

# Učitel matematiky

---

Karel Mačák

Školní matematické úlohy staré 1200 let (1)

*Učitel matematiky*, Vol. 8 (2000), No. 1, 21–26

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150918>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2000

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ŠKOLNÍ MATEMATICKÉ ÚLOHY STARÉ 1200 LET (1)

KAREL MAČÁK

### 1. Úvod

Snad každý učitel matematiky se setkal s úlohou o převozníkovi, který má přepravit přes řeku vlka, kozu a hlávku zelí. Z toho plyne, že snad každý učitel matematiky přišel do styku (aniž to tušil) se středověkou sbírkou úloh, jejíž název bychom mohli přeložit jako *Úlohy k bystření mladíků*<sup>4</sup>. Tato sbírka vznikla pravděpodobně na dvoře Karla Velikého, který panoval ve francké říši v letech 768 – 814; za autora sbírky je považován anglosaský mnich Alkuin z Yorku (735? – 804) a některé úlohy z této sbírky jsou živé dodnes.

Tento článek vznikl na základě přednášky, kterou autor přednesl na známém semináři v Jevíčku v srpnu 1999. Jeho cílem je seznámit širší okruh učitelů matematiky s některými úlohami z uvedené sbírky<sup>5</sup>, případně s podobnými úlohami z jiných historických sbírek; obecné historické souvislosti jsou zcela ponechány stranou<sup>6</sup>.

Východiskem článku je kritické vydání Alkuinovy sbírky [1]. Podle tohoto vydání obsahuje Alkuinova sbírka 53 úloh, z nichž některé se objevují v různých rukopisech v různých variantách. U všech úloh (s jedinou výjimkou) uvádí Alkuin i postup řešení, jsou to však většinou pouhé návody k mechanickému počítání bez jakéhokoli náznaku hlubšího rozboru úlohy; v tomto článku bude u každé úlohy Alkuinův výsledek uveden, ale jeho návod nebude překládán.

<sup>4</sup>Původní název zní *Propositiones ad acuendos iuvenes*.

<sup>5</sup>Překlad celé sbírky snad vyjde ve sborníku ze zmíněného semináře; německý překlad vyšel v [3] a práce [4] představuje pravděpodobně anglický překlad Alkuinovy sbírky, ale je to bez záruky (neviděl jsem ji).

<sup>6</sup>Zájemci o hlubší studium této problematiky se mohou obrátit k pracím německého badatele prof. Menso Folkertse [1, 2, 3]; k všeobecnému seznámení s problematikou středověkého školství a vzdělanosti lze doporučit např. knihu [5].

Úlohy v Alkuinově sbírce nejsou nijak tématicky uspořádány. V tomto článku vybereme několik tématických okruhů, uvedeme překlady textů Alkuinových úloh vztahujících se k danému tématu (přičemž ponecháme původní číslování úloh podle [1]) a tyto úlohy stručně okomentujeme. Prvním tématickým okruhem budou „převoznické“ úlohy, které jsou považovány za Alkuinův „vynález“ (širší kulturně-historické souvislosti lze najít v práci [6]).

## 2. Převoznické úlohy

### 2.1 Zadání

#### 17. ÚLOHA O TŘECH BRATRECH, Z NICHŽ KAŽDÝ MĚL SESTRU<sup>7</sup>

*Byli tři bratři, z nichž každý měl sestru a měli se přepravit přes řeku. Každý z nich pociťoval touhu po sestře svých přátel<sup>8</sup>. Když přišli k řece, našli jen malou lodku, v níž se nemohli přepravit více než dva z nich současně. Řekni, kdo můžeš, jak se přepravili přes řeku, aniž by jediná z nich byla poskvrněna.*

#### 18. ÚLOHA O VLKU A KOZE A HLÁVCE ZELÍ

*Nějaký muž měl převézt přes řeku vlka a kozu a hlávku zelí a nemohl najít jinou lodku než takovou, která byla schopna uvést jen dva z nich. Bylo mu však nařízeno, že má všechny převézt úplně nepoškozené. Řekni, kdo můžeš, jak je mohl nepoškozené převézt.*

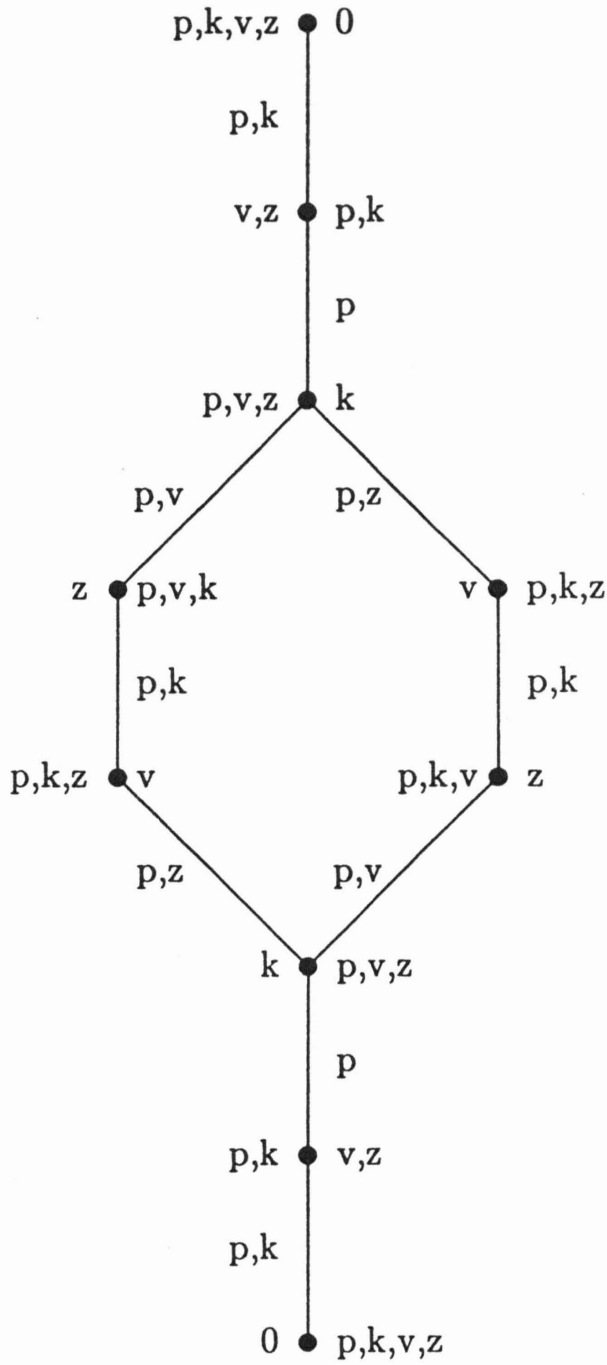
#### 19. ÚLOHA O MUŽI A ŽENĚ VÁŽÍCÍCH CENTNĚŘ<sup>9</sup>

*Muž a žena, z nichž každý vážil jeden centněř, mající dvě děti, které dohromady váží také jeden centněř, se měli přepravit přes řeku. Nalezli lodku, která nemůže unést více než jeden centněř. Necht' uskuteční přepravu, kdo může, aniž by se loďka potopila.*

<sup>7</sup>M. Folkerts upozorňuje na to, že zadání není zcela jasné. Původní název úlohy je *Propositio de tribus fratribus singulis habentibus sorores*.

<sup>8</sup>Původní text: *Erat enim unicuique concupiscentia in sorore proximi sui*.

<sup>9</sup>Původní název je *Propositio de viro et muliere ponderantibus plaustrum*. Název váhové jednotky byl přeložen volně; 1 centněř = 61,65 kg. M. Folkerts překládá (s jistými výhradami) název váhové jednotky německým termínem *Fuder*, ale neuvádí hodnotu této míry v dnešních jednotkách.



Obr. 1 Graf k Alkuinově úloze č. 18

## 20. ÚLOHA O JEŽCÍCH

*Ježek a ježčice mající dvě děti a vážící libru se chtějí přepravit přes řeku<sup>10</sup>.*

### 2.2 Komentář

Protože Alkuinova úloha č. 18 je všeobecně známá, použijeme jí k zahájení komentáře.

Zdá se, že všeobecně je při řešení této úlohy považováno za vhodné znázornit postup převážení pomocí grafu, do kterého jsou nějak zapsány situace vznikající na březích (kromě již zmíněného článku [6] viz např. knížku [7], str. 27). Jedno z mnoha možných takových znázornění úlohy č. 18 je na obr. 1. K uzlům grafu jsou připsány situace na levém a pravém břehu, k hranám je připsáno obsazení loďky. Alkuin uvádí pouze řešení odpovídající levé větvi v našem grafu.<sup>11</sup>

K úlohám č. 19 a č. 20 poznamenejme, že dítě (ježčí mládě) může samo veslovat přes řeku. U úlohy č. 19 uvádí Alkuin následující řešení: nejprve se přepraví obě děti a jedno z nich se vrátí s loďkou zpět. Pak se přepraví matka a druhé dítě se vrátí s loďkou zpět. Potom se opět přepraví obě děti a jedno z nich se vrátí s loďkou zpět, načež se přepraví otec a druhé dítě se vrátí s loďkou zpět; celá akce se uzavře závěrečnou přepravou obou dětí.

Zde vzniká jistá nejasnost (z dnešního hlediska) týkající se počtu řešení úlohy. Označíme-li jedno dítě jako A a druhé jako B, je otázkou, máme-li považovat řešení, při kterém se nejprve vrací dítě A a pak dítě B, za řešení odlišné od toho, při kterém se děti vracejí v opačném pořadí (totéž se týká pořadí přepravy

<sup>10</sup>Zadání je až příliš stručné, ale z Alkuinova řešení je zřejmé, že se jedná pouze o slovní variantu předešlé úlohy: ježek a ježčice váží po jedné libře (= 513,75 g), obě ježčata dohromady váží také jednu libru a loďka uveze nejvýše jednu libru.

<sup>11</sup>Autor tohoto příspěvku souhlasí s názorem, že graf je vhodným nástrojem ke znázornění výsledku řešení, má však jisté pochybnosti o tom, že graf je vhodným nástrojem k hledání řešení. Současně se však musí přiznat, že vlastně neví, jak by měl vypadat vhodný návod (postup, metoda, algoritmus), který by bylo možné doporučit studentům k řešení takovýchto úloh.

muž - žena). Pokud všechny takové možnosti považujeme za různá řešení, má úloha 8 řešení.

Na závěr okomentujme úlohu č. 17. Úloha není zcela jasně formulována a náš komentář vychází z následujícího Alkuinova řešení: nejprve se přepravím já se svoji sestrou a já se s loďkou vrátím. Pak se přepraví obě zbývající sestry a moje sestra se s loďkou vrátí. Potom se přepraví oba zbývající bratři a jeden z nich se vrátí zpět i se svou sestrou, tuto sestru nechá na břehu a přepraví se spolu se mnou. Zbylá sestra převezde loďku zpět, naloží moji sestru a přiveze ji za mnou, načež bratr, jehož sestra zůstala sama na počátečním břehu, přejede zpět a přiveze svou sestru.

Na základě tohoto řešení se lze domnívat, že úloha je míněna takto:

Jsou tři sourozenecké dvojice (bratr, sestra), které označíme  $(B_1, S_1)$ ,  $(B_2, S_2)$ ,  $(B_3, S_3)$ ; mezi těmito dvojicemi nejsou žádné příbuzenské vztahy. Pro všechna  $i, j = 1, 2, 3$  platí, že muž  $B_i$  touží po dívkách  $S_j$ ,  $i \neq j$ . Čest dívky  $S_j$  je poskvrněna, ocitnuli se ve společnosti muže  $B_i$ ,  $i \neq j$  a není u toho její bratr  $B_j$ . Vznikla-li by tedy na některém břehu např. sestava  $B_1, S_1, S_2$ , bude čest dívky  $S_2$  poskvrněna, neboť byla ve společnosti cizího muže a její bratr u toho nebyl; přítomnost další dívky  $S_1$  na tomto faktu nic nemění.

Probrání všech možných variant řešení přenecháváme případným zájemcům jako domácí cvičení.

### 3. Další známá úloha

Takřka bez komentáře uvedeme další velice známou úlohu, která má v Alkuinově sbírce číslo 26; považujeme za vhodné při této příležitosti upozornit na to, že všechny číselné údaje v Alkuinově sbírce jsou (pochopitelně) zadávány v římské číselné soustavě a v této soustavě také bylo třeba počítat.

ÚLOHA O POLI, BĚŽÍCÍM PSU A PRCHAJÍCÍM ZAJÍCI

*Je pole, které má délku 150 stop<sup>12</sup>. Na jednom konci stál pes, na druhém zajíc. Pak začal pes běžet za zajícem. Avšak zatímco*

<sup>12</sup>1 římská stopa = 29,6 cm.

*pes jedním skokem urazil 9 stop, zajíc překonal 7 stop. Řekni, kdo můžeš, kolik stop a skoků udělali pronásledující pes nebo prchající zajíc, než je chycen.*

Při řešení se předpokládá, že frekvence skoků obou „běžců“ je stejná. Alkuin uvádí, že pes urazil celkem 675 stop a zajíc 525 stop.

#### LITERATURA:

- [1] Folkerts, M., *Die älteste mathematische Aufgabesammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen PROPOSITIONES AD ACUENDOS IUVENES. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition*, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Denkschriften, 116. Band, 6. Abhandlung. Wien, 1978.
- [2] Folkerts, M., *Die Alkuin zugeschriebenen "Propositiones ad acuendos iuvenes"*, In: *Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times*. Ed. P. L. Butzer and D. Lohrmann, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, str. 273 – 282.
- [3] Gericke, H., Folkerts, M., *Die Alkuin zugeschriebenen "Propositiones ad acuendos iuvenes" (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jugend): Lateinischer Text und deutsche Übersetzung*, In: *Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times*. Ed. P. L. Butzer and D. Lohrmann, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, str. 283 – 362.
- [4] Hadley, J., Singmaster, D., *Problems to sharpen the young*, *Mathematical Gazette* **76** (1992), 102 – 126.
- [5] Spunar, P. a kol., *Kultura středověku*, 2. vyd., Academia, Praha, 1995.
- [6] Gropp, H., *Propositio de lupo et capra et fasciculo cauli – On the History of River-Crossing Problems*, In: *Charlemagne and his Heritage. 1200 Years of Civilisation and Science in Europe. Vol.2.: Mathematical Arts*. Ed. P. L. Butzer, H. T. Jongen, W. Oberschelp..
- [7] Sedláček, J., *Úvod do teorie grafů*, 3. vyd., Academia, Praha, 1981.

(Pokračování příště.)