Bohdan Zelinka

$16 = 2^4 = 4^2$

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 1, 39–40

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150710`

$16 = 2^4 = 4^2$

Bohdan Zelinka

Radostí pro mnohé z nás (hlavně pro ty starší) jsou srazy bývalých spolužáků. I bývá vyzván třídní veršotepec, aby napsal ve verších pozvánku. Sraz má být 16. října 2004 v 16 hodin. Je-li veršotepec zároveň také matematikem, snaží se uvést nějakou mnemotechnickou pomůcku. A tak napíše: „Šestnáct dvojka na čtvrtou je nebo čtyřka na druhou.“ (Pro ten říjen se najde jiná pomůcka.)

Ano, $16 = 2^4 = 4^2$. A zdalipak to někdo nesplete a nebude chtít marně čekat do dalších tisíciletí? Položme si otázku, zda existuje další dvojice přirozených čísel s touto vlastností. A jak to vůbec je s kladnými reálnými čísly obecně?

Máme tedy diofantovskou[2] rovnici

$$x^y = y^x$$

pro $x \neq y$. Zlogaritmujme ji:

$$y \cdot \ln x = x \cdot \ln y\,.$$

Po další úpravě

$$\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{x}\,.$$

Budeme si tedy všímat funkce

$$F(x) = \frac{\ln x}{x}\,.$$

Laskavý čtenář snadno určí její průběh a vynaloží jistou námahu i na kreslení grafu. (Autor je líný, a proto právě v tomto spoléhá na čtenářovu laskavost.)

[2]Nemělo by se říkat „diofantická“, stejně jako není „pytagorická věta“, „ludolfické číslo“ či dokonce „bolzano-košická věta“.

Definiční obor je interval $(0, \infty)$ čili množina všech kladných reálných čísel. Je

$$\lim_{n \to 0_+} F(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{n \to \infty} F(x) = 0 \, .$$

Jediný společný bod grafu funkce s osou x je $[1, 0]$. Funkce má jediný extrém, a to maximum v bodě $[e, e^{-1}]$. V intervalu $(0, e)$ je rostoucí, v intervalu $(e, +\infty)$ klesající.

Máme-li nyní hodnotu y a najdeme-li k ní hodnoty x_1, x_2 tak, $x_1 < x_2$ a $F(x_1) = F(x_2) = y$, pak ${x_1}^{x_2} = {x_2}^{x_1} = y$. Takové hodnoty najdeme tak, že bodem $[0, y]$ vedeme rovnoběžku s osou x a zjistíme její společné body s grafem funkce $F(x)$. Pro $y \in \in e \cup (-\infty, 0\rangle$ bude takový bod právě jeden, pro $y \in (e, +\infty)$ žádný. Právě dva budou pro $y \in (1, e)$; z nich pak $x_1 \in (1, e)$, $x_2 \in (e, +\infty)$.

A kolikpak přirozených čísel máme v intervalu $(1, e)$? Přece právě jedno, a to 2. Do dvaceti počítat umíme, takže snadno zjistíme, že pak $x_2 = 4$, $y = 16$. Tady platí tvrzení v nadpisu článku a žádná jiná dvojice různých přirozených čísel takovou vlastnost nemá.

Napišme si tvrzení, které plyne z uvedených vlastností funkce $F(x)$.

Tvrzení.
Ke kladnému reálnému číslu a existuje kladné reálné číslo b takové, že

$$a^b = b^a \, ,$$

právě tehdy, je-li $a \in (1, e) \cup (e, +\infty)$. Přitom je-li $a \in (1, e)$, je $b \in (e, +\infty)$ a je-li $a \in (e, +\infty)$, pak $b \in (1, e)$. Jediná přirozená čísla a, b, pro něž uvedená rovnost nastává, jsou 2 a 4.