Obdélníková kouzla

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 2, 23–28

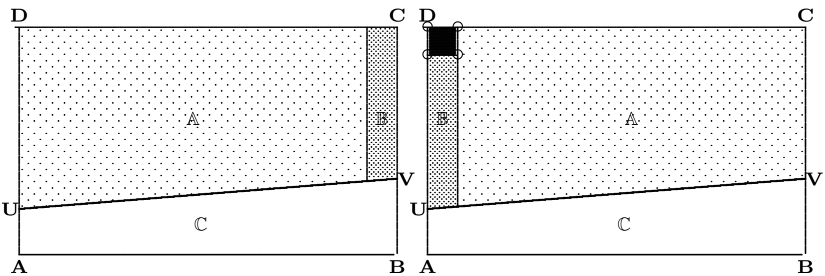
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151073

Obdélníková kouzla

Matematické oříšky

Naše nová rubrika si klade za cíl srozumitelně vysvětlovat matematické oříšky, hlavolamy, hádanky, rébusy či paradoxy, které vám vrtají hlavou. Budou se o ni starat Vlastimil Dlab a Ľubomíra Dvořáková. Tak jako si Popelka přála, aby jí čeledín Vincek přivezl z města to, co mu cvrnkne cestou do nosu (a byly to ony veledůležité tři oříšky), my si přejeme dostávat od čtenářů matematické oříšky, které budeme moci rozlousknout, rozumějte vysvětlit. Na oplátku i my vždy na konci článku uvedeme otázku, nad kterou můžete dumat do příště a případně nám poslat své vysvětlení. Pokud bude v pořádku, s radostí je otiskneme.

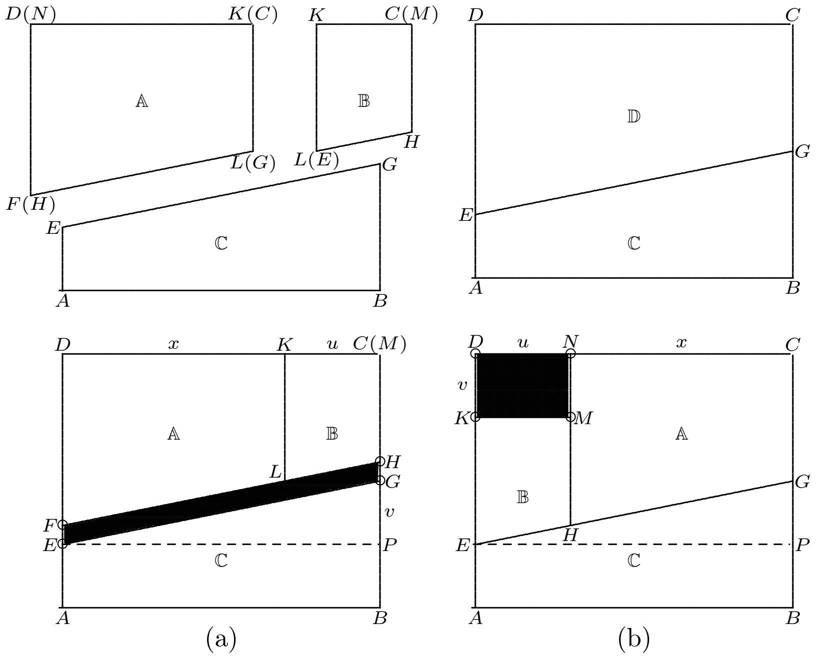
Patrně jste se už na internetu nebo v některé z populárních knížek setkali s geometrickými obrazci, které se vymykaly logickému uvažování. Paní učitelka Jana Mazáčová z Litoměřic nás upozornila na obrázky, které jsou zde překresleny z knížky [1]. Obrázky upoutaly pozornost jejích žáků a žaček.



Obr. 1: Ilustrace prvního paradoxu

Jakmile se na takové a podobné „paradoxy“ podíváme blíže, zpozorujeme, že jsou založeny na zcela jednoduchém faktu. Náš zrak má určité potíže rozlišovat geometrické objekty, v tomto případě úsečky, které jsou ve velmi těsné blízkosti. Prostě: Dvě rovnoběžné úsečky jsou tak blízko k sobě, že je naše oko vnímá jako jednu úsečku.

Věnujme pozornost prvnímu „kouzlu“ a pomocí obr. 2 odhalme jeho záhadu. Na tomto obrázku se jedná o dvojí uložení lichoběžníků $\mathbb{A} = FLKD$ a $\mathbb{B} = LHCK$ do lichoběžníku $\mathbb{D} = EGCD$. Součet obsahů lichoběžníků $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ je menší než obsah lichoběžníku $\mathbb{D}$. Lichoběžníky $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ nemohou tedy pokrýt celý lichoběžník $\mathbb{D}$. Při uložení, které je na obrázku označeno (a), zůstává nepokryt rovnoběžník $EGHF$, zatímco při uložení označeném (b) zůstává nepokryt obdélník $KMND$. „Kouzlo“ nastává, pokud se nám podaří zvolit rozměry lichoběžníků $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ a $\mathbb{D}$ tak, že rovnoběžník $EGHF$ budeme vnímat jako úsečku, tj. $|EG|$ bude velké a výška rovnoběžníku velmi malá. Taková situace je znázorněna na obr. 1.



Obr. 2: Princip prvního paradoxu

Vidíme, že role lichoběžníku $\mathbb{C}$ je nepodstatná. V krajním případě může degenerovat na trojúhelník EPG. Může být také zvolen tak, aby obdélník $ABCD$ byl čtvercem (tak, jak je tomu v [1]).

Přistupme nyní k numerickému popisu situace v obdélníku $ABCD$ na obr. 2(a). Označme h výšku rovnoběžníku $EGHF$ (jinými slovy jde o šířku černého pásu). Dále označme $|DK| = x, |KC| = u, |PG| = v$.

Tudíž podle Pythagorovy věty je $|EG| = \sqrt{(x+u)^2 + v^2}$. Snadno nahlédneme, že strany obdélníku $KMND$ z obr. 2(b) splňují $|KM| = u$, $|KD| = v$. Proto obsah obdélníku $KMND$ je $u \cdot v$ a obsah rovnoběžníku $EGHF$ je $h \cdot \sqrt{(x+u)^2 + v^2}$. Z rovnosti obsahů dostáváme vztah výšky h k parametrům u, v, x:

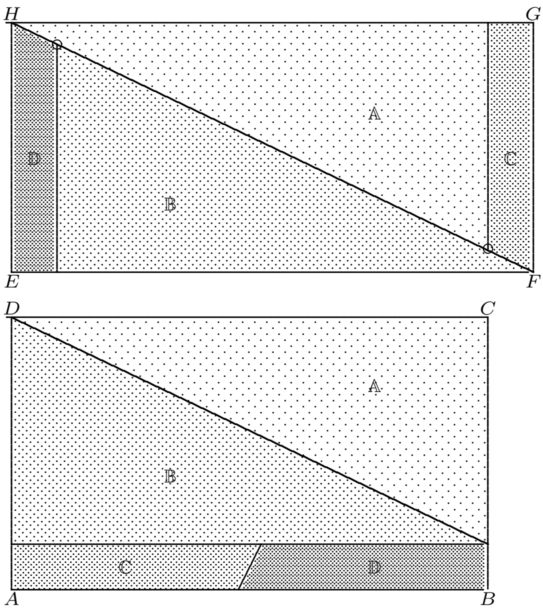
$$h = \frac{u \cdot v}{\sqrt{(x+u)^2 + v^2}}.$$

„Kouzlo“ závisí pouze na hodnotách u, v, x! Nezávisí vůbec na $|DF|$ a $|AE|$. Na obr. 1 je $u = v$ a $x = 11{,}5 \cdot u$, a tedy šířka černého pásu je

$$h = \frac{u}{\sqrt{157{,}25}} \doteq \frac{u}{12{,}54}.$$

Není tedy divu, že se jeví jako úsečka.

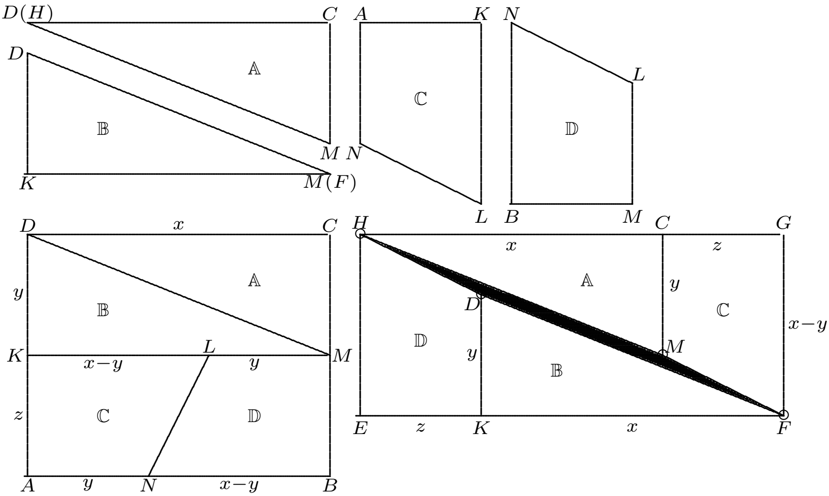
Obsah prvního obdélníku je $23 \times 11 = 253$



Obsah druhého obdélníku je $21 \times 12 = 252$

Obr. 3: Ilustrace druhého paradoxu

Nyní obraťme pozornost ke druhému „kouzlu" z knížky [1]. Je znázorněno na obr. 3. Úkolem je zdánlivě pokrýt dvěma shodnými trojúhelníky a dvěma shodnými lichoběžníky dva obdélníky, $ABCD$ a $EFGH$, které mají různý obsah. Cílem je zvolit a popsat situaci, kdy náš zrak nerozliší dvě paralelní úsečky a vnímá rovnoběžník $DFMH$ jako úsečku FH. Na tuto situaci poukazuje obr. 4. Poznamenejme, že ilustrace paradoxu na obr. 3 využívá jednoduchosti prezentace. Rozměry obdélníků jsou celočíselné a rozdíl obsahů obdélníků je 1.



Obr. 4: Princip druhého paradoxu

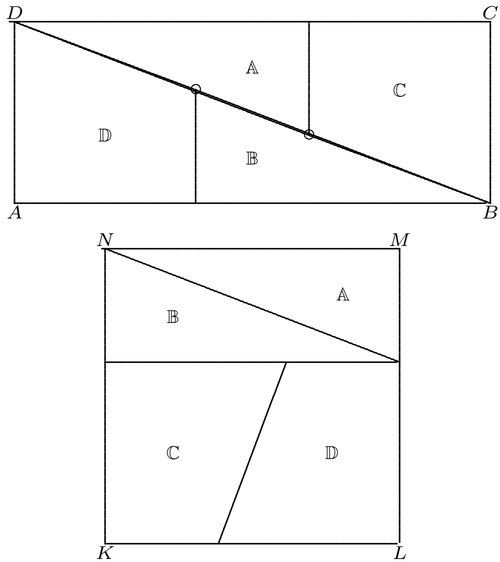
Vraťme se k obr. 4 a popišme geometrickou situaci numericky. Rozměry geometrických obrazců jsou zvoleny takto: Strany trojúhelníků $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ označme $|DC| = |HC| = |KM| = |KF| = x$ a $|CM| = |DK| = y$, přičemž $2y < x$. Jedna ze stran lichoběžníků $\mathbb{C}$ a $\mathbb{D}$ splňuje $|AN| = |LM| = y$ a protější strana $|KL| = |NB| = |HE| = |GF| = x - y$. Pro stranu $|KA| = |MB| = |CG| = |EK|$ zvolme označení z.

Požadavek, aby tmavě označený rovnoběžník $DFMH$ degeneroval na úsečku FH (tj. aby body D, F, M a H ležely v přímce), znamená rovnost obsahu obdélníků $ABCD$ a $EFGH$: $x(y+z) = (x+z)(x-y)$. Označme z^* řešení takové rovnice, tj. $z^* = \frac{x(x-2y)}{y}$. Pro $z < z^*$ bude mít rovnoběžník $DFMH$ nenulový obsah: $S(DFMH) = S(EFGH) - S(ABCD) = (x+z)(x-y) - x(y+z) = x(x-2y) - zy$. Délka strany rovnoběžníku podle Pythagorovy věty splňuje $|MH| = |DF| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Výška h rovnoběžníku $DFMH$ je rovna podílu jeho obsahu a délky strany:

$$h = \frac{x(x - 2y) - zy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Výška musí být malá, aby se rovnoběžník podobal úsečce. Na obr. 3 jsme zvolili poměry $x : y : z = 21 : 10 : 2$. Např. pro volbu $x = 21$, $y = 10$, $z = 2$ je $S(DFMH) = 1$ a výška rovnoběžníku $DFMH$ je $h = \frac{1}{\sqrt{21^2+10^2}} \doteq 0{,}043$, a je tedy nesnadno pozorovatelná.

Obsah prvního obdélníku je $21 \times 8 = 168$

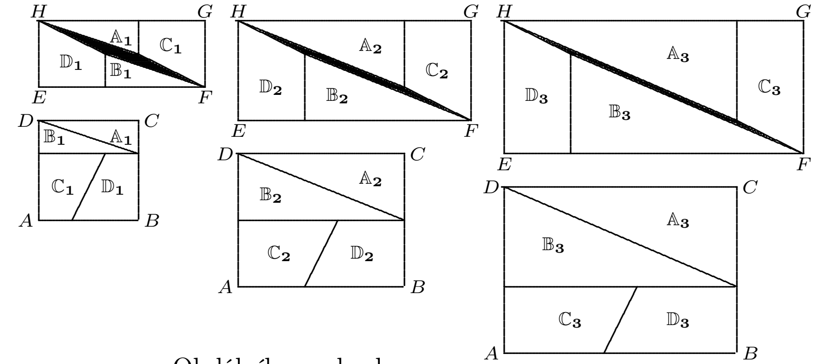


Obsah čtverce je $13 \times 13 = 169$

Obr. 5: Ilustrace paradoxu překrytí

Pro zvídavé čtenáře doporučujeme nahlédnout podobným způsobem, jakým jsme popsali případ $0 < z < z^*$, na případy $z^* < z < x$, $z = x$ a $z > x$. V těchto případech se jedná o překrývání daných trojúhelníků a lichoběžníků. Příkladem může posloužit následující obr 5. Zde je $x : y : z = 13 : 5 : 8$ a např. pro volbu $x = 13$, $y = 5$, $z = 8$ je výška překrývajícího rovnoběžníku, jehož obsah je 1, rovna $h = \frac{1}{\sqrt{13^2+5^2}} \doteq 0{,}072$. Tedy okem opět nepozorovatelná.

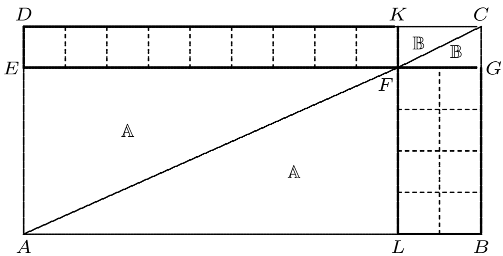
Obr. 6 popisuje posloupnost dvojic obdélníků, jejichž obsahy se liší o jednotku a které vedou pro velký index k k „paradoxům“. Zde je $x = 2k + 1$, $y = k$ a $z = 2$. Výška vyznačeného rovnoběžníku je tedy $\frac{1}{\sqrt{(2k+1)^2+k^2}}$.



Obdélníky o obsahu
$(2k + 3) \times (k + 1)$ a $(2k + 1) \times (k + 2)$
$k = 1, 2, 3, \ldots$

Obr. 6: Posloupnost konstrukcí

Článek zakončíme otázkou: *Umíte vysvětlit paradox na obr. 7?*



Obr. 7: Paradox k vysvětlení

Nápovědou může posloužit odkaz na [2]. Odpověď prosím posílejte na e-mailovou adresu redakce `rozhledy@jcmf.cz`.

L i t e r a t u r a

[1] Weltmanová, A.: *Tohle už vůbec není matika.* Computer Press, Brno, 2017.

[2] `https://www.geogebra.org/m/d3njpbcq`