Ladislav Beran

O lineární závislosti

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 1, 20–25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150746

O LINEÁRNÍ ZÁVISLOSTI

Ladislav Beran

Nenápadná soustava tří rovnic o třech neznámých tvaru

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - y - 2z &= 0 \\ 7x - 5y - z &= 0 \end{aligned}$$

řešená v $\mathbb{R}$ může méně zkušenému žákovi připravit nemilé překvapení. Zjistí-li totiž z první rovnice, že $z = -x + y$ a dosadí-li do druhé a třetí rovnice, nalezne, že

$$\begin{aligned} 0 = 2x - y - 2z &= 2x - y - 2(-x + y) \\ 0 = 7x - 5y - z &= 7x - 5y - (-x + y). \end{aligned}$$

To vede na soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé tvaru

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 0 \\ 8x - 6y &= 0. \end{aligned}$$

Jedná-li se o žáka, který je nadto neochvějným následovníkem osvědčených postupů, může se stát, že pokračuje takto: z první rovnice dostane $x = \frac{3}{4}y$ a pak dosadí do druhé rovnice:

$$0 = 8x - 6y = 8 \cdot \frac{3}{4}y - 6y = 6y - 6y = 0,$$

čímž dojde k závěru, že $0 = 0$.[2]

[2]To připomíná tuto historku, kterou jsem slyšel na jednom setkání učitelů: Učitel matematiky vejde na začátku vyučovací hodiny do třídy, napíše na tabuli příklad, pak začne sám počítat, občas maže a počítá znovu. Na konci hodiny si oddechne a vítězoslavně napíše na tabuli $0 = 0$ a dvakrát to podtrhne. Vtom se ale hlásí pamětník (tehdy žák) s větou „Pane učiteli, to jsme ale věděli už na začátku!"

Víme, že komplikování úvah o zadané soustavě tří rovnic je dáno tím, že vektory $\mathbf{u} = (1,-1,1)$, $\mathbf{v} = (2,-1,-2)$ a $\mathbf{w} = (7,-5,-1)$ jsou lineárně závislé. Tuto skutečnost lze nahlédnout přímo z definice lineární závislosti, neboť

$$3 \cdot \mathbf{u} + 2 \cdot \mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{w} = (3,-3,3) + (4,-2,-4) + (-7,5,1) = \\ = (0,0,0) =: \mathbf{o}.$$

Otázkou, jak – co možná nejúsporněji – rozhodnout, zda dané vektory $\mathbf{u} = (a,b,c)$, $\mathbf{v} = (d,e,f)$ a $\mathbf{w} = (p,q,r)$ z T^3 (kde T značí nějaké těleso, např. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) jsou lineárně závislé a jak – v kladném případě – nalézt bez řešení rovnic příslušné koeficienty (ve výše uvedeném příkladě to byla čísla 3, 2 a -1) se zabýváme v tomto článku. Úvahy pracují jen se základními vlastnostmi dvouřadových a třířadových determinantů.

Je dobře známo, že *vektory* $\mathbf{u} = (a,b,c)$, $\mathbf{v} = (d,e,f)$ *a* $\mathbf{w} = (p,q,r)$ *z* T^3 *jsou lineárně závislé nad* T *právě když*

$$\Delta := \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Věta 1. *Jsou-li* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a* $\mathbf{w}$ *výše zmíněné vektory z* T^3, *pak*

$$\begin{vmatrix} e & f \\ q & r \end{vmatrix} \mathbf{u} - \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} \mathbf{v} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \mathbf{w} = (\Delta, 0, 0); \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} d & f \\ p & r \end{vmatrix} \mathbf{u} - \begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix} \mathbf{v} + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \mathbf{w} = (0, -\Delta, 0); \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} d & e \\ p & q \end{vmatrix} \mathbf{u} - \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \mathbf{v} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \mathbf{w} = (0, 0, \Delta). \tag{3}$$

Důkaz. Platí

$$\begin{vmatrix} e & f \\ q & r \end{vmatrix} \mathbf{u} - \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} \mathbf{v} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \mathbf{w} = \left(\begin{vmatrix} e & f \\ q & r \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} d + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} p, \right.$$

$$\begin{vmatrix} e & f \\ q & r \end{vmatrix} b - \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} e + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} q, \begin{vmatrix} e & f \\ q & r \end{vmatrix} c - \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} f + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} r) =$$

$$= (\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & b & c \\ e & e & f \\ q & q & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & b & c \\ f & e & f \\ r & q & r \end{vmatrix}) = (\Delta, 0, 0).$$

Zbývající výroky lze dokázat podobně.

Věta 2. *Následující čtyři výroky jsou ekvivalentní:*

$$\begin{vmatrix} e & f \\ q & r \end{vmatrix} \mathbf{u} - \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} \mathbf{v} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{o}; \tag{1'}$$

$$\begin{vmatrix} d & f \\ p & r \end{vmatrix} \mathbf{u} - \begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix} \mathbf{v} + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{o}; \tag{2'}$$

$$\begin{vmatrix} d & e \\ p & q \end{vmatrix} \mathbf{u} - \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \mathbf{v} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{o}. \tag{3'}$$

Vektory **u**, **v** *a* **w** *jsou lineárně závislé.* (4')

Poznámka 3. Utvořme matici

$$M := \begin{pmatrix} a & b & c & u \\ d & e & f & v \\ p & q & r & w \end{pmatrix},$$

kde u, v a w značí nějaké prvky z T. Všimněme si, že (1'), (2') a (3') může být formálně získáno rozvinutím determinantů

$$\begin{vmatrix} b & c & u \\ e & f & v \\ q & r & w \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c & u \\ d & f & v \\ p & r & w \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & u \\ d & e & v \\ p & q & w \end{vmatrix}$$

podle jejich třetího sloupce.

Důkaz věty 2. Podle (i), platí (4') právě když $\Delta = 0$. Užitím věty 1 lze nahlédnout, že (4') platí právě když je splněn kterýkoli z výroků (1'), (2') nebo (3').

Příklad 4. Rozhodněte, zda vektory

$$\mathbf{u} = (1,2,3), \mathbf{v} = (6,5,4) \text{ a } \mathbf{w} = (7,8,9)$$

z $\mathbb{R}^3$ jsou lineárně závislé.

Řešení. Nechť

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & u \\ 6 & 5 & 4 & v \\ 7 & 8 & 9 & w \end{pmatrix},$$

kde u, v a w značí nějaké prvky z $\mathbb{R}$. Podle poznámky 3 vyškrtneme první sloupec v M a uvažujeme determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & u \\ 5 & 4 & v \\ 8 & 9 & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} w = 13u + 6v - 7w.$$

Podle věty 2 nyní stačí zkontrolovat, zda $13\mathbf{u} + 6\mathbf{v} - 7\mathbf{w}$ je rovno nulovému vektoru $\mathbf{o}$ nebo ne.

Avšak

$$\begin{array}{rcr} 13\mathbf{u} & \cdots & (13, \ 26, \ 39) \\ 6\mathbf{v} & \cdots & (36, \ 30, \ 24) \\ -7\mathbf{w} & \cdots & (-49, -56, -63) \end{array}$$

Sečteme-li vektory v obou sloupcích, nacházíme, že

$$13\mathbf{u} + 6\mathbf{v} - 7\mathbf{w} = (0,0,0) = \mathbf{o}$$

a problém je řešen: Dané vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou lineárně závislé.

Může se stát, že všechny dvouřadové determinanty v (1') jsou rovny 0. Pak věta 2 říká, že $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou lineárně závislé. Je však přirozené ptát se, zda můžeme zajistit cestu k netriviální lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ dávající $\mathbf{o}$ také v tomto případě. Odpověď je evidentní, jsou-li dva z těchto vektorů lineárně závislé. Existují-li dva lineárně nezávislé vektory mezi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, pak lze dokázat, že alespoň jedna lineární kombinace z lineárních kombinací udaných ve větě 2 je netriviální.

Přesněji řečeno, platí následující výsledek:

Věta 5. (i) *Jsou-li vektory* **v** *a* **w** *lineárně nezávislé, pak alespoň jeden z determinantů*

$$\begin{vmatrix} e & f \\ q & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d & f \\ p & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d & e \\ p & q \end{vmatrix}$$

z „prvního sloupce" ve větě 2 je nenulový.

(ii) *Jsou-li vektory* **u** *a* **w** *lineárně nezávislé, pak alespoň jeden z determinantů z „druhého sloupce" ve větě 2 je nenulový.*

(iii) *Jsou-li vektory* **u** *a* **v** *lineárně nezávislé, pak alespoň jeden z determinantů ze „třetího sloupce" ve větě 2 je nenulový.*

Důkaz. (i) Předpokládejme naopak, že by platilo

$$er - qf = 0 \quad \& \quad dr - pf = 0 \quad \& \quad dq - pe = 0. \tag{4}$$

Nechť $\mathbf{v}' := (e, f, d)$, $\mathbf{w}' := (q, r, p)$ jsou vektory, které získáme cyklickou transformací vektorů $\mathbf{v} = (d, e, f)$ a $\mathbf{w} = (p, q, r)$. Položme $d' := e$, $e' := f$, $f' := d$, $p' := q$, $q' := r$, $r' := p$, takže $\mathbf{v}' = (d', e', f')$ a $\mathbf{w}' = (p', q', r')$. Pak

$$e'r' - q'f' = fp - rd = 0,$$

a je snadno vidět, že také

$$d'r' - p'f' = 0 \quad \& \quad d'q' - p'e' = 0.$$

Proto se vektory $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{w}'$ chovají vzhledem ke (4) podobně, jako **v** a **w**.

Protože **v** a **w** jsou lineárně nezávislé, je $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. Užijeme-li fakt, že uvažované vektory lze cyklicky transformovat, dospějeme k závěru, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $d \neq$ $\neq 0$. Nechť $k \in T$ je takové, že $p = kd$. Potom $0 = dr - pf = d(r -$ $- kf)$, a tak $r = kf$. Nadto $0 = dq - pe = d(q - ke)$ dává $q = ke$. To má za následek, že $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, což je spor.

Výroky (ii) a (iii) lze dokázat podobně.

Příklad 6. Rozhodněte, zda vektory

$$\mathbf{u} = (1,2,2), \mathbf{v} = (3,6,4), \mathbf{w} = (5,10,6)$$

z $\mathbb{R}^3$ jsou lineárně závislé.

Řešení. Nechť

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & u \\ 3 & 6 & 4 & v \\ 5 & 10 & 6 & w \end{pmatrix} \quad (u, v, w \in \mathbb{R}).$$

Vyškrtněme třetí sloupec v M a uvažujme odpovídající determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & u \\ 3 & 6 & v \\ 5 & 10 & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} w = 0u - 0v + 0w.$$

Jelikož vztah $0\mathbf{u} - 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{o}$ platí evidentně, věta 2 implikuje, že $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou lineárně závislé.

Chceme-li nalézt netriviální lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ dávající $\mathbf{o}$, povšimneme si, že

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ve shodě s větou 5 vyškrtneme druhý sloupec v M a píšeme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & u \\ 3 & 4 & v \\ 5 & 6 & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} w =$$
$$= -2u + 4v - 2w = -2(u - 2v + w).$$

Podle věty 2 tedy máme $\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$.

Doc. RNDr. Ladislav Beran, DrSc.
Katedra algebry MFF UK
Sokolovská 83, 186 00 Praha 8
e-mail: lberan@karlin.mff.cuni.cz