

Učitel matematiky

Lenka Vojteková
Mapy flexagónov

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 4, 212–220

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150841>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2004

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



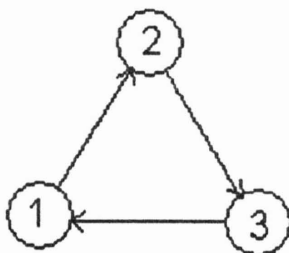
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MAPY FLEXAGÓNŮV

LENKA VOJTEKOVÁ

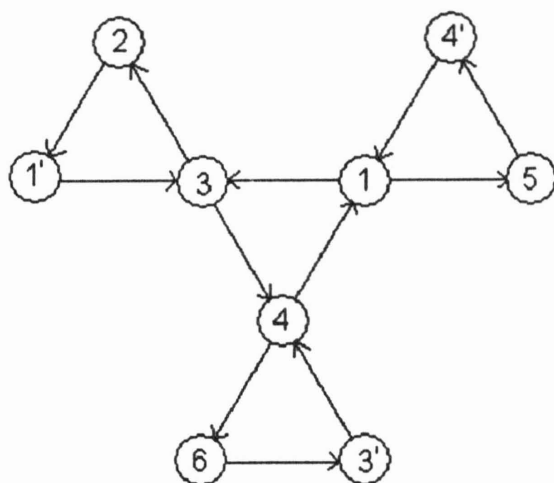
Odpovedať na otázku: „Čo je to mapa?“ by asi vedel každý. Laicky by sa dalo povedať, že je to nejaký obrázok, na ktorom je nakreslené určité územie, a podľa ktorého niektorí ľudia vedia nájsť cestu z jedného miesta tohto obrázka na iné (a podľa toho vedia, kadiaľ musíme ísť v skutočnosti, aby sme sa dostali tam, kam potrebujeme). Niečo podobné platí aj pre mapy flexagónov. Sú to tiež obrázky, ktoré znázorňujú „cesty“, ktorými sa môžeme od jednej „tváre“ flexagónu dostať k inej. V tomto článku sa budeme zaoberať mapami hexaflexagónov.

Ako sme už minule zistili, najjednoduchším hexaflexagónom je tri-hexaflexagón, a s ním aj teraz začneme. Pri jeho flexovaní veľmi rýchlo zistíme, že z „tváre“ 1 sa dá dostať len na „tvár“ 2 a odtiaľ len na „tvár“ 3 (resp. opačne, ak flexujete z druhej strany flexagónu). Teda jeho mapu môžeme jednoducho zakresliť (obr.1), pričom šípky znázorňujú, na ktorú „tvár“ sa dá z danej „tváre“ dostať.



Obr. 1: Mapa 3-hexaflexagónu

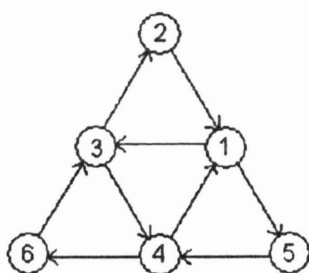
Ďalší sme vyrábali hexa-hexaflexagón, a tomu sa budeme venovať aj teraz. Jeho mapa už nebude taká jednoduchá, pretože



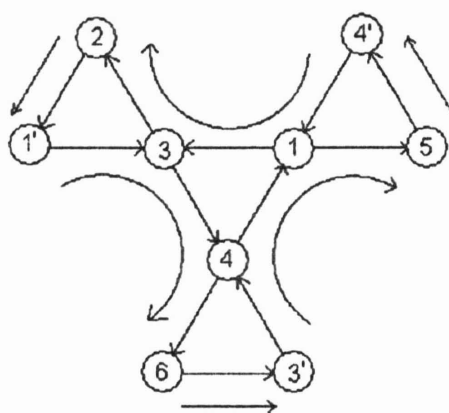
Obr. 2: Mapa I 6-hexaflexagónu

už má viac „tváří“, a pri flexovaní ste určite zistili, že z niektorých sa dá dostať na viac než len jednu „tvár“. Ak by sme chceli vyrobiť mapu 6-hexaflexagónu, ktorý má „tváre“ očíslované tak, ako v predchádzajúcom článku, zistíme nasledovné: „Tvár“ 1 sa dá „otvárať“ do dvoch strán. Raz dostaneme „tvár“ 3, druhý raz „tvár“ 5. U „tváre“ 3 narazíme opäť na tento jav. Tiež sa z nej dá dostať na dve „tváre“: 2 a 4, a podobne aj u „tváre“ 4 (dá sa dostať do „tváří“ 1 a 6). Mapu tohto flexagónu teda dostaneme tak, že budeme postupným flexovaním odhaľovať, z ktorej „tváre“ sa dá kam dostať. Zistíme, že z „tváre“ 2 sa síce dá dostať na „tvár“ 1, ale keď si ju pozrieme bližšie, zistíme, že je iná než tá, ktorá sa objavila po prvý raz. Jednotlivé trojuholníky, ktoré ju tvoria sú otočené o 120° buď v jednom, alebo druhom smere. Podobne je to aj u „tváre“ 3, resp. 4, na ktoré sa dostaneme z „tváre“ 6, resp. 5. Preto sú tieto otočené „tváre“ v mape na obr. 2 znázornené čiarkovane. Obrázok 3 znázorňuje mapu tohto flexagónu bez vyznačenia rotácie jednotlivých „tváří“. Ak by sme flexagón obrátili a flexovali, tak budú mať šípky na mape opačný smer.

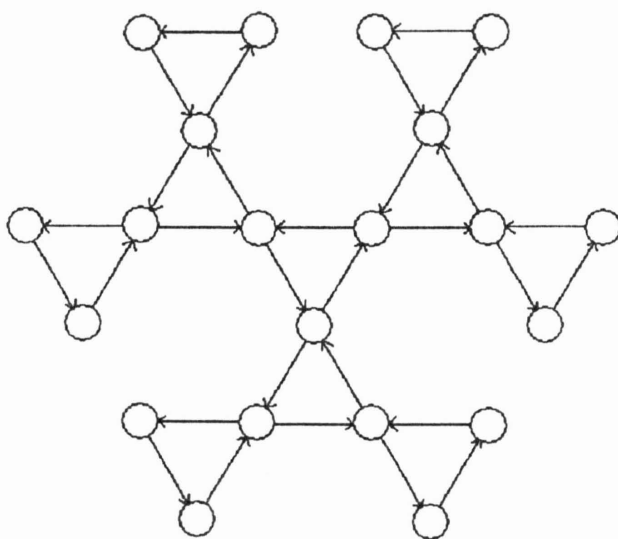
Nájsť mapu flexagónu môže byť problém, pretože sa niekedy stáva, že flexujeme, flexujeme a stále dokola sa nám objavujú tie isté „tváre“, a tie zvyšné nie a nie nájsť. Ako sa dostať z tohto



Obr. 3: Mapa II 6-hexaflexagónu



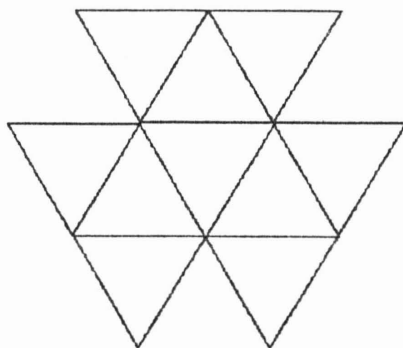
Obr. 4: „Tuckermanova púť“ u 6-hexaflexagónu



Obr. 5: Mapa I 12-hexaflexagónu

bludného kruhu? Podobnú otázku si pravdepodobne položil aj Bryant Tuckerman – jeden z členov Stoneovej „Flexagónovej komisie“, pretože objavil jednoduchý spôsob, ako prejsť pri flexovaní cez všetky „tváre“ flexagónu, a podľa neho je aj pomenovaný ako „Tuckermanova púť“ (z angl. Tuckerman Traverse). Spočíva v tom, že flexagón chytíme za jeden vrchol a flexujeme tak, že flexagón „otvárame“ pozdĺž tej polovičnej uhlopriečky, ktorá tým vrcholom prechádza a to dovtedy, kým sa to dá. Ak to už nejde, chytíme vedľajší vrchol a opäť flexujeme uvedeným spôsobom pokiaľ to ide, inak sa zase presunieme na vedľajší vrchol atď. Ako vyzerá „Tuckermanova púť“ u 6-hexaflexagónu, znázorňuje obr. 4.

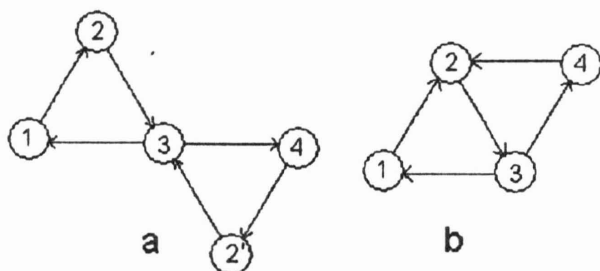
Ak si podrobnejšie všimneme tvar mapy hexa-hexaflexagónu, zistíme, že vznikla z mapy 3-hexaflexagónu pridaním jedného trojuholníka ku každému jej vrcholu, resp. ku každej jej strane, podľa toho, či do mapy zakresľujeme aj rotáciu „tváří“. Ak by sme z pásika papiera vyrobili 12-hexaflexagón (návod je v predchádzajúcom čísle Učiteľa matematiky) a nakreslili jeho mapu, mala by tvar, ktorý je znázornený na obr. 5 resp. 6. A takýmto pridávaním trojuholníkov ku každému vrcholu, resp. strane, predchádzajúcej mapy môžeme vytvoriť mapy flexagónov, ktoré sa dajú vyrobiť z pásika papiera s počtom „tváří“ 3×2^n , kde $n \in \mathbb{N}$.



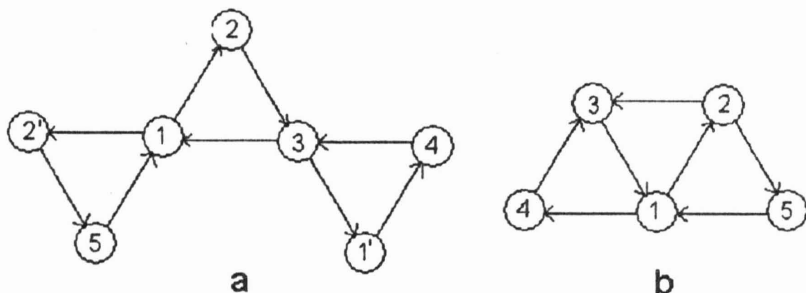
Obr. 6: Mapa II 12-hexaflexagónu

Dokonca by sme zistili, že aj mapy ďalších hexaflexagónov sa dajú odvodiť z mapy 3-hexaflexagónu. Na obr. 7 a 8 sú znázornené mapy 4- a 5-hexaflexagónu, ktoré vznikli pridaním jedného,

resp. dvoch trojuholníkov k vrcholom (obr. 7a, 8a), resp. k stranám (obr. 7b, 8b). Pre každú z týchto máp je daný tvar jedinou možnosťou (ostatné umiestnenia sú osovo súmerné alebo otočené). Ak by sme skúmali počet možných máp u 6-hexaflexagónu, zistili by sme, že sú tri možnosti (bez rotácií a osových súmerností). Jedna je na obrázku 2 resp. 3, zvyšné dve sú na obrázkoch 9 a 10 (Matrice na výrobu týchto 6-hexaflexagónov, ako aj vyššie spomenutých 4- a 5-hexaflexagónov znázorňujú obrázky 13 a 14 na konci článku). Len pre zaujímavosť, existujú 4 rôzne typy 7-hexaflexagónov, 12 typov 8-hexaflexagónov, 9-hexaflexagónov je 27, 10-hexaflexagónov je 82, ... U 7-hexaflexagónu dokonca existuje matrica, ktorá sa dá zložiť dvoma rôznymi spôsobmi a výsledkom sú dva flexagóny s rôznymi mapami.

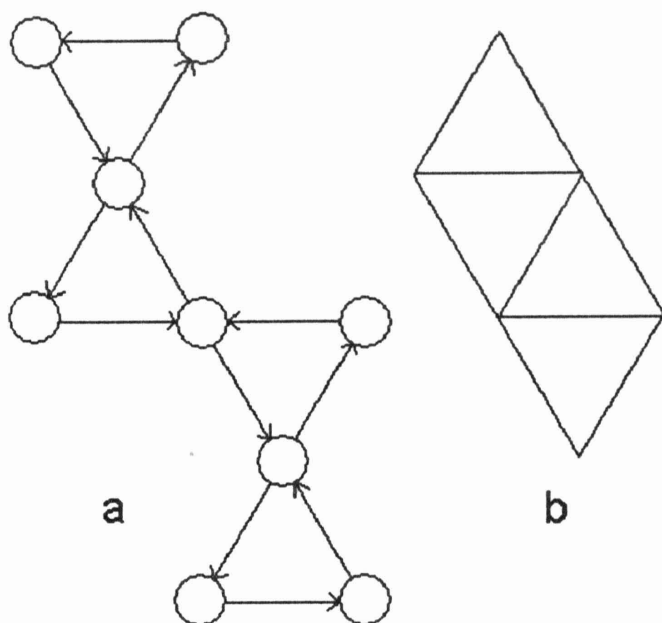


Obr. 7: Mapy 4-hexaflexagónu

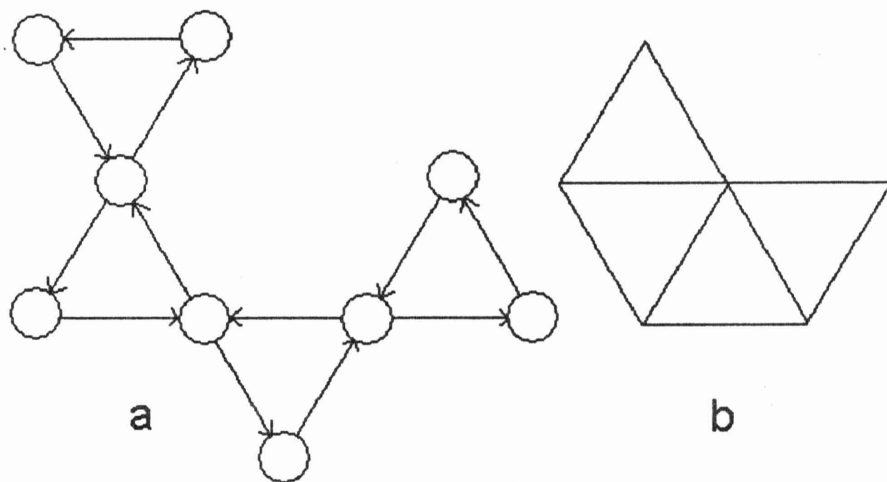


Obr. 8: Mapy 5-hexaflexagónu

A ako využiť flexagóny? Určite nájdete aj sami celý rad možností. Uvediem len zopár z nich. Napríklad už pri zostrojovaní flexagónov si deti precvičia svoje rysovacie schopnosti, a majú pritom oveľa silnejšiu motiváciu to robiť, pretože im potom zostane hračka/hlavolam. Môžeme na jednotlivé tváre flexagónu napísať



Obr. 9: Mapy 6-hexaflexagónu II

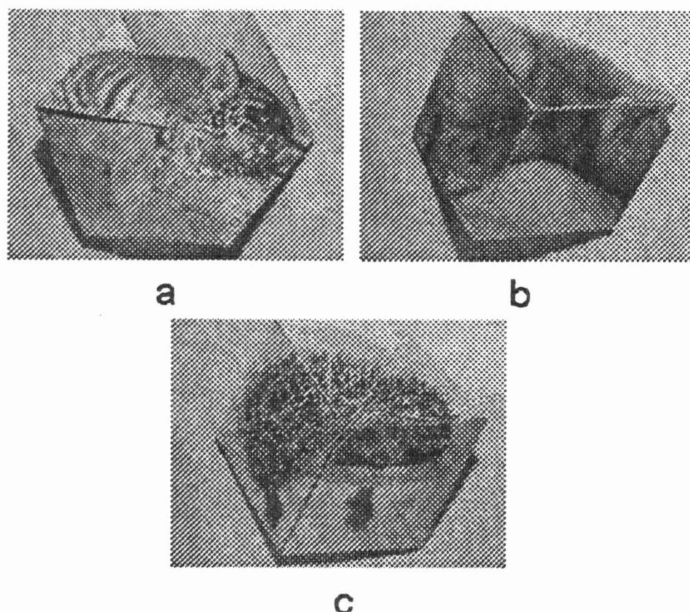


Obr. 10: Mapy 6-hexaflexagónu III

nejaký text (úlohu) a deťom dať mapu toho flexagónu, aby zistili, čo majú urobiť. Na internete som dokonca našla stránku [5] s programom, ktorý z ľubovoľných troch Vami dodaných fotiek vyrobí maticu tri-hexaflexagónu (obr. 11), ktorú už stačí vystrihnúť, poskladať a zlepiť. Vzniknutý flexagón (obr. 12) môže byť pekným darčekom.



Obr. 11: Maticu 3-hexaflexagónu vytvorená z fotiek



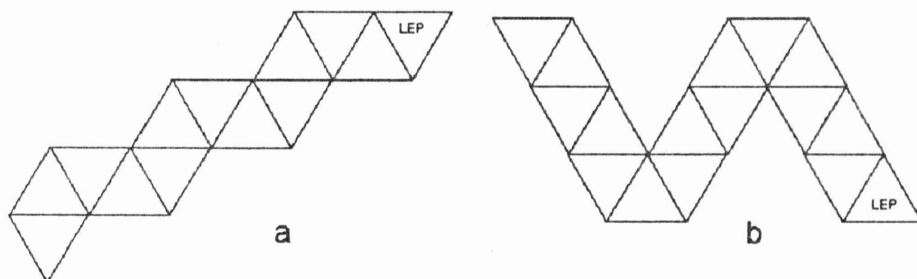
Obr. 12: 3-hexaflexagón z fotiek

A čo ešte povedať na koniec? Nevie, či si spomínate na môj prvý článok o flexagónoch, zakončený listom, ktorý prišiel do redakcie Scientific American ako reakcia na článok Martina Gard-

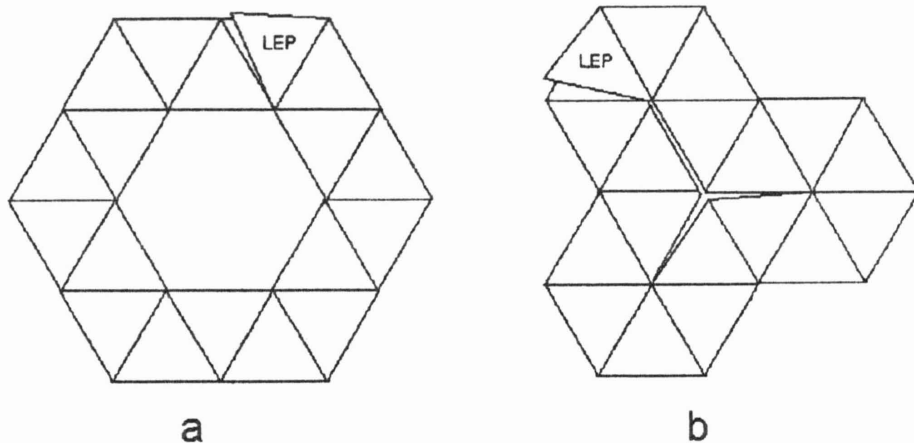
nera. Na konci tohto rozprávania by som chcela uviesť časť listu, ktorý prišiel do redakcie o niekoľko mesiacov neskôr a reagoval na už spomínaný list. Autorom je Robert M. Hill (The Royal Institute of Science and Technology, Glasgow, Scotland). Tu je jeho odpoveď:

Vážená redakcia,

list uverejnený vo Vašom marcovom vydaní o zmiznutí spolužiaka Vášho čitateľa, ktorý ten list posielal, nám pomohol objasniť jednu záhadu. Raz, keď sme si s kamarátmi len tak z nudy flexovali náš posledný hexa-hexaflexagón, začal sa zrazu z neho vynárať nejaký pásik z farebnej látky. Po ďalšom flexovaní flexagón vyvrhol nejakého prežívajúceho cudzinca. Nanešťastie bol zoslabnutý a tváril sa, že stratil pamäť. Vôbec nám nebol schopný vysvetliť, odkiaľ sa tu nabral. Jeho zdravie sa zlepšilo po našej národnej diéte: ovsená kaša, „haggis“ (škótska špecialita z baraniny) a whisky. Na našom oddelení sme si ho celkom obľúbili, dokonca reaguje na meno Eccles. Máme však problém. Mali by sme ho vrátiť? Ak áno, akou metódou? Nanešťastie Eccles sa bojí, čo i len pozrieť na flexagón a o flexovaní nechce ani počuť.



Obr. 13: Matrica 4- a 5-hexaflexagónu



Obr. 14: Matrice 6-hexaflexagónov II a III

Literatúra

- [1] Gardner M., Flexagons, *Scientific American*, December, 195(1956)
- [2] Gardner M., *Mathematical puzzles and diversions*, ruský preklad, Mir, Moskva, 1971
- [3] Gardner M., *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*, *W.H. Freeman and Company* New York, 1983
- [4] *Flexagons*, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/flexagon/flexagon.html>
- [5] *Flexagóny z fotiek*, <http://usuarios.lycos.es/zobook/>
- [6] *Listy redakcii*, <http://www.f.kth.se/~f96-lla/math.html>

Mgr. Lenka Vojteková
 doktorandka MFF UK
 Sokolovská 83
 186 00 Praha 8
 e-mail: gazova@karlin.mff.cuni.cz