup byl statický díky motivaci z tabulek a zatajoval obtíže (klasickým příkladem odjinud je měření oblouku u goniometrických funkcí či definiční obor odmocnin, kdy se automaticky pokládá definiční obor za zřejmý). Přístup přes mocninné řady je vzhledem k časové náročnosti (je například nutno zavést řadu pojmů, které se ve středoškolské látce nevyskytují) příliš náročný. Prakticky totéž platí i o diferenciálních rovnicích.

Perspektivní je přístup přes posloupnosti, ale chybí mu silný motivační náboj a možnost vynechávat těžší věci bez ztráty souvislostí. Tuto možnost naopak poskytuje přístup přes funkcionální rovnice, kde nedokázání obtížnějších věcí nemá tak negativní důsledky.[15] Proto tedy je popsaný způsob kombinací těchto dvou přístupů. Zbývá možnost „kleinovského přístupu", který rovněž považuji za dobře kombinovatelný s funkcionálními rovnicemi.[16] Nároky, které klade na zvládnutí integrace, jsou přiměřené (můžeme se spokojit např. s integrálem z monotónní funkce, ale i tak zbývá myšlenkově cenné jádro plně adekvátní možnostem žáků našeho gymnázia).

Jak na to ?

Nejprve několik značně obecných úvah. V době diferenciace středních škol (prakticky již na úrovni jednotlivých škol) se stále jeví patrný dvojí různý trend: jeden je podřízen požadavku učit pro bezprostřední vstup do praktického života pouze to, co se jeví nyní nutné či užitečné, druhý směřuje k přípravě žáků na další vzdělávání; ten akcentuje více způsoby myšlení a schopnost na základě již získaných znalostí se dále vzdělávat. Hranice mezi trendy *není* přesně vymezena a liší se i mezi jednotlivými předměty.

Někdy se zdá, že jde o trendy s naprosto neslučitelnými zájmy a na školách dochází k ostrému boji o čas. To přitom velmi postihuje matematiku, kde rozdíl mezi zvládnutím receptáře a osvojením si matematického myšlení (i stylu práce založeného na přesnosti, systematičnosti a spolehlivosti) je propastně veliký. Může se tedy stát a také se i stává, že dosavadní obsah a použité metody nedávají možnost vše ve vymezené době stihnout.

V této části popíšeme přístup k látce tak, jak by se měl dát při eventuálně i malé časové dotaci realizovat. Nejprve stručný komentář k celkové situaci. Již při probírání dělitelnosti přirozených čísel je vhodné jako ilustraci ukázat, že pro žádný zlomek p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ neplatí $(p/q)^2 = 2$. Tak eventuálně s předstihem

[15] Funkcionální rovnice jsou vděčnou partií pro obohacení středoškolské látky o atraktivní a dobře zvládnutelný materiál. Existuje několik publikací, které lze dobře využít, např. [Da], [Ne] či [Sm].

[16] A skutečně se tak i realizoval. Srv. [Kle].

ukážeme, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. Podotkneme, že stejně to lze ukázat místo pro 2 i pro libovolné prvočíslo, eventuálně připojíme informaci, že totéž je pravda i pro každé přirozené číslo, které *není* čtvercem přirozeného čísla.

Později u desetinných rozvojů a „negativní definice" iracionálních čísel (ta, která nejsou racionální) zdůrazníme, že například pro $\sqrt{2}$ existuje možnost dobrého přiblížení zdola i shora racionálními čísly; v té době by měli žáci *vidět* (ne nutně i aktivně ovládnout, to stačí později) způsob převodu periodického desetinného rozvoje na zlomek; aktivní zvládnutí by mělo přijít na řadu se sčítáním geometrické řady. Ve stejné době by se mělo též zdůraznit, jak z desetinného rozvoje získáváme snadno racionální aproximace se zadanou přesností a že tyto aproximace tvoří nerostoucí a neklesající posloupnost (stačí intuitivní chápání věci ukazující, že vážný problém „děr" na číselné ose je nějak řešitelný). Nesmíme přitom zapomenout na numerické experimenty, třeba jen s jednoduchou kalkulačkou, typu $1^2 < 2 < 2^2$, $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$, $(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2, \ldots$ Rozhodně je však vhodné říci, že *není zcela zřejmé či jednoduché* ukázat, že funkce $f(x) = x^2$ zobrazí interval $(0,\infty)$ *na* $(0,\infty)$, dokonce pak i to, že pro *nějaké* $a \in (0,\infty)$ je $a^2 = 2$.

Při probírání reálných čísel, kdy se vlastně dojde k tomu, že reálná čísla mají stejné vlastnosti jako čísla racionální (stručně: tvoří uspořádané pole), je nutno zdůraznit, co pro $\mathbb{R}$ platí navíc, např. v názorné formě *principu vložených intervalů*; upozorníme (opět v intuitivní rovině) na chování krajních bodů, které tvoří monotónní omezené posloupnosti (nebudeme mluvit o *limitách*, opět maximálně jen o vágním blížení k nějakému číslu). Teprve v úvodu k infinitezimálnímu počtu pojem posloupnosti zopakujeme a zavedeme $\lim_{n\to\infty} a_n$. Tam také přidáme konečnou formu *axiomu úplnosti* oboru $\mathbb{R}$, např. ve tvaru:

Každá monotónní omezená posloupnost v $\mathbb{R}$ *má (v* $\mathbb{R}$*) limitu.*

Dále by se měli žáci dozvědět, např. v souvislosti s poučením o používání kalkulaček, něco o historii logaritmů, spíše však opět jen v informativní rovině; je anachronismem snažit se naučit žáky aktivně je používat ke zjednodušení násobení. Přitom by měli poznat, že šlo o užití „složitých funkcí" a že investice času do tvorby tabulek těchto funkcí poskytovala možnost podstatně urychlit jejich použitím složitější výpočty. Také by měli pochopit, že obor reálných čísel se nezavádí jen kvůli odmocninám apod.[17] Podstatné je relativně brzo provést seznámení s rovnicemi

$$\boxed{f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in (0, +\infty)} \quad \text{a}$$

$$\boxed{f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}} \, .$$

včetně triviálních řešení pomocí konstantních funkcí. Jednoduché vlastnosti nekonstantních řešení lze začít zkoumat velmi brzo, konečné řešení se však odloží až po probrání základních vlastností obecných funkcí (monotonie, bijektivita apod.). Pak je možno vyslovit „zaváděcí větu" o existenci a jednoznačnosti, ne však nutně v té formě, v níž bývá zpravidla vyslovována na vysoké škole:

Existuje jediná funkce f, pro kterou platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ (a) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, (b) $f(x) \geq x + 1$, (c) $f : \mathbb{R} \overset{na}{\to} (0, +\infty)$.

Jak se odvozují důsledky, které z (a) a (b) lehce vyplynou ? Lze postupovat takto: z (b) plyne $f(1) \geq 2 > 0$, takže je $f(1) = f(0 + 1) = f(0) \cdot f(1)$, a tedy

$$\boxed{f(0) = 1}$$

(zde je vhodné poznamenat, že role bodu 1 v úvaze není podstatná a že k ní stačí nalézt (nebo předpokládat existenci) jediný bod x_0, pro který je $f(x_0) \neq 0$). Dále platí pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0 \, ,$$

[17] Není špatné je upozornit na to, že přímka v souřadné rovině může procházet pouze jediným bodem s oběma souřadnicemi racionálními a všechny ostatní body této vlastnosti mine.

tedy všechna řešení rovnice (a) jsou nezáporné funkce. Protože dále platí i

$$f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x) ,$$

vyhovuje každé nenulové řešení rovnice (4) i rovnici

$$\boxed{f(-x) = \frac{1}{f(x)}}$$

a jsou s ohledem na předcházející nerovnost dokonce *všude kladná*. Je tedy

$$\boxed{f(x) > 0 , \quad x \in \mathbb{R} .}$$

Také ihned zdůrazníme důsledek

$$\boxed{f(y - x) = f(y) : f(x) .}$$

Konečně lze indukcí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ ze vztahů

$$f(2x) = f(x + x) = (f(x))^2 ,$$
$$f((n + 1)x) = f(nx + x) = (f(x))^n \cdot f(x) = (f(x))^{n+1}$$

dokázat

$$\boxed{f(nx) = (f(x))^n .}$$

Volíme-li $t = \dfrac{m}{n}x$, $x \in \mathbb{R}$, m celé a n přirozené, dostáváme

$$(f(t))^n = f(nt) = f(mx) = (f(x))^m, \text{ tj. } f\left(\frac{m}{n}x\right) = (f(x))^{(m/n)},$$

a odtud rovnost

$$\boxed{f(rx) = (f(x))^r}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$. Speciálně pro tato r dostáváme po dosazení $x = 1$ rovnost

$$\boxed{f(r) = (f(1))^r .}$$

Ještě si všimneme, že z (b) dosazením $-x$ za x, úpravou a spojením s (b) dostaneme pro $x \in (-\infty, 1)$

$$\boxed{1 + x \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}\,.} \tag{7}$$

Tyto jistě zcela elementární úvahy jsou odvozením základních vlastností exponenciály a současně i jednoduchým nácvikem deduktivního uvažování, zobecnění a ukázkou axiomatického přístupu. Hodí se ukázat, že máme tedy pravidlo pro zacházení s 2^x i 3^x, že víme, jak se pracuje s racionálními exponenty a že se ukazuje i to, že tak lze pracovat i se všemi reálnými exponenty. Není třeba se bránit zjednodušením, je však nutné je *komentovat*. Kdy a kolik z předvedených úvah učitel v regulární výuce nebo v nepovinném semináři udělá, by mělo být jednoznačně jeho věcí. Také případné modifikace postupu by mu neměly činit potíže.

Triky resp. podvody s případy iracionálního základu jsou vážným problémem: upozorníme obecněji na obtížnost definovat obecně a^b pro $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Znovu se vrátíme k základnímu tvrzení a zdůrazníme, že jsme je nedokázali (nezdůvodnili), ale že pracujeme pouze s jeho důsledky a dokážeme ho (nebo že se dokáže na vysoké škole) později. Všimněte si konečně, prosím, že dosavadní úvahy nebyly časově náročné.

Dokončení v příštím čísle