Učitel matematiky

Jaroslav Hora

Jeden nebo tři reálné kořeny?

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 2, 94–99

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150764`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2005

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

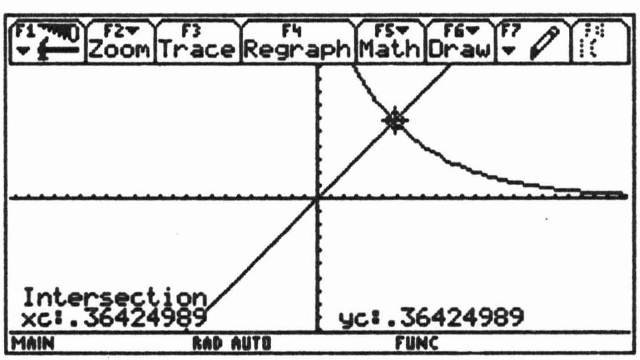
JEDEN NEBO TŘI REÁLNÉ KOŘENY ?

JAROSLAV HORA

Na nedávné Nitranské matematické konferenci jsem od jednoho z maďarských kolegů ze Szegédu dostal následující úlohu, upozorňující na jisté úskalí středoškolské matematiky: Kolik reálných kořenů má rovnice

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = log_{\frac{1}{16}} x \quad ?$$

1. úvaha: Připomeňme si, jak vypadají grafy obou funkcí. Funkce $y = (\frac{1}{16})^x$ patří mezi tzv. exponenciální funkce se základem menším než 1, tj. je definována v $(-\infty, \infty)$ a je v tomto intervalu klesající. Logaritmická funkce se základem $\frac{1}{16}$ je definována v $(0, \infty)$ a je v tomto intervalu též klesající. Grafy těchto funkcí si můžeme zhruba načrtnout „od ruky". Kdybychom si ještě uvědomili, že funkce $y = (\frac{1}{16})^x$ a $y = log_{\frac{1}{16}} x$ jsou navzájem inverzní, patrně bychom řekli, že oba grafy mají jediný průsečík ležící na ose prvního a třetího kvadrantu, tj. na přímce o rovnici $y = x$. Stačilo by tedy řešit jednodušší rovnici $(\frac{1}{16})^x = x$ a ta má, jak se snadno zjistí kupř. s pomocí grafického kalkulátoru TI-92 Plus, jediný reálný kořen $x \approx 0,36$.



Obr. 1

2. úvaha: Zamyslíme-li se trochu, podaří se nám uhodnout dva kořeny rovnice $(\frac{1}{16})^x = log_{\frac{1}{16}}\, x$, totiž $x = \frac{1}{2}$ a $x = \frac{1}{4}$. (A pokud se nám je nepovedlo uhodnout, proveďme alespoň zkoušku:

$$L = \left(\tfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{16}} = \tfrac{1}{4}, \qquad P = \log_{\frac{1}{16}} \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

tedy $x = \frac{1}{2}$ je kořenem rovnice $(\frac{1}{16})^x = log_{\frac{1}{16}}(x)$. Obdobně ověříme, že i $x = \frac{1}{4}$ je kořenem této rovnice).

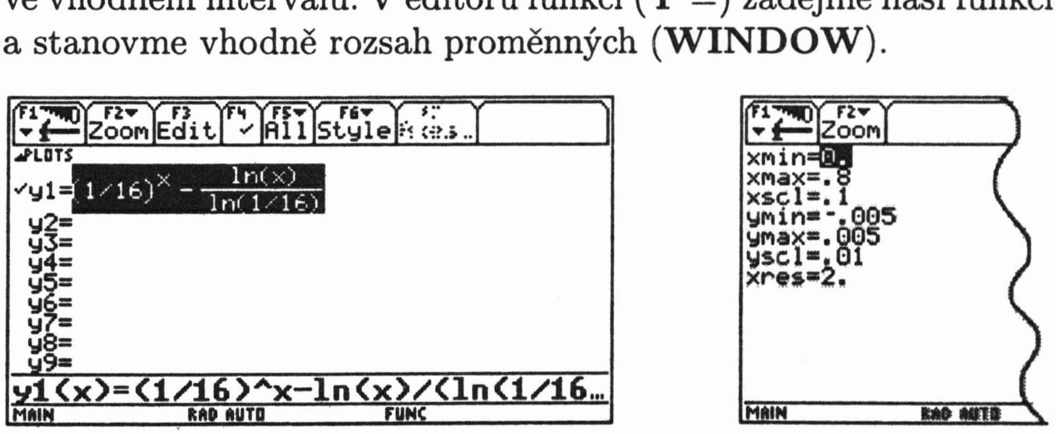
Jak to tedy je? Kolik reálných kořenům doopravdy má rovnice $(\frac{1}{16})^x = log_{\frac{1}{16}}(x)$? Měli bychom zřejmě precizněji prozkoumat graf funkce

$$f(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x - log_{\frac{1}{16}}(x).$$

Pokud ale budeme chtít užít grafický kalkulátor, může se stát, že vyvstane ještě jeden problém. K dispozici mohou být jen funkce $y = \ln x$ (tzv. přirozený logaritmus x) a $y = log\, x$ (dekadický logaritmus). Co však dělat, když námi užívaný kalkulátor nemá možnost nastavit si jiný základ logaritmů než e či 10? Zde je snadná pomoc: platí, že $log_a\, x = \frac{\ln x}{\ln a}$, a tedy speciálně pro $a = \frac{1}{16}$ lze psát $log_{\frac{1}{16}}(x) = \frac{\ln x}{\ln(\frac{1}{16})}$. Využijme teď opět služeb kalkulátoru TI-92 a zobrazme si průběh funkce

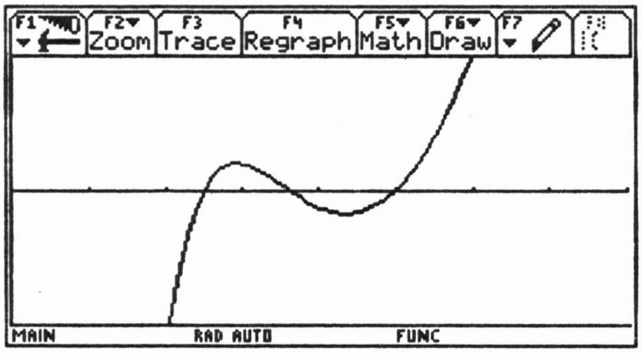
$$y = \left(\frac{1}{16}\right)^x - \frac{\ln x}{\ln(\frac{1}{16})}$$

ve vhodném intervalu. V editoru funkcí (**Y** =) zadejme naši funkci a stanovme vhodně rozsah proměnných (**WINDOW**).



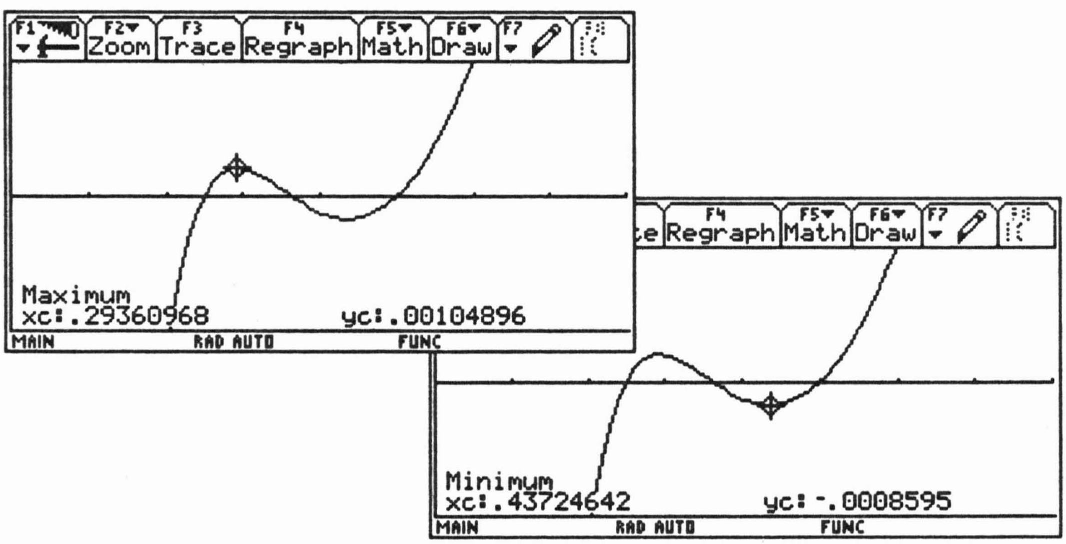
Obr. 2

Nyní necháme vykreslit graf této funkce (**GRAPH**).



Obr. 3

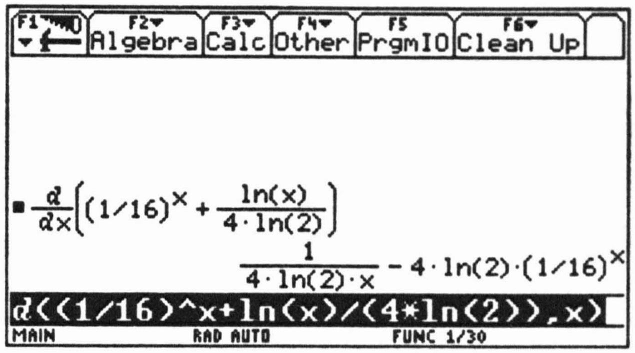
Vidíme, že průběh této funkce v intervalu $\langle 0; 0{,}8\rangle$ je komplikovanější, než bychom očekávali. Původní úvaha tedy nebyla precizní a v intervalu $\langle 0; 0{,}8\rangle$ se nacházejí tři reálné kořeny, tj. $x = 0{,}25$, $x \approx 0{,}36$ a $x = 0{,}5$. Poznamenejme ještě, že v situaci z obr. 4 můžeme stisknout klávesu **F5** a z nabízeného menu si zvolit **4:Maximum**, resp. **3:Minimum**. Po zadání vhodné dolní a horní meze prohledávaného intervalu pak obdržíme



Obr. 4

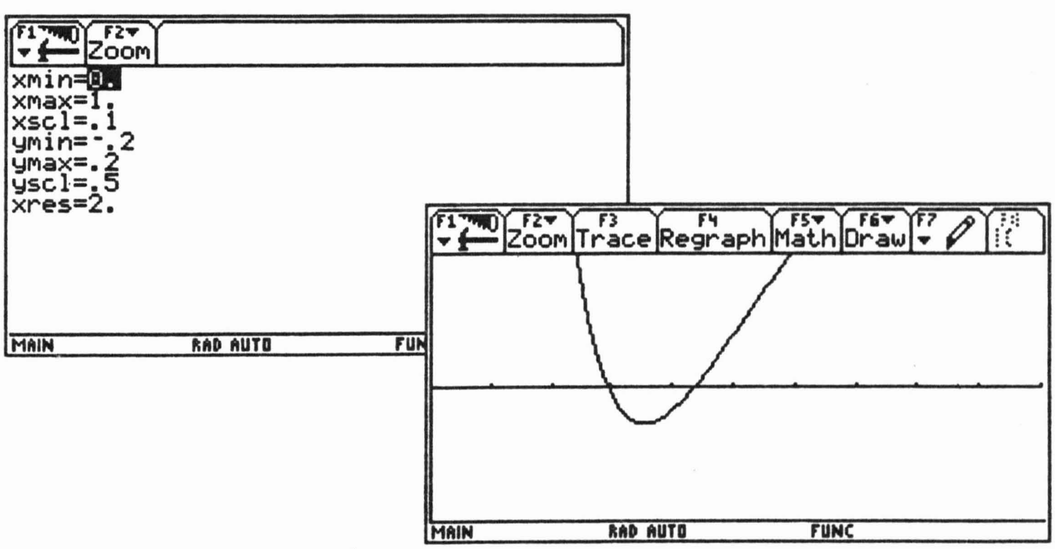
Pro ty, kteří jsou již obeznámeni se základy diferenciálního počtu, se nabízí ještě jeden pohled na věc – mohli bychom využít první derivaci funkce k prozkoumání toho, jak se funkce $f(x)$ chová na svém definičním oboru.

Přepněme se do „domácí obrazovky“ (**HOME**) a využijme první volbu v menu **F3 Calc**, tj. **1:d(differentiate**, abychom získali derivaci funkce $f(x)$:



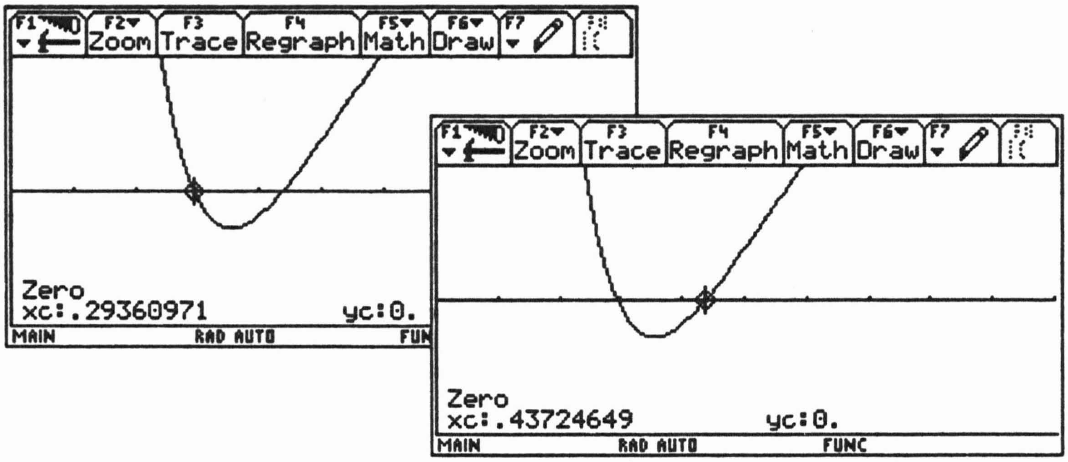
Obr. 5

Je tedy $f'(x) = \frac{1}{4 \cdot \ln(2)} \cdot [\frac{1}{x} - 16 \cdot (\frac{1}{16})^x \cdot \ln^2(2)]$. Protože $\frac{1}{4 \cdot \ln(2)}$ je kladná konstanta, nalezněme extrémy funkce $g(x) = \frac{1}{x} - 16 \cdot (\frac{1}{16})^x \cdot \ln^2(2)$. V editoru funkcí (**Y =**) teď zapišme funkci $g(x)$, přizpůsobme okno (**WINDOW**) novému problému a nechme si vykreslit graf.



Obr. 6

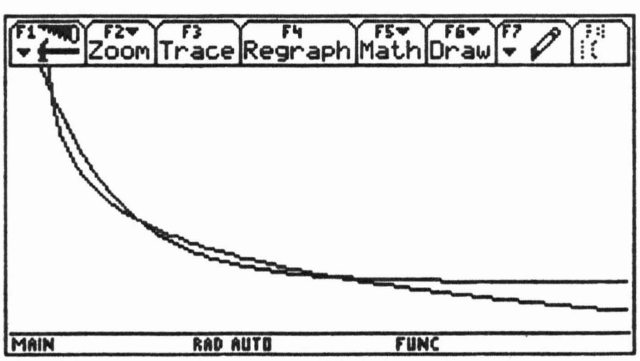
Opět využijeme povel z menu **F5 Math**, konkrétně **2:Zero**. Je zřejmé, k čemu tento povel slouží.



Obr. 7

Nalezli jsme tedy body $\alpha \approx 0{,}29361$ a $\beta \approx 0{,}43725$, v nichž má funkce $g(x)$ nulovou derivaci. Vidíme zároveň, že původní funkce $f(x)$ je v intervalech $(-\infty, \alpha\rangle$ a $\langle\beta, \infty)$ rostoucí, v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ klesající. Je vidět, že tyto závěry jsou ve shodě s obr. 6.

Vraťme se nyní k první úvaze, kdy jsme grafy funkcí $y = (\frac{1}{16})^x$, $y = log_{\frac{1}{16}} x$ kreslili „od ruky“. Necháme-li grafy funkcí vykreslit kalkulátorem, je obtížné vidět v jediném okně tři průsečíky grafů obou funkcí a „křížení“ obou grafů, protože se oba grafy „vykreslí jeden na druhý“. Změníme-li ale základ z $a = \frac{1}{16}$ kupř. na $a = \frac{1}{64}$, vykreslí se toto „křížení“ výrazněji (viz obr. 8). (V tomto případě bylo vypnuto zobrazení os x, y, které při sledování onoho „křížení“ trochu ruší.)



Obr. 8

Příklad je hezkou ukázkou možností, které poskytují pokročilé kalkulátory, které spojují dosti kvalitní grafiku se symbolickými výpočty (více viz kupř. manuály [1], [2]). Mimochodem, kalkulátor TI-92 Plus mj. umí řešit jednoduché soustavy algebraických rovnic metodou Gröbnerových bází (viz [3]) a velice zajímavé trendy lze sledovat i u matematického software (např. v počítačovém dokazování matematických vět, viz kupř. [4]).

Literatura

[1] *TI-92 Guidebook 1996*, Texas Instruments, 1996.

[2] *TI-83 Plus Graphing Calculator Guidebook*, Texas Instruments, 1999.

[3] Ernestová, M., Soustavy algebraických rovnic, *Učitel matematiky* **10**(4), 2002, 193–208.

[4] Pech, P., Automatické dokazování a objevování vět pomocí počítače, *8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* 2002, 235–240.

RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
Katedra matematiky FPE ZČU,
Klatovská 51
320 13 Plzeň
e-mail: horajar@kmt.zcu.cz