ŠKOLNÍ MATEMATICKÉ ÚLOHY STARÉ 1200 LET (2)

KAREL MAČÁK

4. Úlohy vedoucí na soustavu diofantovských rovnic[1]

Úlohy, kterými se nyní budeme zabývat, procházejí dějinami matematiky od staré Číny až k Leonardu Eulerovi a při výuce matematiky se uplatňují dodnes. V dnešním pokračování se budeme věnovat pouze úlohám Alkuinovým, příště se podíváme na tyto úlohy v širším historickém kontextu.

4.1 Zadání

5. ÚLOHA O KUPCI SE STO DENÁRY[2]

Nějaký kupec řekl: Chci za sto denárů nakoupit 100 prasat, přičemž kanec stojí deset denárů, prasnice pět denárů a dvě selata jeden denár. Ať řekne, kdo rozumí, kolik je třeba koupit kanců, kolik prasnic a kolik selat, aby žádné z těchto dvou čísel nebylo ani překročeno, ani zmenšeno.

32. ÚLOHA O OTCI RODINY ROZDĚLUJÍCÍM OBILÍ

Nějaký otec rodiny měl dvacet členů rodiny a nařídil dát jim dvacet měřic obilí[3]*: nařídil, že muži dostanou tři měřice a ženy dvě a každé dítě půl měřice. Řekni, kdo můžeš, kolik musí být mužů, kolik žen a kolik dětí.*

---

[1]Termín „diofantovská rovnice“ je zaveden v [8] a proto ho zde respektujeme, i když bychom se spíše klonili k termínu „diofantické rovnice“ (viz např. [9]).

[2]Podle M. Folkertse byl 1 zlatý = 12 denárů.

[3]Termín „otec rodiny“ (v originálu: *paterfamilias*) je třeba chápat volněji, spíš jako hlava rodu (viz další úlohy). Pokud se termínu „měřice“ (v originálu *modius*) týče, různé prameny uvádějí různé hodnoty této míry; podle M. Folkertse se jednalo asi o 12 litrů.

33, 34. DALŠÍ ÚLOHY

Zadání těchto úloh je stejné jako v předešlé úloze, ale v úloze č. 33 má rodina 30 členů a rozděluje se 30 měřic obilí, v úloze č. 34 má rodina 100 členů a rozděluje se 100 měřic obilí.

38. ÚLOHA O KUPCI KUPUJÍCÍM STO ZVÍŘAT

Nějaký muž chtěl koupit sto zvířat za sto zlatých, přičemž kůň se kupuje za tři zlaté, kráva za jeden zlatý a 24 ovcí za jeden zlatý. Řekni, kdo jsi s to, kolik bylo koní, kolik krav a kolik ovcí.

39. ÚLOHA O KUPCI V ORIENTU

Nějaký muž chtěl za sto zlatých koupit v orientu sto zvířat. Nařídil svému sluhovi, ať je velbloud koupen za pět zlatých, osel za jeden zlatý a dvacet ovcí za jeden zlatý. Řekni, kdo chceš, kolik bylo za sto zlatých koupeno velbloudů, kolik oslů a kolik ovcí.

47. ÚLOHA O BISKUPOVI, KTERÝ ROZKÁZAL ROZDĚLIT KLERIKŮM DVANÁCT CHLEBŮ

Nějaký biskup rozkázal rozdělit klerikům dvanáct chlebů. Nařídil, aby každý kněz dostal dva chleby, každý jáhen polovinu chleba a každý lektor čtvrtinu chleba[4]*; přitom počet kleriků byl stejný jako počet chlebů. Řekni, kdo jsi s to, kolik muselo být kněží, kolik jáhnů a kolik lektorů.*

4.2 Komentář

Z matematického hlediska je jasné, že všechny uvedené úlohy vedou na soustavu dvou diofantovských rovnic o třech neznámých, která musí být řešena v oboru celých nezáporných čísel. Z výsledků uváděných Alkuinem se však zdá, že Alkuin hledal řešení pouze v oboru celých kladných čísel a za tohoto předpokladu mají všechny uvedené úlohy kromě úlohy č. 34 právě jedno řešení, což

[4]V originálu jsou klerikové označeni termíny *presbyter, diaconus* a *lector*; tyto termíny jsou zde přeloženy v souladu s knihou [10] (str. 166). Občas používané označení „klerik“ pro studenty teologie není v souladu s oficiální terminologií; z hlediska dnešního církevního práva se křesťan stává klerikem až přijetím jáhenského svěcení, takže lektor je dnes ještě laikem ([10], str. 103).

je zajímavé, protože obecně (pochopitelně) může existovat řešení více nebo taky žádné[5].

Z rozhovorů s učiteli získal autor tohoto příspěvku dojem, že úlohy uvedeného typu se ve školské matematice objevují i dnes; při jejich řešení se (asi většinou) využívá toho, že takovou soustavu lze snadno převést na jednu diofantovskou rovnici o dvou neznámých a dál se (asi většinou) pokračuje ve větší či menší míře „experimentálně"; přitom se tiše předpokládá, že úloha má aspoň jedno řešení. Na Alkuinově úloze č. 34 ukážeme jednu možnost takového experimentálního postupu, který (za jistých předpokladů) umožní snadno najít všechna řešení.

Věnujme se tedy úloze č. 34. Označme m = počet mužů, z = počet žen, d = počet dětí. Úlohu pak lze zapsat jako soustavu rovnic

$$m + z + d = 100\,,$$

$$3m + 2z + \frac{d}{2} = 100\,.$$

Vynásobíme-li druhou rovnici dvěma a od takto upravené rovnice odečteme první, dostaneme rovnici $5m + 3z = 100$, kterou lze upravit na tvar $m = 20 - \frac{3}{5}z$. Z této rovnice plyne:

a) Protože počet mužů m musí být celé číslo, musí být počet žen z dělitelný pěti.

b) Protože počet mužů i žen musí být nezáporný, stačí dosazovat do poslední rovnice postupně $z = 0, 5, \ldots, 30$ a dostaneme odpovídající počty mužů m; zbytek do celkového počtu 100 členů rodiny pak tvoří děti. Všechna řešení dané úlohy tedy lze uspořádat do tabulky

$$\begin{array}{ccccccccc} z & = & 0, & 5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30; \\ m & = & 20, & 17, & 14, & 11, & 8, & 5, & 2; \\ d & = & 80, & 78, & 76, & 74, & 72, & 70, & 68; \end{array}$$

Alkuin uvádí pouze řešení $m = 11$, $z = 15$, $d = 74$.

[5] Z didaktického hlediska je zajímavé, že v Alkuinově sbírce je vědomě zařazena jedna úloha, která nemá řešení; nevede ale na soustavu diofantovských rovnic a proto ji uvedeme až později.

Uvedený postup je jednoduchý, ale má jednu vadu: není univerzální. Jestliže původní soustavu dvou diofantovských rovnic o třech neznámých upravíme na diofantovskou rovnici se dvěma neznámými x a y

$$ax + by = c\,, \tag{1}$$

pak postup použitý v předešlém příkladu je efektivní pouze tehdy, je-li c dělitelné aspoň jedním z koeficientů a, b; není-li tato podmínka splněna, nevede uvedený postup k cíli. To lze ukázat na Alkuinově úloze č. 5; označíme-li k = počet kanců, p = počet prasnic a s = počet selat, pak analogickým postupem jako v předešlé úloze dostaneme rovnici

$$19k + 9p = 100, \tag{2}$$

kterou sice můžeme upravit na tvar

$$k = \frac{100}{19} - \frac{9}{19}p$$

nebo na tvar

$$p = \frac{100}{9} - \frac{19}{9}k\,,$$

ale to nám při řešení úlohy vůbec nepomůže. Chceme-li tuto Alkuinovu úlohu řešit elementárními prostředky, nezbývá nám nic jiného než hledat řešení rovnice (2) zkusmo; snadno se sice najde řešení $k = 1$, $p = 9 \Rightarrow s = 90$ (které uvádí i Alkuin), ale dokázat, že je to v množině celých nezáporných čísel řešení jediné, by bylo pracné.

Uveďme na závěr tohoto paragrafu ještě Alkuinovy výsledky zbývajících úloh. U úlohy č. 32 uvádí Alkuin řešení: 1 muž, 5 žen a 14 dětí; možné by ještě bylo řešení 4 muži, žádná žena a 16 dětí, ale – jak už bylo řečeno – Alkuin asi řešení obsahující nulu neuvažoval. U úlohy č. 33 uvádí Alkuin řešení: 3 muži, 5 žen a 22 dětí (možných je též 6 mužů a 24 dětí, ale bez žen). V úloze č. 38 si kupec podle Alkuina koupil 23 koní, 29 krav a 48 ovcí (evidentní řešení úlohy spočívající v zakoupení 100 krav a ničeho jiného zřejmě neodpovídalo Alkuinovým přestavám), v úloze č. 39 si kupec koupil 19 velbloudů, jednoho osla a 80 ovcí (evidentní řešení se 100 osly a ničím jiným nebylo zřejmě uvažováno). Řešením úlohy č. 47 je podle Alkuina 5 kněží, 1 jáhen a 6 lektorů; řešení se 4 kněžími, 8 jáhny a žádným lektorem nebylo asi uvažováno.

4.3 Dvě věty

Jak praví básník, trocha teorie nikoho nezabije, a tak se pokusíme ukázat přijatelný teoretický postup, který by umožnil doplnit experimentální přístup k řešení úloh uvedeného typu odpověďmi na dvě otázky, které se objevily v předešlém paragrafu:

1) Jak poznáme, že rovnice (1) vůbec má celočíselné řešení ?

2) Jestliže rovnice (1) má celočíselné řešení a my jsme jedno takové řešení experimentálně nalezli, lze nějak jednoduše vyjádřit všechna ostatní celočíselná řešení ?

Odpověď na tyto otázky lze najít např. v již zmíněné knize [9] na str. 200 a násl., ale tam je celý problém formulován poměrně obecně a při jeho řešení se vychází z pojmu kongruence, který ve školské matematice není běžný. Jednodušší pohled na uvedené otázky lze najít v knížce [11], kde se vychází z pojmu dělitelnosti; tento pojem se ve školské matematice objevuje poměrně brzo a lze s ním tedy pracovat. Z této knížky ocitujeme dvě věty (v poněkud pozměněné formulaci, abychom nemuseli zavádět další symboly), které odpovídají na obě naše otázky.

Označme písmenem D největšího společného dělitele čísel a, b.

Věta 1 ([11], str. 31, věta 9). *Rovnice (1) má celočíselné řešení tehdy a jen tehdy, je- li číslo* c *dělitelné číslem* D. ∎

Věta 2 ([11], str. 35, věta 10). *Má-li rovnice (1) celočíselné řešení x_0, y_0, pak množina všech celočíselných řešení rovnice (1) je určena vztahy*

$$x = x_0 + \frac{b}{D}t\,,$$
$$y = y_0 - \frac{a}{D}t\,,$$

kde t *probíhá množinu celých čísel.* ∎

Domníváme se, že uvedené dvě věty jsou přijatelné jako teoretický doplněk k experimentálnímu řešení úloh uvedeného typu a nebudeme tuto otázku dále rozvádět; poznamenejme jenom na závěr, že v knížce [11] je uveden i algoritmus k nalezení počátečního řešení x_0, y_0 vycházející ze známého Eukleidova algoritmu k nalezení největšího společného dělitele dvou čísel.

5. Úloha nemající řešení

Nebudeme se zde zabývat otázkou, zda je vhodné zadávat žákům bez předchozího varování úlohy, které nemají řešení; rozhodně to není příliš obvyklé. Lze proto považovat za překvapivé, že v Alkuinově sbírce se jedna taková úloha objevuje; je to následující úloha č. 43.

43. ÚLOHA O VEPŘÍCH

Nějaký člověk měl 300 vepřů (nebo 30 vepřů) a nařídil je porazit ve třech dnech tak, aby každý den byl poražen lichý počet vepřů. Má říci, kdo může, jak lze porazit takovým způsobem 300 nebo 30 vepřů ve třech dnech.

Úloha nemá řešení[6] a Alkuin to věděl; podle jeho názoru má úloha sloužit jen ke kárání chlapců[7].

LITERATURA (POKRAČOVÁNÍ):

[8] *Slovník školské matematiky* (1981), SPN, Praha.

[9] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J., *Metody řešení matematických úloh*, PřF MU Brno, 1996.

[10] Tretera, J. R, *Církevní právo*, Nakl. J. Krigl, Praha, 1993.

[11] Znám, Š, *Teória čísel*, 1. vyd, Alfa, Bratislava, 1977.

[12] Eukleidés, *Základy*, Přeložil F. Servít, JČMF, Praha, 1907.

Pokračování příště.

[6] [12], str. 150 (IX/23) *Když se několik lichých čísel sečte a počet jejich jest lichý, též celek bude lichý.*

[7] *Haec fabula est tantum ad pueros increpandos.*