Pavel Leischner

Trojúhelníky a posloupnosti (1)

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 1, 7–13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151409`

TROJÚHELNÍKY A POSLOUPNOSTI (1)

PAVEL LEISCHNER

Učitelé matematiky se obvykle důvěrněji seznamují s úlohami doprovázejícími předepsané učivo až při výkonu svého povolání. Vytvářejí si přitom určitou nadstavbu, jejíž podstatou je hlubší proniknutí do učiva na zcela elementární úrovni a umění využívat toho bezprostředně při výuce. Ukažme si vývoj takové nadstavby na několika situacích ze života středoškolské profesorky Jany F.

Situace I.

Jana je začínající učitelkou na gymnáziu. Poprvé ve třídě probrala učivo o posloupnostech a připravuje si písemnou práci. Chce tam zařadit úlohu na aritmetickou posloupnost. Ne příliš těžkou, ale takovou, při níž by žák musel trochu uvažovat a ne jen formálně pracovat s mechanicky naučenými vzorci. Úkol, který nebyl v hodinách a vyžaduje dát poznatky o posloupnostech do souvislosti s jinou oblastí matematiky. Nakonec se rozhodne pro úlohu, kterou našla v [1] a číselně pozměnila:

Úloha 1.

Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Vypočtěte obvod trojúhelníku, má-li jeho delší odvěsna velikost 6 cm.

Jana předpokládá, že si žáci nakreslí obrázek, vzpomenou si na Pythagorovu větu a sestaví přibližně tento zápis:

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 \\
(1)\qquad &b = 6 = a_2 = a_1 + d \qquad\qquad a^2 + b^2 = c^2 \\
&c = a_3 = a_1 + 2d
\end{aligned}
$$

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2d)^2$$

$$a_1 + d = 6$$

Vyřešením soustavy posledních dvou rovnic zjistí, že $a_1 = 4{,}5$

a $d = 1{,}5$, odtud $a = 4{,}5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7{,}5$ cm a obvod trojúhelníka $o = a + b + c = 18$ cm.

Situace II.

Písemná práce je opravena. Velká část třídy řešila úlohu 1 podle Janiných představ. Několik studentů však počítalo stručně — víceméně na čtyřech řádcích:

$$\begin{aligned} a &= 6 - d \\ b &= 6 \\ c &= 6 + d \\ \text{Obvod} &= a + b + c = 18\text{cm} \end{aligned} \tag{2}$$

Janu jejich postup překvapil. Nikdy si předtím nemyslela, že by žáci mohli takto uvažovat. Oceňuje pěkný nápad, ale cítí se být podvedena. Dá žákům jedničku. Má přitom pocit, že ji získali příliš levně. Vždyť neodvedli téměř žádnou práci, neprokázali znalost Pythagorovy věty a nespočítali délky stran trojúhelníka jako jiní, pilnější studenti!

Navíc je jí jasné, že uvedenému řešení ještě něco podstatného chybí. Mělo by se totiž ukázat, že trojúhelník požadovaných vlastností s obvodem 18 centimetrů existuje. Z odborného hlediska jde o hrubou chybu, ale zhoršovat za to známku připadá učitelce nespravedlivé. Předtím je k takovým úvahám nevedla. Je sice pravda, že se žáci učili dělat zkoušky při řešení rovnic a slovních úloh, ale víceméně to považují za formální záležitost.

Při rozboru písemné práce se třídou Jana poukazuje na nutnost prokázání existence trojúhelníka a setkává se s nepochopením. Studenti mají pocit, že chce za každou cenu snížit hodnotu jejich postupu. (Úkol byl přece jasný: Měl se vypočítat obvod daného trojúhelníka - co ještě dokazovat? Cožpak existenci trojúhelníka nepředpokládá již samotný text úlohy?)

Jana se rozhodne, že již nikdy nezařadí takovou úlohu do písemky. Bude ji raději využívat při procvičování učiva s celou třídou. Povede-li vhodně rozhovor, naleznou řešení (2) i žáci ve slabších třídách. Jak ale didakticky vyřešit problematiku existence? Umíní si vymyslet analogickou úlohu o neexistujícím trojúhelníku.

Situace III.

Po několika letech se setkáváme s Janou ve vyučovací hodině. Zadala úlohu 1. Radkovi se podařilo nalézt řešení (2). Napsal je na tabuli. Jana jej pochválila a obrací se ke třídě: „Nechtěl by k úloze ještě někdo něco dodat nebo připomenout? Je Radkovo řešení zcela v pořádku?“
Třída mlčí. — „Dobře, zadáme si tedy další úkol.“ (Jana diktuje úlohu 2.)

Úloha 2

Délky stran a, b, c ($a \leq b \leq c$) trojúhelníka, který je vepsán do kružnice o poloměru 5 cm, tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete obvod trojúhelníka, je-li $b =$ $= 9$ cm.

Hlásí se Jitka (a jde napsat zápis na tabuli.) „To vyřešíme stejně. Obvod bude $o = (b - d) + b + (b + d) = 3b = 27$ cm. V každé takové úloze bude obvod 3b.“
Jana: „To jsi Jitko velmi pěkně řekla. Nemá někdo ještě nějaké připomínky?“
Nikdo se nehlásí. Jana: „Jako domácí úkol vám dnes zadám sestrojit trojúhelníky z úloh 1 a 2 a snad i vypočítat jejich strany. Napřed si o tom ještě pohovoříme. Co víme o trojúhelníku z první úlohy?“
V následujícím rozhovoru si žáci ujasní: Je-li strana a o nějakou vhodně zvolenou délku d kratší než b a zároveň je c o tutéž délku d větší, pak $a+c = 2b$ a naopak. Tvrzení, že a, b, c jsou po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti je tedy ekvivalentní s podmínkou $a + c = 2b$. Společně zformulují domácí úkol:

Úloha 3

Sestrojte trojúhelník ABC, je–li dáno: $|\sphericalangle ACB| = 90°$, b $=$ $= 6$ cm.

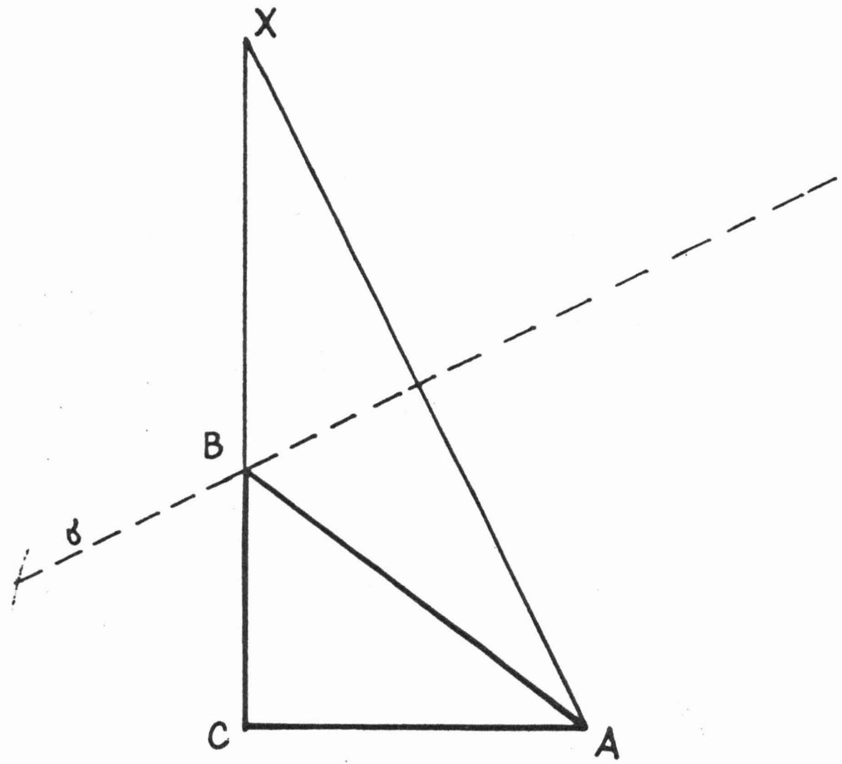
Úloha 4

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $b = 9$ cm, $a+c = 18$ cm a poloměr kružnice trojúhelníku opsané je 5 cm. (Stačí přibližná konstrukce — nemusí být eukleidovská.)

Úloha 5

Pokuste se vypočítat délky stran trojúhelníků z úloh 1 a 2.

V dalším rozhovoru se Jana ptá žáků, jak by postupovali při řešení úlohy 3. K tabuli jde Petr a namaluje obrázek 1



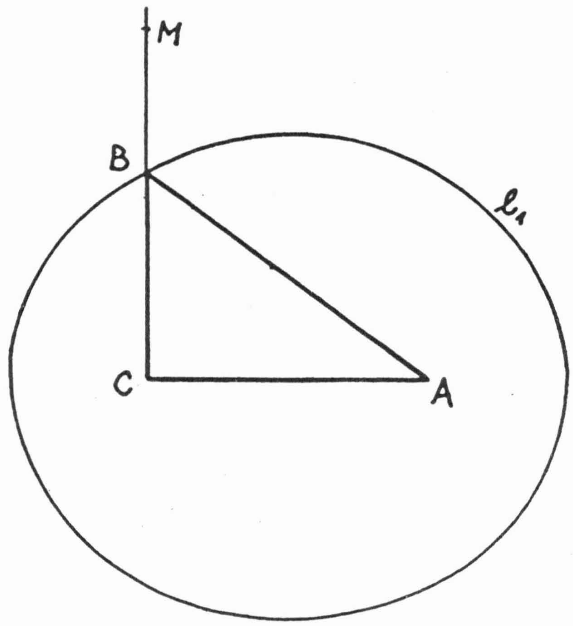
Obr. 1

„Jestliže bude $|CX| = a + c$, pak trojúhelník AXB je rovnoramenný, protože $|BX| = |AB| = c$. Každý rovnoramenný trojúhelník je souměrný podle osy své základny. Proto leží bod B na ose o úsečky AX. Při konstrukci nejprve narýsujeme pravoúhlý trojúhelník AXC, u nějž známe odvěsny $|AC| = b = 6$ cm, $|CX| = 2b = 12$ cm. Pak sestrojíme osu úsečky AX a v jejím průsečíku s CX je vrchol B. Jana: „A co když přímka o protne místo úsečky CX úsečku CA?“ Petr: „To nemůže, protože $|AX| = 2|AC| > |AC|$ a osa přepony protíná vždy jen delší odvěsnu - prochází totiž středem oblouku Thaletovy půlkružnice." (Dokresluje do obrázku příslušný oblouk.) Jana: „Výborně! Tak již víme, jak sestrojit trojúhelník z úlohy 3 a dokonce víme, že úloha bude mít řešení. Určitě se dá vyřešit i jinak. Jestlipak víte jak?" Když nikoho nic nenapadá, Jana pokračuje: „Ze zadání víme, že vrchol B patří do množiny všech bodů Y, pro něž je součet $|CY| + |YA| = 12$ cm. Nedala by se taková množina nějak sestrojit?" Zdeněk: „Co kdybych si narýsoval úsečku AC a do jejích krajních bodů zapíchl špendlíky. Na ně bych navázal tenký provázek délky přesně 12 cm a pak bych ho hrotem tužky napjal a pohyboval bych při napjatém provázku tužkou po papíru? Čára tužkou nakreslená by pak byla hledanou množinou." Jana: „To je vynikající nápad. Co myslíte, jakou čáru touto konstrukcí dostaneme?" Jirka: „Dostaneme elipsu. Já už jsem o tom někde četl. Myslím, že se tomu říká provázková konstrukce elipsy." Jana: „Správně Jirko. Mohli bychom tomu také říkat Maxwellova konstrukce. James Clark Maxwell se proslavil jako tvůrce teorie elektromagnetického vlnění. Objevil však také tuto konstrukci a to asi před 150 lety, když mu bylo 14 let a byl žákem střední školy. V době jeho dětství popisovali matematici elipsy dosti složitými rovnicemi. Archeologové tehdy zjistili, že na pohřebních urnách starověkých Etrusků se nacházejí eliptické ornamenty, které těmto rovnicím přesně odpovídaly. Jak mohli Etruskové před několika tisíci lety sestrojovat tak přesné elipsy, když neznali vyšší matematiku? Mladičkého Maxwella tato otázka zaujala. Po několika týdnech usilovného přemýšlení objevil nejen provázkovou konstrukci elipsy, ale našel analogické vlastnosti u paraboly, hyperboly a u celé řady podobných křivek. Sepsal o tom svou první vědeckou práci, jejíž výsledky byly předneseny na zasedání Akademie věd a v níž v jistém smyslu přetrumfnul i tak slavné vědce, jako byl Descartes, Newton a Huygens.

Vraťme se však k domácími úkolu. Vyřešte úlohu 3 Petrovým způsobem a také pomocí provázkové konstrukce elipsy. V úlohách 4 a 5 si zvolte postup podle svého uvážení."

Situace IV.
V následující hodině matematiky Jana kontroluje domácí úkol.

Druhé řešení úlohy 3 provedli žáci podle obr. 2. Sestrojili pravý úhel ACM ($|AC|$ =6 cm) a bod B jako průsečík polopřímky CM

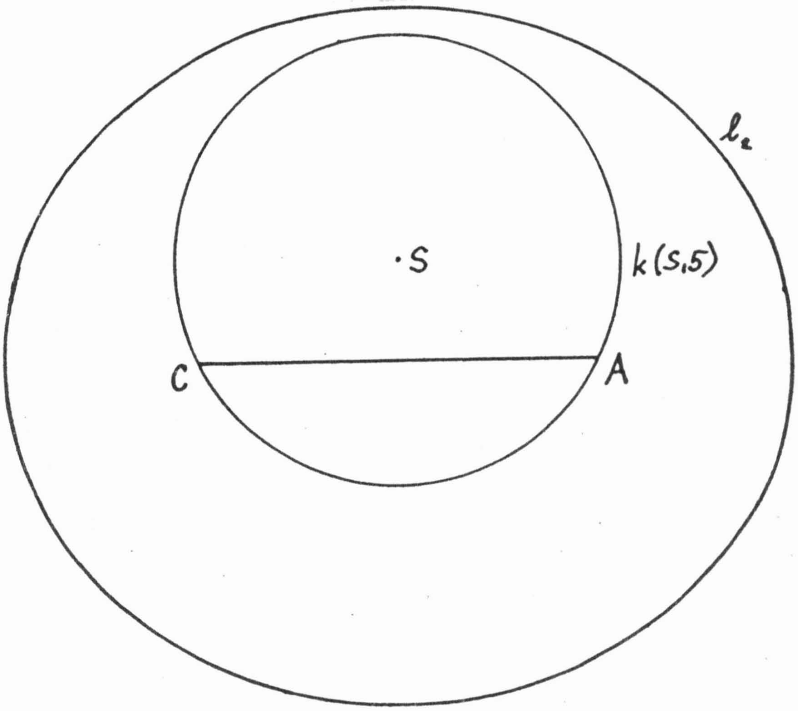


Obr. 2

s elipsou l_1 o hlavní poloose 6 cm nakreslenou pomocí špendlíků a niti tak, aby její ohniska byly v bodech A, C. Úlohu 4 řešili podle obr. 3. Do kružnice k o poloměru 5 cm vepsali tětivu AC délky 9 cm. Pak sestrojili provázkovou konstrukcí elipsu l_2 s ohnisky A, C a hlavní poloosou 9 cm. Zjistili, že trojúhelník v tomto případě neexistuje, neboť jeho vrchol B by měl ležet současně na elipse i na kružnici. Křivky však nemají společné body. Délky stran trojúhelníka z úlohy 3 vypočítali způsobem (1), v případě druhého trojúhelníka se výpočet nepodařil. Jana jim tedy pomohla jednu elementární metodu objevit. Tak se početně přesvědčili o neexistenci trojúhelníka.

Situace V

Uplynulo několik dalších let. Jana je již v oblasti úloh o trojúhelnících, jejichž délky stran tvoří aritmetickou posloupnost, zkušená. Provedla si analýzu úloh tohoto typu a v případě pravoúhlého trojúhelníka dovede takové úlohy okamžitě vymýšlet a hned ví, jak která může být pro žáky obtížná a ví i jaký bude výsledek. V hodině improvizuje, zadává úlohy z hlavy podle potřeby, jak to vyžaduje okamžitá situace. Získala patřičnou nadstavbu.



Obr. 3

V příštím čísle tohoto časopisu prozradíme, jak Jana uvažovala a uvedeme také početní důkaz neexistence trojúhelníka z úlohy 2, který poradila žákům. Zatím se o to pokuste, milí čtenáři, vy. V úloze 5 jsou příklady úkolů, které Jana vymýšlela a zadávala v hodinách matematiky.

Úloha 6.

Délky a, b, c ($a \leq b \leq c$) stran pravoúhlého trojúhelníka ABC tvoří aritmetickou posloupnost. Určete tyto délky, jestliže:
a) obvod trojúhelníka je 72 cm, b) delší odvěsna má délku 6 cm, c) obsah trojúhelníka je 54 cm^2, d) poloměr kružnice opsané je 7,5 cm, e) poloměr kružnice vepsané je 1,5 cm, f) označíme-li M bod dotyku přepony s kružnicí trojúhelníku vepsanou, pak $|AM| = 3$ cm.

LITERATURA:

[1] P. Benda a kol., *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*, SPN, Praha, 1983.

[2] A. Mitrofanov, *Pjervaja naučnaja rabota Maxvella*, Kvant, 12/1979.