Jakub Řada

Řešení kvadratické rovnice graficky

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 3, 14–18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151279

Řešení kvadratické rovnice graficky

Jakub Řada, MFF UK, Praha

Abstrakt. Kvadratická rovnice je standardně řešena pomocí diskriminantu či rozkladu na součin. V tomto článku si ukážeme další metodu hledání kořenů určitého typu kvadratické rovnice pomocí pravítka a kružítka, tj. užitím tzv. eukleidovské konstrukce.

Standardní hledání kořenů kvadratické rovnice

Obecná kvadratická rovnice je dána předpisem $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Nejuniverzálněji se kvadratická rovnice řeší přes diskriminant, kde hledané kořeny mají tvar

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dále je hojně využívanou metodou rozklad na součin pomocí Viètových vzorců. V tomto případě se rovnice rozloží na součin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

kde x_1 a x_2 jsou hledané kořeny kvadratické rovnice, jelikož splňují $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ a $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Tyto metody řešení kvadratických rovnic jsou podrobně rozepsané v učebnici Rovnice a nerovnice [2, s. 122–125]. V tomto článku si však ukážeme netradiční způsob hledání kořenů kvadratické rovnice využitím planimetrické konstrukce, kterou popisuje Descartes ve své knize La Géométrie [1, s. 4–7].

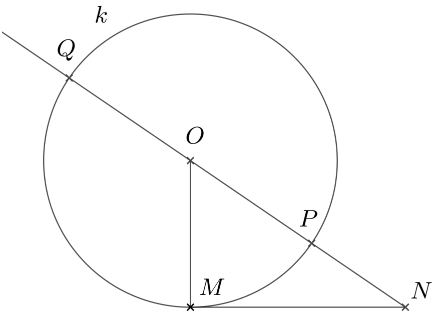
Grafické hledání kořenů kvadratické rovnice

Nejprve upravme obecnou kvadratickou rovnici na normovaný tvar a vyjádřeme druhou mocninu neznámé.

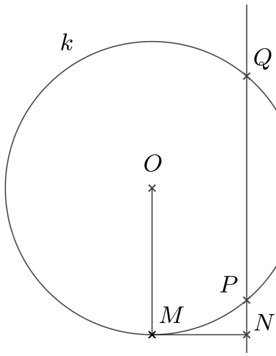
$$x^2 = px + q, \quad \text{kde } p = \frac{-b}{a},\ q = \frac{-c}{a}.$$

Konstrukce kořenů pro případ $q > 0$: Sestrojme pravoúhlý trojúhelník MNO (obr. 1a) s pravým úhlem u vrcholu M, kde délka strany

$|MN| = \sqrt{q}$ a $|MO| = \left|\frac{1}{2}p\right|$. (Čtenář si rozmyslí, že pravý úhel lze konstruovat kružítkem a pravítkem). Nyní sestrojme kružnici k se středem v bodě O o poloměru $|MO|$. Průsečíky kružnice k s prodlouženou stranou trojúhelníku ON označme P a Q. Potom vzdálenosti $|PN|$ a $|QN|$ jsou hledaná řešení kvadratické rovnice až na znaménko, neboť vzdálenost je vždy kladná. Znaménko určíme později.



(a) První konstrukce



(b) Druhá konstrukce

Obr. 1: Grafické hledání kořenů kvadratické rovnice $x^2 = px + q$

Důkaz. Kořeny x_1, x_2 mají být rovné vzdálenostem

$$x_1 = |PN| = |ON| - |OP| \quad \text{a} \quad x_2 = |QN| = |ON| + |OQ|$$

až na znaménko. Jelikož $|OP| = |OQ| = |OM|$, můžeme hledané řešení zjednodušit: $x_{1,2} = |ON| \pm |OM|$.

Dle Pythagorovy věty je délka strany

$$|ON| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + (\sqrt{q})^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{-c}{a}} = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac},$$

tudíž hledaná řešení jsou

$$x_{1,2} = |ON| \pm |OM| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \pm \frac{b}{2a}.$$

Tím jsme dokázali, že nalezené vzdálenosti se rovnají našemu známému vzorci s diskriminantem až na znaménko, neboť vzdálenost nemůže být záporná.

Konstrukce kořenů pro případ $q < 0$: V tomto případě začneme stejně jako v předchozí konstrukci pouze s tím rozdílem, že položíme $|MN| = \sqrt{-q}$ (obr. 1b). Tedy $|OM| = \left|\frac{1}{2}p\right|$ a $k(O, |OM|)$ zůstávají stejné. Poté sestrojíme rovnoběžku s úsečkou OM procházející bodem N. (Čtenář si rozmyslí, že konstruovat rovnoběžku daným bodem lze pomocí pravítka a kružítka). Průsečíky rovnoběžky s kružnicí k označme body P a Q. Vzdálenosti $|NP|$ a $|NQ|$ určují opět velikosti kořenů (opět až na znaménko, které určíme později).

Důkaz této konstrukce je analogický s důkazem konstrukce první.

Existence řešení a konstruovatelnost

Pokud vychází diskriminant záporný, tak kvadratická rovnice nemá řešení v $\mathbb{R}$. Stejně tak není hledání řešení kvadratické rovnice graficky univerzální, protože nastanou případy, kdy konstrukci nelze sestrojit.

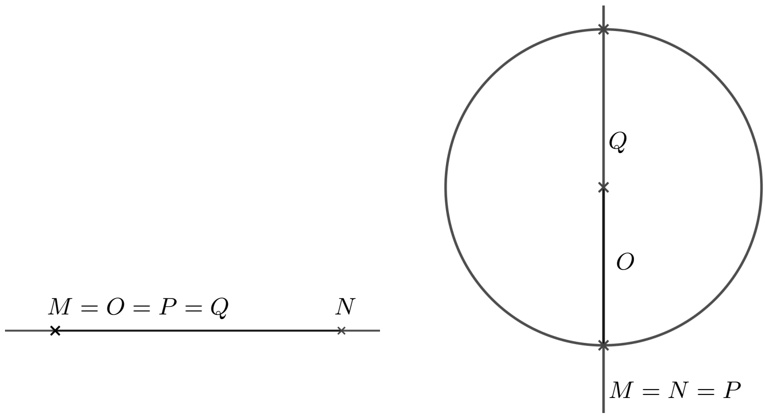
- Bude-li $a = 0$, pak nelze konstrukci provést, nejedná se o kvadratickou rovnici.
- Pokud bude $b = 0$ nelze sestrojit stranu trojúhelníku $|MO| = \frac{1}{2}p$. Na druhou stranu je možné celou konstrukci zjednodušit do hledání úsečky (obr. 2a) délky $\sqrt{q}$. Neboť dostáváme ryze kvadratickou rovnici, která má stejné řešení (opět až na znaménko).
- Také může nastat případ, kdy bude $c = 0$. Pak se pravoúhlý trojúhelník MNO zdeformuje na úsečku, protože body M a N budou splývat (obr. 2b). Kořeny pak vychází $x_1 = |ON| - |OM| = 0$ a $x_2 = |ON| + |OM| = 2|OM| = 2\left|\frac{1}{2}p\right| = \left|\frac{-b}{a}\right|$. To je stejné řešení jako pro rovnici bez absolutního členu $0 = ax^2 + bx = x(ax + b)$, kde je taktéž $c = 0$ (opět až na znaménko).

Určení znaménka v jednotlivých případech

Při hlubším prozkoumaní výsledků první konstrukce zjistíme, že jeden kořen je vždy kladný a druhý záporný. Možno ověřit například v interaktivní konstrukci s dosazením řešení do rovnice [4] v GeoGebře, která však není důkazem. Nebo pomocí faktu, že součin kořenů je roven $\frac{c}{a}$. Jelikož součet kořenů je roven $\frac{-b}{a}$ dostáváme:

pro $p > 0$ je $|PN|$ kořen se záporným znaménkem a $|QN|$ s kladným znaménkem a

pro $p < 0$ je $|PN|$ kořen s kladným znaménkem a $|QN|$ se záporným znaménkem.



(a) Ryze kvadratická rovnice $ax^2 + c = 0$.

(b) Kvadratická rovnice bez absolutního členu $ax^2 + bx = 0$

Obr. 2: Grafické hledání kořenů ve speciálních případech kvadratické rovnice

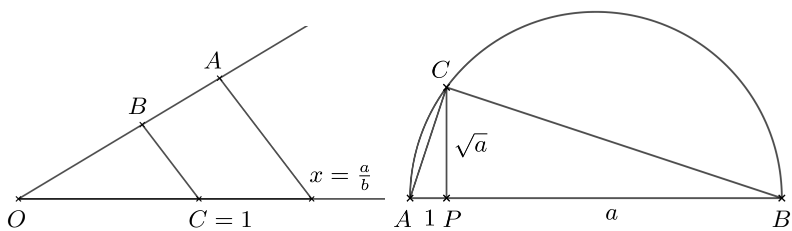
Z druhé konstrukce opět v interaktivní verzi [4], můžeme usoudit, že oba kořeny jsou kladné, nebo oba záporné. Tudíž

pro $p > 0$ jsou $|PN|$, $|QN|$ kořeny s kladným znaménkem,

pro $p < 0$ jsou $|PN|$, $|QN|$ kořeny se záporným znaménkem.

Konstrukce pro úplnost

Při hledání řešení kvadratické rovnice graficky byly použity matematické operace. Samozřejmě je možné je spočítat numericky, ale pro úplnost není na škodu zde uvést, jak hledat dané řešení ryze graficky bez použití jediného výpočtu [3, s. 54–55].



(a) Konstrukce podílu dvou čísel

(b) Konstrukce odmocniny z čísla

Obr. 3: Konstrukce místo výpočtu

Prvně je potřeba uvést konstrukci podílu dvou čísel $\frac{a}{b}$ (obr. 3a). Daná konstrukce vychází z podobnosti trojúhelníků. Neznámou délku označme x. Pak chceme, aby $x = \frac{a}{b}$, což dále upravíme na tvar

$$\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$$

(neboli $x : 1 = a : b$). Zvolme tedy libovolný úhel s vrcholem O. Na jednom rameni sestrojme úsečky délky $a = |OA|$ a $b = |OB|$. Na druhém rameni vyznačíme délku úsečky $1 = |OC|$. Pak vedeme bodem A rovnoběžku s přímkou spojující BC a určíme její průsečík s druhým ramenem. Vzdálenost od průsečíku k bodu O je námi hledaná vzdálenost.

Dále je potřeba umět zkonstruovat odmocninu čísla a (obr. 3b). Tuto konstrukci můžeme řešit pomocí Euklidovy věty o výšce. Sestrojme úsečku AB délky $a + 1$, na které vyznačme mezi body AB bod P ve vzdálenosti 1 od bodu A. Nad AB sestrojme kruhový oblouk. Dále vztyčme kolmici z bodu P k úsečce AB a průsečík této kolmice s kruhovým obloukem označíme C. Vzdálenost $|CP|$ je rovna hledané vzdálenosti $\sqrt{a}$.

Závěr

V tomto článku jsme ukázali, jak je možné najít řešení kvadratické rovnice pouze pomocí kružítka a pravítka. Dále jsme ukázali konstrukci pro speciální tvary kvadratických rovnic a rozebrali jsme případy, kdy řešení pomocí pravítka a kružítka nelze nalézt. Tato metoda hledání kořenů kvadratické rovnice nemá ambici nahradit standardní řešení, navíc je náchylná na přesnost rýsování. Jejím cílem je rozšířit čtenářovy obzory a propojit různé partie matematiky.

Tento výstup vznikl v rámci projektu SVV č. 260580

Literatura

[1] Descartes, R., (překlad: Fiala, J.): *La Géométrie*. Oikoymenh, Praha, 2010.

[2] Charvát, J., Boček, L., Zhouf, J.: *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*. Prometheus, Praha, 1999.

[3] Pomykalová, E.,Horák, K.,Kalcovský, A.: *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. Jednota českých matematiků a fyziků, Praha, 1999.

[4] `https://www.geogebra.org/m/ny9hwpdb`.