Řešení úlohy MO krajského kola kategorie B

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 2, 51–53

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151078

M. Marešovi máme OSMO, odevzdávací systém matematické olympiády. Ten bude v dalších letech sloužit nikoli primárně k odevzdávání (doufáme, že soutěže budou prezenční a nebude třeba odevzdávat elektronicky), ale k archivaci, tvorbě výsledkových listin a jejich zveřejňování a také ke zveřejňování opravených soutěžních protokolů, aby soutěžící měli možnost do nich nahlédnout (především v krajských kolech, kde v minulosti tato zpětná vazba chyběla). V době pandemie jsme pořádali online přednášky zaměřené na řešení úloh a doufám, že se nám podaří je nabízet (vedle prezenčních seminářů) i nadále a umožnit tak účast na přednáškách širšímu okruhu zájemců.

Na závěr tohoto textu bych chtěl poděkovat všem kolegům, kteří s organizací MO pomáhají a také partnerům MO, bez jejichž finanční podpory bychom se neobešli – skupině ČEZ, nadaci RSJ, společnostem Second Foundation a.s. a G-research a samozřejmě MŠMT. V neposlední řadě také Matematickému Ústavu Akademie věd a Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

A teď už je čas pustit se do řešení úloh 72. ročníku MO, které najdete na webu MO `www.matematickaolympiada.cz`. Kromě své kategorie se nebojte zkusit i kategorii A, i pokud jste třeba teprve v prvním ročníku (kvintě), i v tomto věku lze získat medaili na IMO, nebo aspoň postoupit na Česko-polsko-slovenské střetnutí juniorů. Hru z třetí úlohy kategorie A si navíc můžete vyzkoušet online na odkazu `http://skmo.sk/72a3`. Tak s chutí do toho!

Řešení úlohy MO krajského kola kategorie B

Úloha 3: Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2\dots A_n$. Pro která $n \geq 5$ platí, že obraz bodu A_3 v osové souměrnosti podle přímky A_1A_2 leží na přímce A_4A_5? (*Josef Tkadlec*)

Autorské řešení: Označme S střed pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ a P průsečík polopřímek A_1A_2 a A_5A_4. Bod P bude existovat pro každé $n > 6$, zbylé případy $n = 5$ a $n = 6$ rozebereme na konci řešení. Nyní tedy předpokládejme, že $n > 6$. Ze souměrnosti podle přímky SA_3 je zřejmé, že bod P leží na polopřímce SA_3. V zadání úlohy vystupující obraz bodu A_3 v osové souměrnosti podle přímky A_1A_2 označme A_3'. Dále označme ještě $\alpha = |\sphericalangle A_1SA_2| = |\sphericalangle A_2SA_3| = 360°/n$. V rovnoramenném trojúhelníku SA_1A_2 máme $|\sphericalangle SA_2A_1| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, takže pro jeho vnější úhel platí $|\sphericalangle SA_2P| = 180° - |\sphericalangle SA_2A_1| = 90° + \frac{1}{2}\alpha$, a tudíž z trojúhelníku SA_2P vychází

$$|\sphericalangle A_3PA_2| = |\sphericalangle SPA_2| = 180° - \alpha - \left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right) = 90° - \frac{3}{2}\alpha.$$

Díky souměrné sdruženosti bodů A_2, A_4 podle přímky $SA_3 = SP$ platí rovněž

$$|\sphericalangle SPA_4| = 90° - \frac{3}{2}\alpha.$$

Podobně díky souměrné sdruženosti bodů A_3, A_3' podle přímky A_1A_2 platí také

$$|\sphericalangle A_2PA_3'| = 90° - \frac{3}{2}\alpha.$$

Dohromady to znamená, že (ne nutně konvexní) úhel $A_3'PA_4$ s vnitřním bodem S má velikost

$$3 \cdot \left(90° - \frac{3}{2}\alpha\right) = 270° - \frac{9}{2}\alpha.$$

Naším úkolem je najít všechna $n > 6$, kdy posledně určená velikost je 180° (právě tehdy totiž bod A_3' leží na přímce A_4A_5). Rovnost

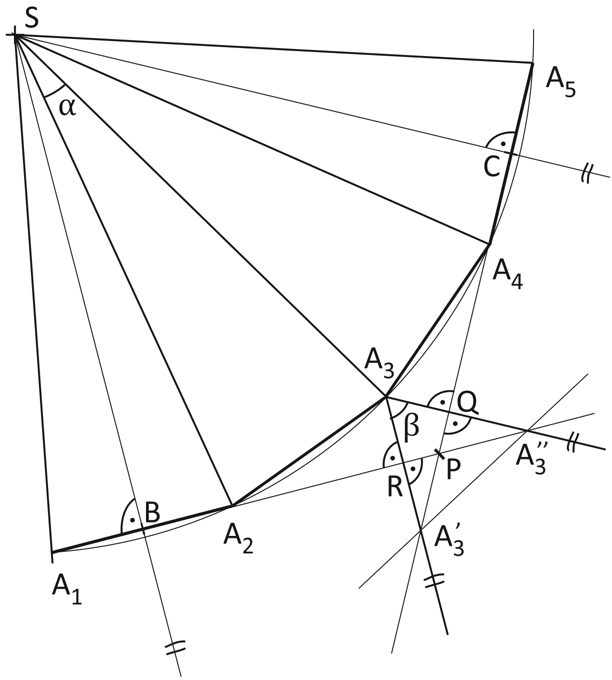
$$270° - \frac{9}{2}\alpha = 180°$$

ovšem nastane, právě když bude $\alpha = 20°$. Jelikož jak víme $\alpha = 360°/n$, je $n = 18$ jediným řešením úlohy v oboru všech čísel $n > 6$.

Zbývá rozebrat případy $n = 6$ a $n = 5$. Při $n = 6$ jsou přímky A_1A_2 a A_4A_5 rovnoběžné a přímka A_4A_5 leží celá v polorovině opačné k polorovině SA_3A_3', a proto bod A_3' neleží na přímce A_4A_5. Při $n = 5$ leží bod A_3' a celá přímka A_4A_5 v opačných polorovinách s hraniční přímkou A_1A_3 (která je totiž rovnoběžná s přímkou A_4A_5), takže ani tehdy bod A_3' na přímce A_4A_5 neleží.

Závěr: Jediné řešení úlohy je $n = 18$.

Řešení Kláry Vondráčkové z G Voděradská: Když obraz A_3' bodu A_3 v osové souměrnosti podle přímky A_1A_2 leží na přímce A_4A_5, musí jeho obraz A_3'' v osové souměrnosti podle přímky A_4A_5 ležet na přímce A_1A_2. Platí $|A_3A_3'| = |A_3A_3''|$. Pro $n > 6$ máme $\triangle\ A_3A_3'A_3''$ (pro $n = 5$ a $n = 6$ ošetření zvlášť jako v autorském řešení). Úsečky QA_3' a RA_3'' jsou výšky trojúhelníku, viz obr. 1. Jelikož obě končí ve středech stran, jedná se o rovnostranný trojúhelník. Všechny vnitřní úhly jsou 60°, tj. $\beta = 60°$.



Obr. 1: Náčrt situace

Jelikož

$$|\sphericalangle A_nSA_{n+1}| = \frac{360°}{n} = \alpha,$$

máme $|\sphericalangle BSC| = 3\alpha$. Jistě platí $\beta = |\sphericalangle BSC|$. Tudíž $60° = 3\alpha$, tj. $\alpha = 20°$. Odtud $360°/n = 20°$, proto $n = 18$.

Závěr: Jediné řešení je $n = 18$.