Milada Kočandrlová
O elipse

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 2, 74–79

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150820

O ELIPSE

Milada Kočandrlová

Elipsa je velice často nahrazována kružnicovými oblouky. Ať už to jsou oblouky čtyř oskulačních kružnic v jejích vrcholech, nebo oblouky jiných kružnic především u klenebních oblouků. V mnohých případech se využívá přímo eliptického oblouku pro jeho dvě odlišné vlastnosti od oblouku kružnicového. Především to je růst (či pokles) poloměru křivosti od vedlejšího (či hlavního) vrcholu. Dále potom vlastnosti průměrů elipsy. Existuje právě jeden největší a právě jeden nejmenší průměr elipsy. Ke každému průměru existuje průměr s ním sdružený, tj. tečny v koncových bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s průměrem druhým.

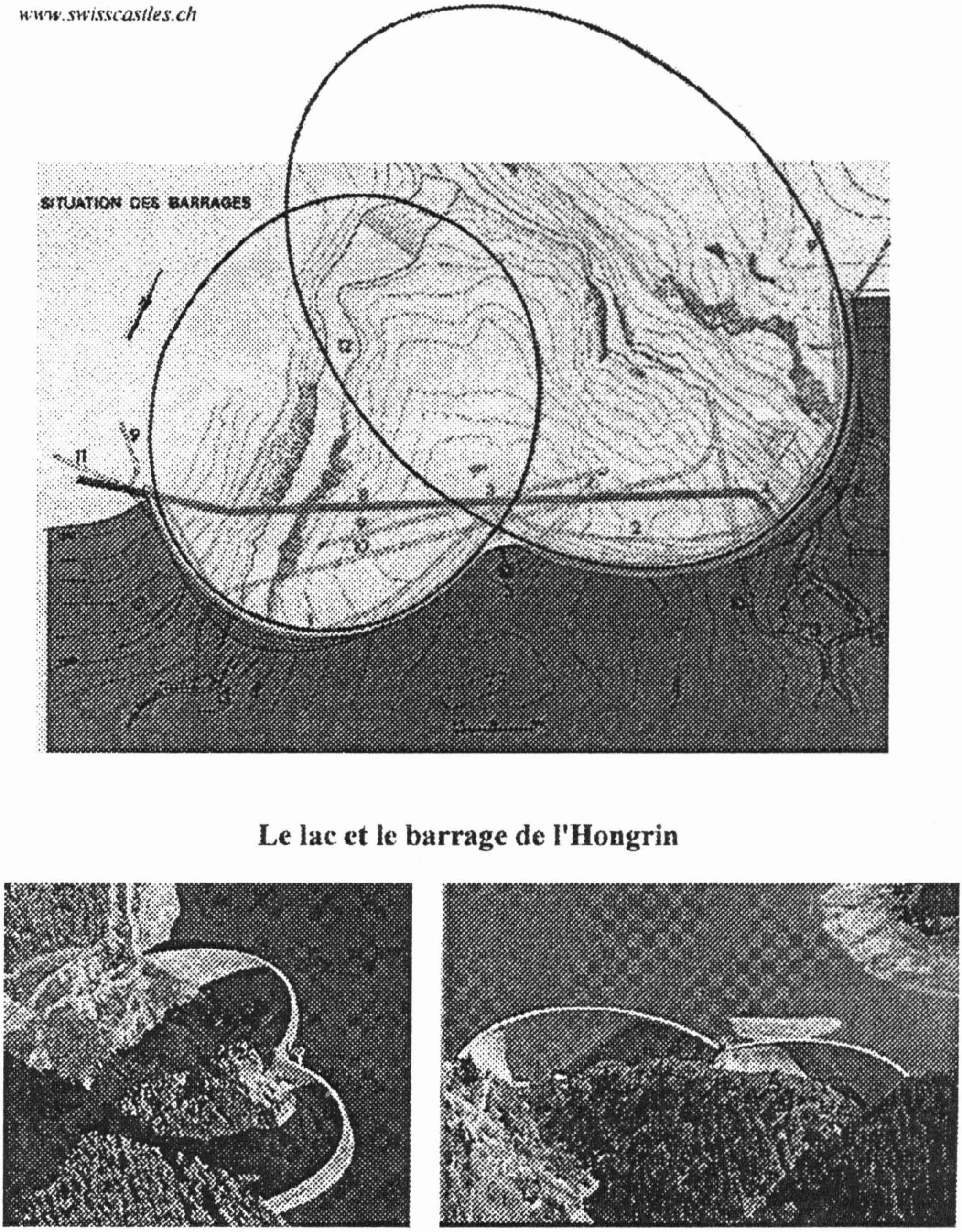
1. Eliptické prstence klenbových přehrad

Pro první vlastnost byl eliptický oblouk použit na prstence klenbových přehrad. Právě nesouměrnost údolí Hongrin ve Švýcarsku si vyžádala toto netypické řešení klenbové přehrady. Jednotlivé vodorovné prstence klenby jsou složeny vždy ze dvou oblouků elips, obr.1. S ohledem na požadavek plynulého klesání křivosti prstence od jeho vrcholu k patce byly použity právě oblouky s hlavním vrcholem elipsy. Tvar jednotlivých prstenců byl formován třemi parametry: $c(v)$, $a(v)$, $b(v)$, kde v je z-ová souřadnice roviny prstence, viz následující implicitní rovnice elips

$$\frac{[x-(c(v)+a(v))]^2}{a(v)^2}+\frac{y^2}{b(v)^2}=1.$$

K určování souřadnic jednotlivých bodů a výpočtu poloměru křivosti se využívá explicitního vyjádření

$$x=c(v)+a(v)-\frac{a(v)}{b(v)}\sqrt{b(v)^2-y^2}.$$



Obr. 1

2. Centrální elipsa

Hledejme takové body, ve kterých by byla soustředěna veškerá hmotnost obrazce (s jednotkovou hustotou) a které by měly moment setrvačnosti k ose stejný jako celý obrazec.

Pro moment setrvačnosti obrazce Ω o obsahu $\mathcal{S}$ k ose x a y s poloměry setrvačnosti b a a platí

$$J_x = \int_{\mathcal{S}} y^2 \, d\mathcal{S} = b^2\mathcal{S}\,, \quad J_y = \int_{\mathcal{S}} x^2 \, d\mathcal{S} = a^2\mathcal{S}\,.$$

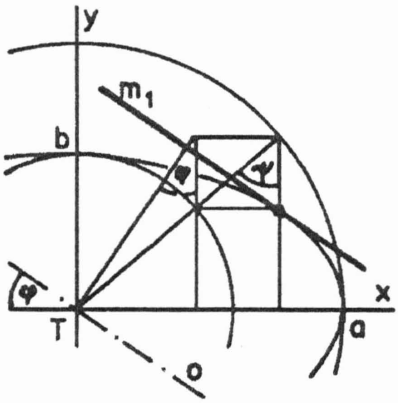
Tyto rovnice určují dvě dvojice přímek rovnoběžných s osami x, y

$$x = \pm\sqrt{\frac{J_y}{\mathcal{S}}} = \pm a\,, \quad y = \pm\sqrt{\frac{J_x}{\mathcal{S}}} = \pm b\,.$$

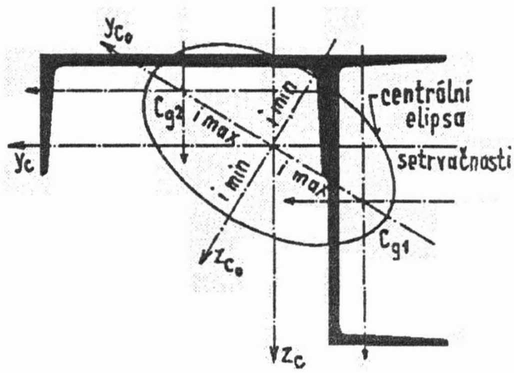
Předpokládejme, že obrazec Ω je osově souměrný a počátek kartézské soustavy souřadnic je v jeho těžišti T, osa y v ose souměrnosti, viz [3].

Moment setrvačnosti k libovolné ose $o \in T$, která má rovnici $x \sin\varphi + y\cos\varphi = 0$, je $J = \int_{\mathcal{S}} q^2 \, d\mathcal{S}$, kde q je vzdálenost elementu $d\mathcal{S} = [x, y]$ od osy o. Po dosazení za $q = |x\sin\varphi + y\cos\varphi|$, dostáváme

$$J = \sin^2\varphi \cdot J_y + 2\sin\varphi\cos\varphi \int_{\mathcal{S}} xy \, d\mathcal{S} + \cos^2\varphi \cdot J_x.$$



Obr. 2a



Obr. 2b

Vzhledem k symetrii obrazce je $\int_{\mathcal{S}} xy \, d\mathcal{S} = 0$. Označíme-li r poloměr setrvačnosti k ose o, tj. vzdálenost hledaných bodů od osy o, potom

$$a^2\mathcal{S}\sin^2\varphi + b^2\mathcal{S}\cos^2\varphi = r^2\mathcal{S}.$$

Odtud $r^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$, a tedy existují dvě přímky m_1, m_2 o rovnici

$$x \sin \varphi + y \cos \varphi = \pm\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, \qquad (1)$$

které jsou rovnoběžné s osou o. V nich hmota soustředěná má stejný moment setrvačnosti k ose o jako celý obrazec.

Vektor $\mathbf{n} = (\sin \varphi, \cos \varphi)$ je vektor kolmý na přímku (1). Z trojúhelníčkové konstrukce elipsy je zřejmý vztah

$$\frac{b}{a} \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi.$$

Po dosazení a úpravě převedeme rovnici (1) na tvar

$$xb \sin \psi + ya \cos \psi = \pm ab.$$

Vynásobíme-li rovnici číslem ab

$$(a \sin \psi) b^2 x + (b \cos \psi) a^2 y = \pm a^2 b^2,$$

vidíme, že je to rovnice tečen v bodě $[a \sin \psi, b \cos \psi]$ centrální elipsy, tj. elipsy dané parametrickými rovnicemi $x = a \sin \psi$, $y = b \cos \psi$, obr.2b.

Centrální elipsa má ve statice stejný význam jako následující elipsa chyb ve vyrovnání měřických chyb, určuje směry největšího a nejmenšího zatížení konstrukcí, viz [1] a obr. 2b.

3. Elipsa chyb

Střílíme-li sérii střel za přibližně stejných podmínek na stejný cíl ze stejného stanoviště, dráhy střel, ani jejich dopad přesto nejsou stejné – jsou rozptýlené.

Každému zásahu P_i odpovídá chyba $\epsilon_i = |OP_i|$, která má velikost a směr, viz [2]. Pravděpodobnost, že chyba padne do elementu $dx\, dy$ je součinem pravděpodobností chyb obou souřadnic zásahu

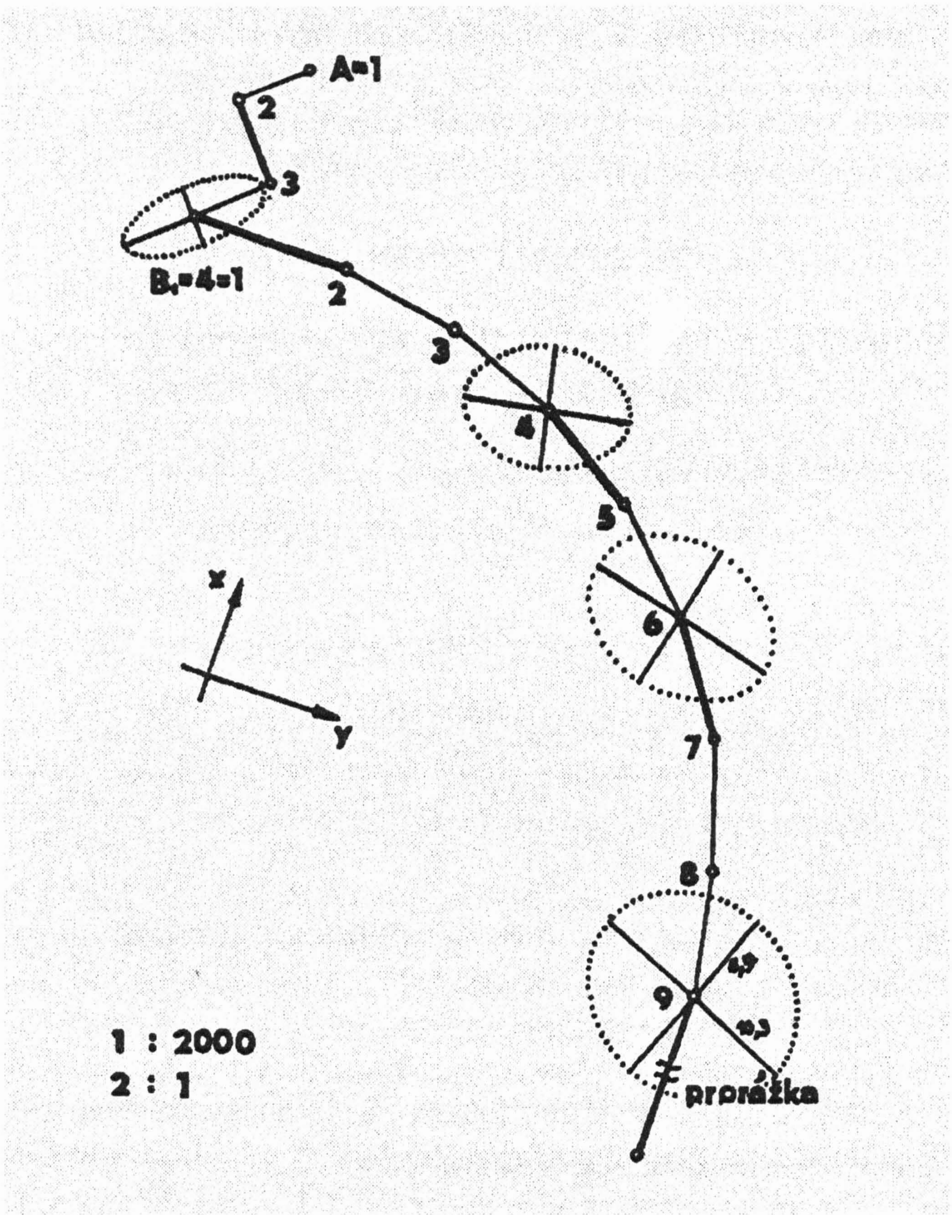
$$P = \varphi(x, y)\, dx\, dy = \varphi(x) \varphi(y)\, dx\, dy,$$

kde $\varphi(u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}$ je Gaussovo normální rozložení, $h = \frac{1}{\sqrt{2}\overline{m}}$ je parametr přesnosti, $\overline{m}$ je střední kvadratická odchylka. Pak

$$P = \frac{h_x h_y}{\pi} e^{-(h_x^2 x^2 + h_y^2 y^2)}\, dx\, dy.$$

Body stejné hustoty pravděpodobnosti leží na elipsách chyb

$$\frac{x^2}{\overline{m}_x^2} + \frac{y^2}{\overline{m}_y^2} = t^2.$$



Obr. 3

Největší hustota pravděpodobnosti je na **střední elipse chyb**, tj. pro $t = 1$, ohraničuje 39,2% chyb.

Na obr. 3 je plán přesnosti úseku podzemní sítě Metra C, kde jsou očekávané hodnoty polohové přesnosti vybraných bodů vyjádřeny středními elipsami chyb. Plán je v měřítku 1:2000 a elipsy chyb jsou v měřítku 2:1.

Literatura

[1] Bažant, Z., Klokner, F., *Statika stavebních konstrukcí*, SNTL, Praha, 1953.

[2] Böhm, J., Hampacher, M., Radouch, V., *Teorie chyb a vyrovnávací počet*, Geodetický a kartografický podnik, Praha, 1990.

[3] Čubr, E., Poloměr setrvačnosti a centrální elipsa, *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, (3) 1874, 108–113.

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT,
Thákurova 7
166 29 Praha 6
e-mail: Milada.Kocandrlova@fsv.cvut.cz